

数学 (理科)

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 $OABC-DEFG$ を考える。3 点 P, Q, R を、それぞれ辺 AE , 辺 BF , 辺 CG 上に、4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 $OPQR$ の面積を S とおく。また、 $\angle AOP$ を α , $\angle COR$ を β とおく。

(1) S を $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $S = \frac{7}{6}$ であるとき、 $\tan \alpha + \tan \beta$ の値を求めよ。さらに、 $\alpha \leq \beta$ のとき、 $\tan \alpha$ の値を求めよ。

<解答>

(1)

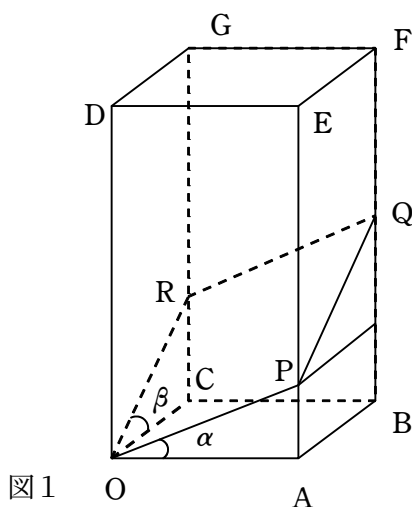


図 1

図 1 を参照する。 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$ とする。すると、 $P(1, 0, \tan \alpha)$, $R(0, 1, \tan \beta)$ とおける。4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるので、四角形 $OPQR$ は平行四辺形。

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ とする。また $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$, $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{1 + \tan^2 \beta}$ である。

四角形 $OPQR$ の面積 $= S = 2 \times (\triangle OPR \text{ の面積})$,

$$\begin{aligned} \triangle OPR \text{ の面積} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{r}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - (\tan \alpha \tan \beta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} \end{aligned}$$

したがって、 $S = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}$ (答)

(2)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan \frac{\pi}{4} = 1, \text{ したがって } \tan \alpha \tan \beta = 1 - \tan \alpha - \tan \beta$$

$$S = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} = \frac{7}{6} \text{ だから,}$$

$$1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = 1 + (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 2 \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 1 + (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 2(1 - \tan \alpha - \tan \beta) = \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$\tan \alpha + \tan \beta = x$ とおけば、 $x^2 + 2x - 1 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(x + \frac{17}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) = 0$ 、 $x = \tan \alpha + \tan \beta > 0$ だから、

$$x = \tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6} \quad (\text{答})$$

$$\text{また、} \tan \alpha \tan \beta = 1 - \tan \alpha - \tan \beta = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

したがって、 $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ は2次方程式 $y^2 - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6} = \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$ の解である。

$$\alpha \leq \beta \text{だから、} \tan \alpha = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

<解説>

数学A（余弦定理，三角形の面積），数学II（三角関数の公式），数学B（ベクトルによる図形の取り扱い）が関わる問題である。題意は簡明である。各点の空間座標が与えられるので，ベクトルによって扱うことを直ちに着想したい。

三角形の面積が2辺のベクトルによって、 $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{r}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}$ のように表されることを覚えておこう。教科書に記載されている。これを覚えていない場合はどうするか。

$p = |\vec{p}| = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ ， $r = |\vec{r}| = \sqrt{1 + \tan^2 \beta}$ ，2辺が挟む角を γ として，三角形の面積は、 $\frac{1}{2}pr \sin \gamma$ であることは知っているであろう。

$$\triangle OPR \text{の面積} = \frac{1}{2}pr \sin \gamma = \frac{1}{2}pr \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2r^2 - (pr \cos \gamma)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{r}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2}$$

お勧めではないが，まったくベクトルを用いなくて解くことを考えてみよう。

ここで $p = OP = \frac{1}{\cos \alpha}$ ， $r = OR = \frac{1}{\cos \beta}$ ， $q = PR = \sqrt{(PR)^2} = \sqrt{1 + 1 + (\tan \alpha - \tan \beta)^2}$ とおけば

$$\text{余弦定理により、} \cos \gamma = \frac{(OP)^2 + (OR)^2 - (RP)^2}{2OP \times OR} = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr}$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{(1 + \cos \gamma)(1 - \cos \gamma)} = \sqrt{\frac{p^2 + r^2 - q^2 + 2pr}{2pr} \times \frac{2pr + q^2 - p^2 - r^2}{2pr}} \\ &= \frac{1}{2pr} \sqrt{4p^2r^2 - \{(p^2 + r^2) - q^2\}^2} \end{aligned}$$

$$S = OP \cdot OR \sin \gamma = pr \sin \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{4p^2r^2 - \{(p^2 + r^2) - q^2\}^2}$$

しかるに、 $p^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ ， $r^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{4(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - \{1 + \tan^2 \alpha + 1 + \tan^2 \beta - 2 - (\tan \alpha - \tan \beta)^2\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - 4 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)は特段難しいところはないであろう。

第 2 問

a を自然数（すなわち1以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて1個以上入っている袋Uに対して、次の操作（＊）を考える。

（＊） 袋Uから球を1個取り出し、

（i） 取り出した球が白球のときは、袋Uの中身が白球 a 個、赤球1個となるようにする。

（ii） 取り出した球が赤球のときは、その球を袋Uへ戻すことなく、袋Uの中身はそのままにする。

はじめに袋Uの中に、白球が $a+2$ 個、赤球が1個入っているとす。この袋Uに対して操作（＊）を繰り返し行う。

たとえば、1回目の操作で白球が出たとすると、袋Uの中身は白球 a 個、赤球1個となり、さらに2回目の操作で赤球が出たとすると、袋Uの中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし、袋Uの中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n$ を求めよ。

