2015（H27)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）

200点満点，150分

$\boxed{1}$ (30点)

２つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

＜解答＞

図１を参照する。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における，$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ の交点の x 座標は，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$ として

$2x=x+\dfrac{\pi}{8}$ から $x=\dfrac{\pi}{8}$，$2x=\pi-\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ から $x=\dfrac{7\pi}{24}$

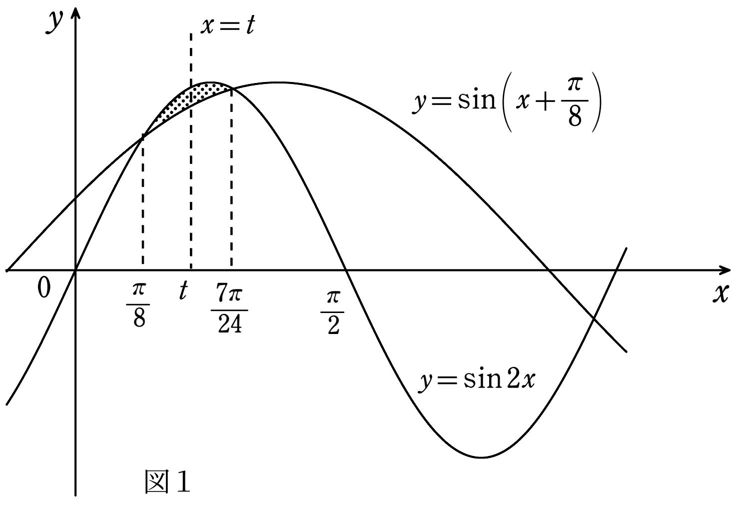

図１

２つのグラフに囲まれる領域を x 軸のまわりに１回転させてできる立体を $x=t$ の x 軸に垂直な平面で切るとその断面は同心円で，内径 $r_i=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{8}\right)$，外径 $r_o=\sin 2t$ である。

したがって，その面積は $S=\pi({r_o}^2-{r_i}^2)$，また微小な厚さ Δt での体積は $\Delta V=\pi({r_o}^2-{r_i}^2)\Delta t$

したがって体積 $V=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}\pi({r_o}^2-{r_i}^2)dt=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}\left(\sin^2 2t-\sin^2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)\right)dt$

$\int\sin^2 2tdt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 4t)dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\sin 4t$

$\int\sin^2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)$

$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}\left(\sin^2 2t-\sin^2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)\right)dt=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin 4t+\sin 2\left(t+\frac{\pi}{8}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}=\frac{1}{16}$

体積$V=\frac{1}{16}\pi$　（答）

＜解説＞

$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$の解を求めることがポイントの一つである。

$2x=x+\frac{\pi}{8}$から，$x=\frac{\pi}{8}$は当然である。図を描いて，直感的に，$2x+\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\pi$を思いつくと良い。

下記のような計算を暗算的に実行できると良い。三角関数の公式を利用する。

$$\sin 2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{1}{2}\left\{2x+\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}\sin\frac{1}{2}\left\{2x-\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{1}{2}\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$だから，$0\leqq\frac{1}{2}\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)\leqq\frac{13\pi}{16}$，$0\leqq\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\leqq\frac{3\pi}{16}$

$\cos\frac{1}{2}\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=0$となるのは，$\frac{1}{2}\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ x=\frac{7\pi}{24}$

$\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=0$となるのは，$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=0$，$\therefore\ x=\frac{\pi}{8}$

$\boxed{2}$ （30点）

次の２つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくも２つの内角は90°である。

(b) 半径1の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の４つの辺すべてに接することをいう．

＜解答＞

図１のように，２つの内角が90°の四角形には，対角が90°の場合と，隣角が90°の場合の２つの場合がある。いずれも，四角形の面積Sは，他の１つの内角をθとすれば,

$$S=2+\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\pi-\theta}{2}}=2+\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\frac{\theta}{2}=2+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=2+\frac{2}{\sin\theta}$$

ただし，$0<\theta<\pi$で，$0<\sin\theta\leqq 1$である。

したがって，S は$\sin\theta$が最大値 1のときに最小値 4 になる.

