平成27年度入学試験問題

数　学（理系）

200点満点

≪配点は，学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに16ページある．
3. 問題は全部で6題ある（1ページから2ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書くこと．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

(30 点)

2つの関数 $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

ただし，$x = 0$ と $x = \dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

2

(30 点)

次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である．

(b) 半径1の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう．

3

(35 点)

(1) a を実数とするとき，$(a, 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ．

(2) $a_1 = 1$ として，$n = 1, 2, \ldots$ について，$(a_n, 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\lim_{n \to \infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

4 (35 点)

一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

5 (35 点)

a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

6 (35 点)

2つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \qquad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0 = \dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n = 1, 2, \ldots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n < \dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

問題は，このページで終わりである．