<解答>

(1)

球の全個数が $(a+3)$ 個、赤球の個数が1個だから、 $p_1 = \frac{1}{a+3}$ （答）

2回目に赤球が出る確率 p_2

=（1回目に赤球で2回目に赤球の確率）+（1回目に白球で2回めに赤球の確率）

袋の中には赤球が2個以上入ることはないので、赤玉が出た後、赤玉が出ることはない。

$p_2 = \text{（1回目に白球で2回目に赤球の確率）} = (1-p_1) \times \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ （答）

(2)

赤球が出ると、次の試行では袋の中には赤球が入っていないので、 n 回目に赤球が出るためには、その前で白球が出ることが必要である。

したがって、 $p_n = (1-p_{n-1})p_{wr} = (1-p_{n-1})p_{wr} = \frac{(1-p_{n-1})}{a+1}$

ただし、 p_{wr} は白球が出た後に、赤球が出る確率で、 $p_{wr} = \frac{1}{a+1}$

$q = \frac{1}{a+1}$ とおけば、 $p_n = q(1-p_{n-1})$

したがって、 $p_n - \frac{q}{q+1} = -q\left(p_{n-1} - \frac{q}{q+1}\right)$

$$=(-q)^2\left(p_{n-2}-\frac{q}{q+1}\right)=\cdots=(-q)^{n-1}\left(p_1-\frac{q}{q+1}\right)$$

$$\frac{q}{q+1}=\frac{1}{a+2}, \quad p_1=\frac{1}{a+3} \text{ だから, } p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m p_n &= \frac{m}{a+2} - \frac{1}{(a+3)(a+2)} \sum_{n=1}^m \left(\frac{-1}{a+1}\right)^{n-1} \\ &= \frac{m}{a+2} - \frac{1}{(a+3)(a+2)} \times \frac{a+1}{a+2} \left\{1 - \left(\frac{-1}{a+1}\right)^m\right\} \end{aligned}$$

$$\left|\frac{-1}{a+1}\right| < 1 \text{ なので, } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{a+1}\right)^m = 0 \text{ であるから,}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a+2} - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a+1}{m(a+2)^2(a+3)} = \frac{1}{a+2} \quad (\text{答})$$

<解説>

(1)

この問題の設定では、袋の中に赤球が2個以上入ることはない。したがって、赤球を取り出した後は、袋の中には赤球は存在しない。したがって、赤球を取り出すためには、直前の試行で白球を取り出さねばならない。

(2)

$p_n = q(1 - p_{n-1})$ の漸化式から、 p_n の一般表現を求めるために、 $p_n - \frac{q}{q+1} = -q\left(p_{n-1} - \frac{q}{q+1}\right)$ なる変形をするのは常套手段として知っているだろう。

もし、この常套手段を思い出せない場合は、お勧めではないが、以下のような方法もある。

$$\begin{aligned} \text{すなわち, } p_n - p_{n-1} &= q(1 - p_{n-1}) - q(1 - p_{n-2}) = -q(p_{n-1} - p_{n-2}) = (-q)^2(p_{n-2} - p_{n-3}) \\ &= \cdots = (-q)^{n-2}(p_2 - p_1) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ の結果から, } p_2 - p_1 = \frac{a+2}{(a+3)(a+1)} - \frac{1}{a+3} = \frac{1}{(a+3)(a+1)} = r \text{ とおく。}$$

$$\text{すると, } p_n - p_{n-1} = (-q)^{n-2} r$$

$$\text{したがって, } (p_n - p_{n-1}) + (p_{n-1} - p_{n-2}) + \cdots + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) = p_n - p_1 = r \sum_{k=0}^{n-2} (-q)^k$$

$$\text{したがって, } p_n = r \sum_{k=0}^{n-2} (-q)^k + p_1 = r \left\{ \frac{1 - (-q)^{n-1}}{1 + q} \right\} + p_1$$

$$p_1 = \frac{1}{a+3}, \quad r = \frac{1}{(a+3)(a+1)}, \quad q = \frac{1}{a+1} \text{ を代入して}$$

$$p_n = \frac{1}{(a+3)(a+2)} \left\{ 1 - \left(\frac{-1}{a+1}\right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{a+3} = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+3)(a+2)} \left(\frac{-1}{a+1}\right)^{n-1} \quad (\text{答})$$

第 3 問

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1: y = -x^2 + 1$$

$$C_2: y = (x-u)^2 + u$$

を考える。 C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は、ある実数 a, b により、 $a \leq u \leq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leq u \leq b$ をみたすとき、 C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし、共有点が 1 点のみのときは、 P_1 と P_2 は一致し、ともにその共有点を表すとする。

$$2|x_1y_2 - x_2y_1|$$

を u の式で表せ。

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I = \int_a^b f(u) du$$

を求めよ。

<解答>

(1)

$$C_1: y = -x^2 + 1 \quad \text{①}$$

$$C_2: y = (x-u)^2 + u \quad \text{②}$$

$$\text{①}=\text{②} \text{ とおく。} -x^2+1=(x-u)^2+u, \text{ したがって } 2x^2-2ux+u^2+u-1=0 \quad \text{③}$$

C_1 と C_2 が共有点をもつということは、③が実数解をもつということである。2 次方程式の解の判別条件は、 $u^2-2(u^2+u-1)=-u^2-2u+2 \geq 0$, したがって、 $-(\sqrt{3}+1) \leq u \leq \sqrt{3}-1$

したがって、 $a = -(\sqrt{3}+1)$, $b = \sqrt{3}-1$ (答)