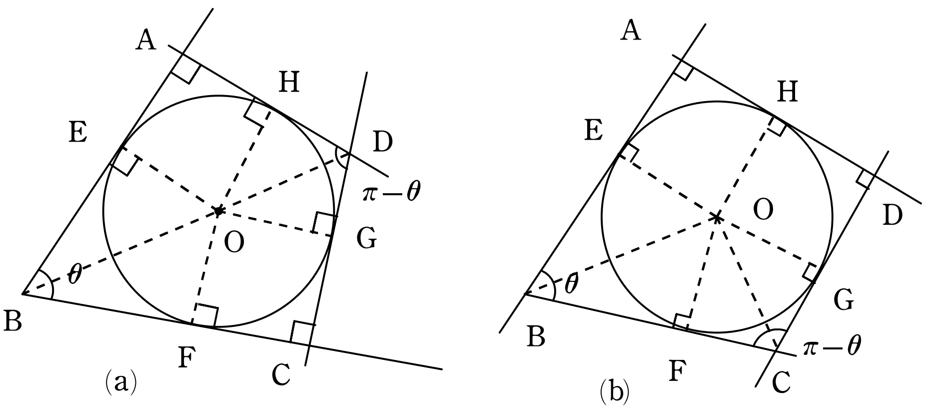

図１

<解説>

図１のような図を描いて考える。対角が90°の場合と隣角が90°の場合があることに気づく。しかし，両者とも四角形の面積は同じ表現になる。OE=1だからEB=$\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$，$\triangle$OEB $\equiv$ $\triangle$OFBだから，

四角形OEBFの面積は$\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$である。

$\boxed{3}$ (35点)

(1) aを実数とするとき，$(a\ ,\ 0)$を通り，$y=e^x+1$に接する直線がただ１つ存在することを示せ.

(2) $a_1=1$として，$n=1, 2, ...$ について，$(a_n\ ,\ 0)$を通り，$y=e^x+1$に接する直線の接点のx座標をa_{n+1}とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$を求めよ.

<解答>

(1)

$y=f(x)=e^x+1$ とおく。

$f(x)$上の点$(b\ ,\ e^b+1)$と$(a\ ,\ 0)$を通る直線は，$y=\dfrac{e^b+1}{b-a}(x-a)$

点$(b,\ e^b+1)$における$f(x)$の傾きは$f'(b)=e^b$

したがって $\dfrac{e^b+1}{b-a}=e^b$ であれば，$y=\dfrac{e^b+1}{b-a}(x-a)$ は点$(b,\ e^b+1)$における$f(x)$の接線である。

すなわちaが与えられたとき，$\dfrac{e^b+1}{b-a}=e^b$　①

を満足する実数bがただ１つ定まれば，$(a\ ,\ 0)$を通り，$y=e^x+1$に接する直線がただ１つ存在することになる。

①を変形して $a=g(b)=b-1-e^{-b}$　②　とおく。

$g'(b)=1+e^{-b}>0$，したがって$g(b)$は単調増加関数，また $\lim_{b\to-\infty} g(b)=-\infty$，$\lim_{b\to\infty} g(b)=\infty$ だから，

実数aに対して，②を満足する実数b_aがただ１つ定まる。すなわち，①を満足する実数bがただ１つ存在する。

したがって，aを実数とするとき，$(a\ ,\ 0)$を通り，$y=e^x+1$に接する直線がただ１つ存在する。

(2)

$(a_n\ ,\ 0)$を通り，$y=e^x+1$に接する直線は $y=\dfrac{e^{a_{n+1}}+1}{a_{n+1}-a_n}(x-a_n)$

接線の傾きについて $\dfrac{e^{a_{n+1}}+1}{a_{n+1}-a_n}=e^{a_{n+1}}>0$

$a_{n+1}-a_n=1+\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}>0$，したがって $a_1=1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1=a_{n+1}-1=n+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{e^{a_{k+1}}}$

したがって $a_{n+1}=n+1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{e^{a_{k+1}}}$，したがって $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty$

したがって $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}\right)=1$　（答）

<解説>

(1)