(2)

$$\text{③を变形して, } 2\left(x-\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{2} + u - 1 = 0 \text{ だから, } x = \frac{u}{2} \pm \frac{\sqrt{-u^2-2u+2}}{2} \quad \text{④}$$

$$y_1 = -x_1^2 + 1, y_2 = -x_2^2 + 1 \text{ だから, } x_1y_2 = -x_1(x_2^2-1), x_2y_1 = -x_2(x_1^2-1)$$

$$\text{したがって, } 2|x_1y_2 - x_2y_1| = 2|-x_1(x_2^2-1) + x_2(x_1^2-1)| = 2|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)|$$

$$\text{④から } |x_1 - x_2| = \sqrt{-u^2-2u+2}$$

$$\text{③の解と係数の関係から, } x_1x_2 = \frac{u^2+u+1}{2} = \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} > 0$$

$$|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)| = |x_1-x_2||x_1x_2+1| = \sqrt{-u^2-2u+2} \times \frac{u^2+u+1}{2}$$

$$\text{したがって, } 2|x_1y_2 - x_2y_1| = (u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2} \quad \text{(答)}$$

(3)

$$I = \int_a^b f(u) du = \int_{-\sqrt{3}-1}^{\sqrt{3}-1} (u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2} du$$

$$v = u+1 \text{ とおく。すると } u^2+u+1 = v^2-v+1, -u^2-2u+2 = -v^2+3$$

$$I = \int_a^b f(u) du = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (v^2 - v + 1) \sqrt{-v^2 + 3} dv = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (v^2 + 1) \sqrt{-v^2 + 3} dv$$

ただし、 $v\sqrt{-v^2+3}$ は奇関数だから、 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} v\sqrt{-v^2+3} dv = 0$ である。

$$\sin \theta = \frac{v}{\sqrt{3}} \text{ とおく。すると、} dv = (\sqrt{3} \cos \theta) d\theta, \quad v^2 + 1 = 3\sin^2 \theta + 1$$

$$\sqrt{3 - v^2} = \sqrt{3 - 3\sin^2 \theta} = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$I = \int_a^b f(u) du = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (v^2 + 1) \sqrt{-v^2 + 3} dv = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2 \theta + 1) \cos^2 \theta d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{8} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{したがって、} I = \int_a^b f(u) du = 3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2 \theta + 1) \cos^2 \theta d\theta = \frac{9\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{21\pi}{8} \quad (\text{答})$$

<解説>

(1)

放物線は2次関数である。2つの放物線が共有点をもつということは、2つの2次関数を連立させて得られる2次方程式が実数解をもつということである。

(2)

2次方程式の2つの実数解が x_1, x_2 である。2次方程式の解と係数の関係を利用すると計算が速い。

(3)

被積分関数、積分範囲をにらみ、積分計算の方針を考える。 $v = u + 1$ なる変数変換をすると、積分範囲が $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ と単純になること、被積分関数の $\sqrt{-u^2 - 2u + 2}$ が $\sqrt{-v^2 + 3}$ と単純になることから、 $v = u + 1$ なる変数変換を着想する。

続いて、 $v = \sqrt{3} \sin \theta$ なる変数変換は、被積分関数の $\sqrt{\quad}$ を外す常套手段として教科書に掲載されているので、習熟しておきたい。

第 4 問

p, q は実数の定数で、 $0 < p < 1, q > 0$ をみたすとする。関数

$$f(x) = (1 - p)x + (1 - x)(1 - e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答よ。必要であれば、不等式 $1 + x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

- (1) $0 < x < 1$ のとき, $0 < f(x) < 1$ であることを示せ。
 (2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) を,

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める。 $p > q$ であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

となることを示せ。

- (3) $p < q$ であるとき,

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

<解答>

(1)

$0 < p < 1$, $0 < 1 - e^{-qx} < 1$ だから, $0 < x < 1$ のとき, $0 < f(x)$ は明らか。

$0 < 1 - e^{-qx} < 1$ だから, $f(x) = (1-p)x + (1-x)(1 - e^{-qx}) < (1-p)x + (1-x) = 1 - px$

$0 < p < 1$ だから, $0 < x < 1$ のとき, $0 < px < 1$, したがって $f(x) < 1 - px < 1$

以上によって, $0 < x < 1$ のとき, $0 < f(x) < 1$ である。

(2)

$0 < x_0 < 1$ だから, (1) の結果より, $0 < x_1 = f(x_0) < 1$

$0 < x_{n-1} < 1$ とすれば, (1) の結果より, $0 < x_n = f(x_{n-1}) < 1$

したがって数学的帰納法により, すべての n において, $0 < x_n < 1$ が成立する。

不等式 $1 + x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つので,

x を $-qx$ に置き換えて $1 - qx \leq e^{-qx}$, したがって $1 - e^{-qx} \leq qx$, これを用いて

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1 - e^{-qx}) \leq (1-p)x + (1-x)qx$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = (1-p)x_{n-1} + (1-x_{n-1})(1 - e^{-qx_{n-1}}) \leq (1-p)x_{n-1} + (1-x_{n-1})qx_{n-1}$$

$$= -qx_{n-1}^2 + (1-p+q)x_{n-1} \leq (1-p+q)x_{n-1}$$

$$\leq (1-p+q)^2 x_{n-2} \leq (1-p+q)^3 x_{n-3} \leq \dots \leq (1-p+q)^n x_0, \quad \text{したがって } 0 < x_n \leq (1-p+q)^n x_0$$

$$0 < 1-p+q < 1, \quad 0 < x_0 < 1 \text{ だから, } 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p+q)^n x_0 = 0, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

(3)

$x = f(x)$ を満たす $0 < x < 1$ なる x の存在を示せば良い。

すなわち, $g(x) = f(x) - x = -px + (1-x)(1 - e^{-qx}) = 0$ の解が $0 < x < 1$ であることを示せば良い。

$$g'(x) = (1+q-qx)e^{-qx} - (p+1)$$

$$g''(x) = (q^2x - 2q - q^2)e^{-qx}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ では } 0 \leq q^2x \leq q^2 \text{ だから, } g''(x) \leq (q^2 - 2q - q^2)e^{-qx} = -2qe^{-qx} < 0$$

したがって $g'(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ では単調減少する。

$$g'(0) = 1+q-(p+1) = q-p > 0$$

$$g'(1) = e^{-q} - (p+1) = (e^{-q} - 1) - p < 0$$

したがって $0 < \alpha < 1$ なる $x = \alpha$ において $g'(\alpha) = (1+q-q\alpha)e^{-q\alpha} - (p+1) = 0$ となる。

$g(0)=0$, $g(1)=-p$ だから, $g(x)$ は図1のように変化する。

x	0	α	1		
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-p$

図 1

したがって, $g(\alpha)>0$ であり, $g(x)$ は $\alpha<x<1$ において単調減少し, $g(1)=-p<0$ だから,
 $g(c)=0$ となる $0<\alpha<c<1$ なる c が存在する。
すなわち $c=f(c)$, $0<c<1$ をみたす実数 c が存在する

<解説>

(1)

まずは, 与式を凝視して思考を巡らせよう。最も単純な方法で証明できないか, 考えることが大事だ。構成する因数がすべて正だから, $0<f(x)$ は容易にわかる。 $0<(1-e^{-qx})$ の大きさを見積もることが困難なので, $0<(1-e^{-qx})<1$ であることから, 1に置き換えることを着想する。

(2)

不等式 $1+x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つという命題を上手に使うことがポイントである。特に難しいところはないだろう。

(3)

解答方針の着想が必要だから, やや難しい問題である。しかし, $g(x)$ のグラフを大雑把に書いてみると, 正の極値をもち, $0<x<1$ で x 軸と交わりそうなことに気づく。とするなら, $g'(x)$ の振る舞いを調べるという方針が決まるだろう。ポイントは 大雑把にグラフを描いて, どうすれば解の存在を証明できるかを考えることだ。

別解を紹介する。

$$c=f(c)=(1-p)c+(1-c)(1-e^{-qc}) \quad ①$$

$$\text{したがって, } pc=(1-c)(1-e^{-qc}) \quad ②$$

$$\text{したがって, } p=(1-c)\frac{1-e^{-qc}}{c} \quad ③$$

③を満たす実数 $0<c<1$ が存在することを示せば良い。

すなわち, $y=p$ のグラフと $y=(1-c)\frac{1-e^{-qc}}{c}$ のグラフとが交わることを示せば良い。

③の右辺を, $g(c)=(1-c)\frac{1-e^{-qc}}{c}$ とすれば, $0<c<1$ では,

$$1-c>0, e^{-qc}<1 \text{ だから, } g(c)>0$$

$$\text{また, } g(1)=0, g(0)=\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1-e^{-qc}}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} -\frac{g_1(0+c)-g_1(c)}{c} = -g_1'(0)=q \quad ④$$

ただし, ここで $g_1(c)=e^{-qc}$, $g_1'(c)=-qe^{-qc}$ とおいた。

さらに, $g_2(c)=\frac{1-e^{-qc}}{c}$ とおくと, $g_2'(c)=\frac{(qc+1-e^{-qc})}{c^2e^{qc}} \leq 0$ なので, $g_2(c)$ は単調減少

したがって、 $g(c)$ も単調減少関数で、図2のようになる。

$0 < p < q$ だから、 $0 < c < 1$ において、 $y=p$ のグラフと $y=(1-c)\frac{1-e^{-qc}}{c}$ のグラフとは必ず交わる。

したがって、①を満たす実数 c が存在する。

この解法のポイントは④の導出である。④が求まれば、③のグラフは容易に描ける。

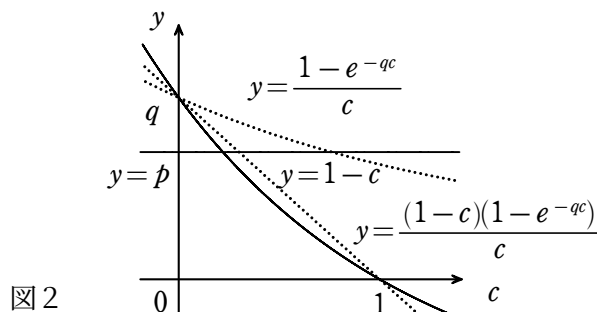


図2

第 5 問

r を0以上の整数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r, a_2=r+1, a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

また、素数 p を1つとり、 a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし、0を p で割った余りは0とする。

- (1) 自然数 n に対し、 b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。
- (2) $r=2, p=17$ の場合に、10以下のすべての自然数 n に対して、 b_n を求めよ。
- (3) ある2つの相異なる自然数 n, m に対して、

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0, b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立つとする。このとき、 $b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

- (4) $a_2, a_3, a_4, \dots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき、 a_1 も p で割り切れないことを示せ。

<解答>

(1)