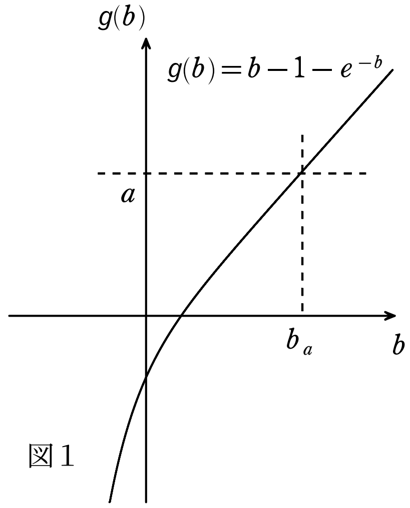

図１

証明の解答方針を考案することが必要だ。ここでは，

① $f(x)$上の点 と点$(a\ ,\ 0)$を通る直線の式を考える。

② その直線が$f(x)$の接線となる条件を考える。

③ ②を満たす$f(x)$上の点がただ１つ存在することを示す。

という論理の流れを考えた。

別解を考えよう。次のような証明の論理もあるだろう。

① 点$(a\ ,\ 0)$を通る直線の式を考える。

② ①の直線と$f(x)$の交点を考える。

　交点のx座標は①式と$f(x)$の連立方程式の解である。

③ 上記の解が重解である条件を考える。重解がただ１つ存在するならば，その直線は$f(x)$のただ１つの接線である。

点$(a\ ,\ 0)$を通る直線の式を $y=k(x-a)$ とおく。

$h(x)=f(x)-k(x-a)=e^x+1-k(x-a)=0$ の解が$y=f(x)$と$y=k(x-a)$の交点のx座標である。

$h'(x)=e^x-k=0$ とおけば，$e^x=k$，$\therefore\ x=\log k$，ただし$k>0$でなければならない。

図２に$h(x)$ の変化を示す。$h(x)$ は下に凸の曲線であることが解る。したがって，
$h(\log k)\leqq 0$ ならば $h(x)=0$ は実数解をもち，$h(\log k)=0$ ならば重解をもち，$h(x)$は$y=0$ に接する。
$h(\log k)=k+1-k(\log k-a)=0$，$a=\log k-1-\dfrac{1}{k}$，$k=e^b$ とおけば $a=b-1-e^{-b}$ となって，上記解答と同じ②式となる。すなわち，実数a に対して，$h(x)=0$が重解をもつただ１つのb，すなわちk が定まり，ただ１つの接線が存在することになる。

x		$\log k$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

図２

(2)

$a_{n+1}-a_n=1+\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}$ は容易に求まる。ひと目みて，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=1$と推測される。しかし，
$\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}$ を無視するわけにはいかない。a_{n+1} そして$\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}$ が $n\to\infty$ でどうなるかを考える。幸い，
$a_{n+1}-a_n$の表式から容易に$n\to\infty$で $a_{n+1}\to\infty$となることを示すことができる。

4

(35点)

一辺の長さが1の正四面体ABCDにおいて，Pを辺ABの中点とし，点Qが辺AC上を動くとする．このとき，cos∠PDQの最大値を求めよ．

＜解答＞

(x,y,z) の３次元座標系において△ABC を(x,y) 平面内にとり，点D をz 軸正方向にとる。
z 軸正方向から見た(x,y) 平面内の正四面体ABCD の各頂点の位置と座標を図１に示す。

点Qのx 座標をt とする。ただし $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$である。

$$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QD}=\mathrm{PD}\cdot\mathrm{QD}\cos\angle\mathrm{PDQ},\ \therefore\ \cos\angle\mathrm{PDQ}=\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QD}}{PD\cdot QD}$$

$$\overrightarrow{PD}=\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \overrightarrow{QD}=\left(\frac{1}{2}-t,\sqrt{3}t-\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QD}=1-\frac{t}{2},\ \mathrm{PD}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{QD}=\sqrt{4t^2-6t+3}$$

$$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\frac{2-t}{\sqrt{3}\sqrt{4t^2-6t+3}},\ (\cos\angle\mathrm{PDQ})^2=\frac{(2-t)^2}{3(4t^2-6t+3)}$$

$f(t)=\dfrac{(2-t)^2}{(4t^2-6t+3)}$とおく。$f'(t)=\dfrac{2(t-2)(5t-3)}{(4t^2-6t+3)^2}$