$a_n=j_n p+b_n$ とおく。ただし、 j_n は0以上の整数、 $0 \leq b_n < p$ である。

$$b_{n+2}=a_{n+2}-j_{n+2}p=a_{n+1}(a_n+1)-j_{n+2}p$$

$$=(j_{n+1}p+b_{n+1})(j_n p+b_n+1)-j_{n+2}p=j_{n+1}p(j_n p+b_n+1)+b_{n+1}j_n p-j_{n+2}p+b_{n+1}(b_n+1)$$

$$=k_{n+2}p+b_{n+1}(b_n+1), \text{ただし } k_{n+2}=j_{n+1}(j_n p+b_n+1)+b_{n+1}j_n-j_{n+2} \text{ であって、整数。}$$

$b_{n+1}(b_n+1)=i p+q$ とおく。ただし i は0以上の整数、 $0 \leq q < p$ である。

$$\text{すると、} b_{n+2}=(k_{n+2}+i)p+q$$

しかるに $0 \leq b_{n+2} < p$ だから、 $k_{n+2}+i=0$ かつ $b_{n+2}=q$ すなわち b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2)

$a_1=r=2$, $b_1=2$, $a_2=r+1=3$, $b_2=3$, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致するので,
 $b_3=9$, $b_4=2$, $b_5=3$, $b_6=9$, $b_7=2$, $b_8=3$, $b_9=9$, $b_{10}=2$

(3)

(1)の結果から,

$$b_{n+1}(b_n+1)=i_n p + b_{n+2}$$

$$b_{m+1}(b_m+1)=i_m p + b_{m+2}$$

とおくことができる。ただし, i_n, i_m は整数である。

$$b_{n+2}=b_{m+2} \text{ だから, } b_{n+1}(b_n+1)-i_n p = b_{m+1}(b_m+1)-i_m p$$

$$b_{n+1}(b_n-b_m)=(i_n-i_m)p \quad \text{①}$$

しかるに, $0 \leq b_n, b_m < p$, $0 < b_{n+1} < p$ だから, ①の左辺は p の倍数にはならない。したがって,

①が成立するのは①が0になるときだから, $b_n=b_m$ である。

(4)

b_{n+1}, b_{n+2} は $1 \leq b_{n+1} \leq p-1$, $1 \leq b_{n+2} \leq p-1$ なる自然数である。したがって, (b_{n+1}, b_{n+2}) の異なる値の組は高々 $(p-1)^2$ 個である。同様に (b_{m+1}, b_{m+2}) の異なる値の組も高々 $(p-1)^2$ 個である。すると必ず, $(b_{n+1}, b_{n+2})=(b_{m+1}, b_{m+2})$ になるような m が存在する。なぜなら, $m \neq n$ として, m は1から ∞ までの自然数をとれるから, (b_{m+1}, b_{m+2}) には無限の組み合わせがあるからである。

したがって, $b_{n+1}=b_{m+1}$, $b_{n+2}=b_{m+2}$ が成立する。 $a_2, a_3, a_4, \dots$ に p で割り切れる数が現われないとすれば, $b_{n+1}=b_{m+1} > 0$ だから, (3)によって $b_n=b_m$ が成り立つ。

$n=1$ とすれば, $b_1=b_m \neq 0$ だから, a_1 も p で割り切れない。

<解説>

整数の問題である。整数の問題は複雑な計算を要するものではなく, 解答方針の着眼や着想と, 結論に至る論理を構想する力とが求められる。

(1)

a_n を素数 p による除算の商と剰余によって表現する。これは常套的方法である。

(2)

(1)を利用して, $n=1$ から10まで b_n を暗算していけば良い。

(3)

(1)の結果を利用して, $b_{n+1}(b_n+1)=i_n p + b_{n+2}$ のように表現して思考を進める。

(4)

高校数学ではなかなか経験することのない問題で, 解答方針に着想を必要とする。いろいろ思考を巡らせても, なかなかこれぞという方法を思いつくことは難しい。まずは, (3)を利用しようとするべきである。

(3)によって, $(b_{n+1}, b_{n+2})=(b_{m+1}, b_{m+2})$ なら, $b_n=b_m$ となって, 課題に容易に答えることができるだろう。すると, $(b_{n+1}, b_{n+2})=(b_{m+1}, b_{m+2})$ となるような n, m が存在することを説明する必要がある。

b_{n+1}, b_{n+2} は $1 \leq b_{n+1} \leq p-1, 1 \leq b_{n+2} \leq p-1$ なる自然数であり、したがって、 (b_{n+1}, b_{n+2}) の異なる値の組は高々 $(p-1)^2$ 個である、ということがポイントである。 m は ∞ までの自然数をとれるから、 (b_{n+1}, b_{n+2}) に等しい (b_{m+1}, b_{m+2}) が存在することに気づく。

第 6 問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が、線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分 PQ の通過する領域を D とする。

- (1) s を $0 \leq s \leq 2$ をみたす実数とすると、点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。
- (2) D を図示せよ。

<解答>

点 P の座標を $(x_P, y_P) = (x_P, \sqrt{3}x_P)$ 、点 Q の座標を $(x_Q, y_Q) = (x_Q, -\sqrt{3}x_Q)$ とする。

$OP = 2x_P, OQ = -2x_Q$ だから、 $OP + OQ = 2x_P - 2x_Q = 6, \therefore x_P - x_Q = 3$

点 P は $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上にあるので、 $OP = 2x_P \leq 4$ かつ $OQ = -2x_Q \leq 4$ だから、 $2 \leq 2x_P \leq 4, \therefore 1 \leq x_P \leq 2$

線分 PQ の方程式は

$$y - \sqrt{3}x_P = \frac{\sqrt{3}x_P + \sqrt{3}x_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P) = \frac{\sqrt{3}(2x_P - 3)}{3}(x - x_P)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x_P - 3)x - \frac{2}{\sqrt{3}}(x_P - 3)x_P \quad (1 \leq x_P \leq 2) \quad ①$$

加えて、線分 PQ は明らかに線分 OP, OQ より上にあるから、

$$y \geq \sqrt{3}x \quad (0 \leq x \leq 2), \quad y \geq -\sqrt{3}x \quad (-2 \leq x \leq 0) \quad ②$$

①, ② を満足する (x, y) が領域 D である。

① で $x = s, y = t$ として、 $0 \leq s \leq 2$ のときの t の範囲を考える。

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x_P - 3)s - \frac{2}{\sqrt{3}}(x_P - 3)x_P \quad (1 \leq x_P \leq 2) \quad ③$$

$$③ \text{ において、} x_P \text{ で微分すると、} t' = -\frac{4}{\sqrt{3}}x_P + \frac{2\sqrt{3}}{3}s + 2\sqrt{3}, \quad t' = 0 \text{ とすれば、} x_P = \frac{s+3}{2}$$

したがって、③ は $x_P = \frac{s+3}{2}$ のとき最大値 $\frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$ をとる。

しかるに、 $0 \leq s \leq 2$ だから $\frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$ 、一方 $1 \leq x_P \leq 2$ だから、

(i) $\frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq 2$ 、すなわち、 $0 \leq s \leq 1$ のとき、 t は図 1 のような変化をする。したがって、

$$\frac{4-s}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} \text{ である。}$$

x_p	1	$\frac{s+3}{2}$	2
t'	+	0	-
t	$\frac{4-s}{\sqrt{3}}$	$\frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$	$\frac{4+s}{\sqrt{3}}$

図 1

一方②から, $t \geq \sqrt{3}s$, しかるに $0 \leq s \leq 1$ では, $\sqrt{3}s \leq \frac{4-s}{\sqrt{3}}$ だから,

D に入る点 (s, t) は, $\frac{4-s}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$ ($0 \leq s \leq 1$) である。

(ii) $2 < \frac{s+3}{2}$, すなわち, $1 < s \leq 2$ のとき

$1 \leq x_p \leq 2$ で t は単調増加だから, $\frac{4-s}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{4+s}{\sqrt{3}}$ である。

一方, ②から $1 < s \leq 2$ では, $\frac{4-s}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}s$ だから,

D に入る点 (s, t) は, $\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$ ($1 < s \leq 2$) である。

(2)

(1)の結果から, D を求める。 s を x に, t を y に置き換える。

$0 \leq x \leq 1$ のとき $\frac{4-x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$, $1 < x \leq 2$ のとき $\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{4+x}{\sqrt{3}}$

D は y 軸に関して, 対称だから,

$-2 \leq x < -1$ のとき $-\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{4-x}{\sqrt{3}}$, $-1 \leq x \leq 0$ のとき $\frac{4+x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$

D を図示すると図2のハッチ部になる。境界線を含む。

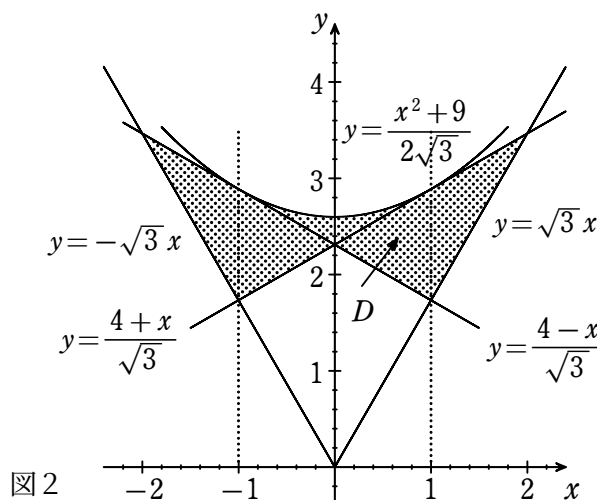


図 2

<解説>

題意は簡明であり、解答方針の着想や計算に難しさはない。ただ、問題文の表現にやや戸惑いを感じさせるものがあるので、注意したい。

(1)

この問題は単純に「線分PQの通過する領域 $D(x, y)$ の y の範囲を求めよ」となっていれば、分かり易い。点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ、と敢えて難しそうな言い換え表現が混乱を誘うかも知れない。③式で t を x_P の2次関数とみて、 x_P が変化するときの変化を考えるのがこの問題のポイントである。

(2)

(1)で「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」を問うていながら、今度は「 D を図示せよ」だから、 $D(x, y)$ を描かなければならない。(1)の「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」を描いては駄目である。ややひっかけ問題のような気がする。恐らく、そのように描いてしまった受験生もいることだろう。

なぜ、少々底意地が悪いような「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」などとして、誤りを誘うような出題なのだろう。同じことを数学的に表現を変えても、混乱せずにしっかり理解できるかを問うて、数学的論理力を試そうとしたのかも知れない。

<総評>

例年のように解答方針の着想、解答論理の構成力、計算力等を必要とする問題が揃っているのだが、例年に比して、やや易化したとの印象である。全体を一読して、扱い易い問題から取りかかるようにするのが、そのような数学的な判断力も重要である。

1, 6, 3の順序で完答したい。続いて、2, 5, 4は解答容易な前半の小問は完答すること。最後の小問はいずれもやや難しくなるので、時間配分に気をつけて扱えば、高点を得ることができるだろう。

第1問

題意は簡明であり、解答方針も定まり易い。三角形の面積をベクトル表現することで、容易に求めることができる。ベクトル表現に気づくかどうかポイントなのだが、余弦定理からだけでも正答に至る。難易度はB－。

第2問

例年の確率の問題と比較して、かなり容易である。解答方針の着想が困難、計算が複雑という二つの難しさを兼ね備えているのが東大入試数学の確率問題なのだが、今年はどうしたことか。難易度B。

第3問

2次関数、2次方程式の解と積分の問題。題意は簡明である。(1)は難易度C、(2)は難易度B－、(3)は定積分の変数変換を2度行う着想や工夫が必要である。難易度B＋。

第4問

指数関数を含む式の不等式、方程式、微分の問題である。解答方針に少々 の着想を必要とする。

(1)は難易度C、(2)は難易度B、(3)は難易度B＋である。(1)、(2)は完答したい。(3)は着想と粘り強い思考が必要だが、グラフを描いて説明すれば、部分点は得られるだろうから、諦めないこと。

第5問

整数の問題で、高校数学ではあまり経験することがないだろう。的確な数学論理力が求められる。
問題は誘導的に構成されているから、前問をヒントに後問題
(1)は難易度B－、(2)は難易度C、(3)は難易度B＋、(4)は難易度A－。

第6問

問題文にやや難しい表現があって、混乱を誘うかも知れないが、しっかり思考しよう。解答方針や計算に特段の難しさはないだろう。難易度はB。

数学（文科）

第 1 問

以下の問いに答よ。

- (1) t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める。このとき、関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

- (2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。 t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき、

$g(t)$ の最小値を求めよ。

<解答>

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18 = -2\{x - (2t - 3)\}^2 + 2(2t - 3)^2 + t^3 - 17t^2 + 39t - 18 \\ &= -2\{x - (2t - 3)\}^2 + t^3 - 9t^2 + 15t \leq t^3 - 9t^2 + 15t \end{aligned}$$

したがって、関数 $f(x)$ の最大値は $(t^3 - 9t^2 + 15t)$

(2)

$$g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$$

$$g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t - 5)(t - 1)$$

図1のように $g(t)$ が変化するので、 $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき、 $g(t)$ の最小値は -25 。

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	5			
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	$\frac{-18-31\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-25	$\nearrow$

図1

<解説>

文系の問題としても容易な2次関数，3次関数の問題だから，すらすら解けるだろう。

(1)

2次関数の変形は常套的方法だ。

(2)

3次関数の変化や極値を求める常套的方法だ。

第 2 問

(3)を除いて，理科の第2問に同じ。

<解答>，<解説>は理科第2問を参照のこと。

第 3 問 (理科第2問と同じ)

座標平面の原点をOで表す。

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点Pと，線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-3 \leq x \leq 0$) 上の点Q が，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く。このとき，線分PQの通過する領域を D とする。

(1) s を $-3 \leq s \leq 2$ をみたす実数とすると，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

理科の第6問と変数の範囲を除いて同じ問題。

理科では，「線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$)」，「 s を $0 \leq s \leq 2$ をみたす実数」，となっている。

一通り，解答を記載する。

<解答>

点Pの座標を $(x_P, y_P) = (x_P, \sqrt{3}x_P)$ ，点Qの座標を $(x_Q, y_Q) = (x_Q, -\sqrt{3}x_Q)$ とする。

$OP = 2x_P$ ， $OQ = -2x_Q$ だから， $OP + OQ = 2x_P - 2x_Q = 6$ ， $\therefore x_P - x_Q = 3$

点Pは $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上にあるので， $OP = 2x_P \leq 4$ かつ $OQ = -2x_Q \leq 6$ だから， $0 \leq 2x_P \leq 4$ ， $\therefore 0 \leq x_P \leq 2$

線分PQの方程式は

$$y - \sqrt{3}x_P = \frac{\sqrt{3}x_P + \sqrt{3}x_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P) = \frac{\sqrt{3}(2x_P - 3)}{3}(x - x_P)，したがって$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x_P - 3)x - \frac{2}{\sqrt{3}}(x_P - 3)x_P \quad (0 \leq x_P \leq 2) \quad \textcircled{1}$$

加えて，線分PQは明らかに線分OP，OQより上にあるから，

$$y \geq \sqrt{3}x \quad (0 \leq x \leq 2)，y \geq -\sqrt{3}x \quad (-3 \leq x \leq 0) \quad \textcircled{2}$$

①, ②を満足する (x, y) が領域 D である。

①で $x=s, y=t$ として, $-3 \leq s \leq 2$ のときの t の範囲を考える。

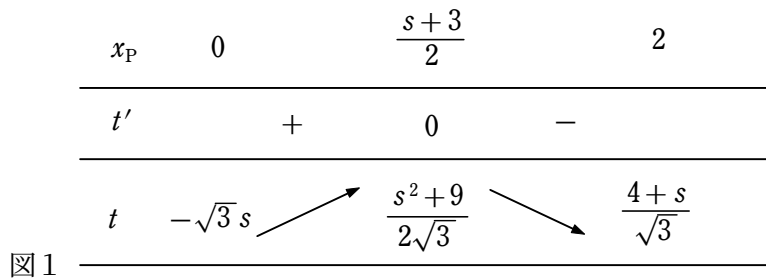
$$t = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x_P - 3)s - \frac{2}{\sqrt{3}}(x_P - 3)x_P \quad (0 \leq x_P \leq 2) \quad ③$$

③において, x_P で微分すると, $t' = -\frac{4}{\sqrt{3}}x_P + \frac{2\sqrt{3}}{3}s + 2\sqrt{3}$, $t'=0$ とすれば, $x_P = \frac{s+3}{2}$

したがって, ③は $x_P = \frac{s+3}{2}$ のとき最大値 $\frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$ をとる。

しかるに, $-3 \leq s \leq 2$ だから $0 \leq \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$, 一方 $0 \leq x_P \leq 2$ だから,

(i) $0 \leq \frac{s+3}{2} \leq 2$, すなわち, $-3 \leq s \leq 1$ のとき, t は図1のような変化をする。



②から, $t \geq \sqrt{3}s$ ($0 \leq s \leq 1$), $t \geq -\sqrt{3}s$ ($-3 \leq s \leq 0$), したがって

$$-3 \leq s \leq -1 \text{ のとき, } -\sqrt{3}s \geq \frac{4+s}{\sqrt{3}} \text{ だから, } -\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} \quad ④$$

$$-1 < s \leq 0 \text{ のとき, } -\sqrt{3}s < \frac{4+s}{\sqrt{3}} \text{ だから, } -\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} \quad ⑤$$

$$0 < s \leq 1 \text{ のとき, } -\sqrt{3}s < \sqrt{3}s < \frac{4+s}{\sqrt{3}} \text{ だから, } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}} \quad ⑥$$

まとめると, D に入る点 (s, t) は, ④, ⑤, ⑥である。

(ii) $2 < \frac{s+3}{2}$, すなわち, $1 < s \leq 2$ のとき

$0 \leq x_P \leq 2$ で t は単調増加だから, $-\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{4+s}{\sqrt{3}}$ である。

一方, ②から $1 < s \leq 2$ では, $\sqrt{3}s \leq t$ だから,

$$D \text{ に入る点}(s, t) \text{ は, } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{4+s}{\sqrt{3}} \quad (1 < s \leq 2) \quad ⑦$$

(2)

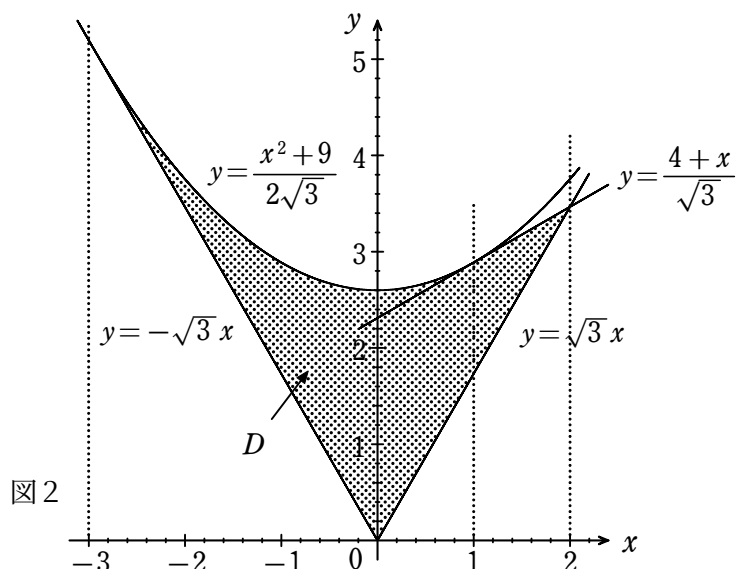
(1)の結果から, D を求める。 s を x に, t を y に置き換える。

$$④, ⑤ \text{ から, } -3 \leq x \leq 0 \text{ のとき, } -\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$$

$$⑥ \text{ から, } 0 < x \leq 1 \text{ のとき, } \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$$

⑦から、 $1 < x \leq 2$ のとき、 $\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{4+x}{\sqrt{3}}$

D を図示すると図2のハッチ部になる。境界線を含む。



<解説>

題意は簡明であり、解答方針の着想や計算に難しさはない。ただ、問題文の表現にやや戸惑いを感じさせるものがあるので、注意したい。

(1)

この問題は単純に「線分PQの通過する領域 $D(x, y)$ の y の範囲を求めよ」となっていれば、分かり易い。点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ、と敢えて難しそうな言い換え表現が混乱を誘うかも知れない。③式で t を x_P の2次関数とみて、 x_P が変化するときの変化を考えるのがこの問題のポイントである。

(2)

(1)で「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」を問うていながら、今度は「 D を図示せよ」だから、 $D(x, y)$ を描かなければならない。(1)の「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」を描いては駄目である。ややひっかけ問題のような気がする。恐らく、そのように描いてしまった受験生もいることだろう。

なぜ、少々底意地が悪いような「点 (s, t) が D に入るような t の範囲」などとして、誤りを誘うような出題なのだろう。同じことを数学的に表現を変えても、混乱せずにしっかり理解できるかを問うて、数学的論理力を試そうとしたのかも知れない。

以上は理科で書いた解説と同じ。さらに付け加えるならば、変数の範囲が $-3 \leq x \leq 2$ と非対称であって、理科よりも扱いが煩瑣になっている。粘り強く取り組むことが必要であろう。

第 4 問

(4)を除いて，理科の第5問に同じ。

＜解答＞，＜解説＞は理科第5問を参照のこと。

＜総評＞

例年同様，文系の数学としては難しい問題が含まれている。

第1問

難易度はCだから，完答したい。

第2問

例年の確率の問題に比して容易だろう。文系の問題としては手頃かも知れない。難易度はB。

第3問

理系とほぼ同じ問題。変数の範囲が非対称なので，理系よりも取扱いが煩瑣かも知れない。文系の問題として，難易度はA－。

第4問

理系の問題から，難問の(4)を除いたもの。大きな困難はないだろう。難易度はA－。

140720