$f(t)$は図２のように変化するから，$t=\dfrac{3}{5}$で最大値$f\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{7}{3}$となる。

したがって，　$(\cos\angle\mathrm{PDQ})^2$の最大値は$\dfrac{7}{9}$，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値は$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　（答）

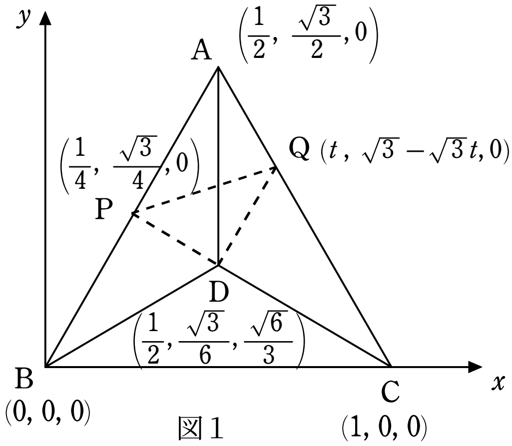

図１

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

図２

＜解説＞

ここではベクトルとその内積を利用した解法を示した。コサインの値を求めるといえば，まずは余弦の定理の応用が頭に浮かぶ。別解を示そう。

図３を参照する。

余弦の定理により$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{PD^2+QD^2-PQ^2}{2PD\cdot QD}$

AQ$=t$とする。ただし，$0\leqq t\leqq 1$である。

$\mathrm{PD}^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$，余弦の定理により $\mathrm{QD}^2=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{QAD}=t^2+1-t$

余弦の定理により $\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{1}{4}+t^2-\dfrac{t}{2}$

したがって$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{3-t}{2\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}}$

$(\cos\angle\mathrm{PDQ})^2=\dfrac{(t-3)^2}{12(t^2-t+1)}$，$f(t)=\dfrac{(t-3)^2}{(t^2-t+1)}$とおく。$f'(t)=\dfrac{(t-3)(5t-1)}{(t^2-t+1)^2}$

$f(t)$は図４のように変化するから，$t=\dfrac{1}{5}$において最大値 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{28}{3}$をとる。

したがって，$(\cos\angle\mathrm{PDQ})^2$の最大値は$\dfrac{7}{9}$，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$の最大値は$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

ベクトルを利用する方法を先に思いついたので書いたが，こちらの方が容易なのでお勧めする。

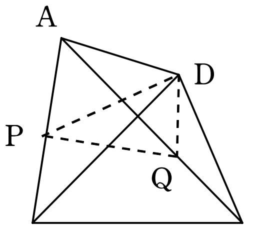

図3

t	0		$\frac{1}{5}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

図4

$\boxed{5}$ (30点)

a, b, c, d, e を正の実数として整式

$f(x)=ax^2+bx+c$

$g(x)=dx+e$

を考える．すべての正の整数n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は$g(x)$で割り切れることを示せ．

<解答>

$f(x)=ax^2+bx+c=(dx+e)(px+q)+r=dpx^2+(dq+ep)x+eq+r$とおくことができる。

ここで，$a=dp$，$b=dq+ep$，$c=eq+r$。また p, q, r は正の実数である。

$\dfrac{f(n)}{g(n)}=\dfrac{an^2+bn+c}{dn+e}=\dfrac{(dn+e)(pn+q)+r}{dn+e}=pn+q+\dfrac{r}{dn+e}=m$，ただし$m$は整数

したがって，p, q, r は無理数ではない。すなわち正の有理数である。

整数n_1，n_2において

$\dfrac{f(n_1)}{g(n_1)}=pn_1+q+\dfrac{r}{dn_1+e}=m_1$，　$\dfrac{f(n_2)}{g(n_2)}=pn_2+q+\dfrac{r}{dn_2+e}=m_2$

$m_2-m_1=p(n_2-n_1)+r\left(\dfrac{1}{dn_2+e}-\dfrac{1}{dn_1+e}\right)$

正の有理数p に対して，適当な整数 (n_2-n_1) を選ぶことによって，$p(n_2-n_1)$を整数にすることができる。このとき，$r\left(\dfrac{1}{dn_2+e}-\dfrac{1}{dn_1+e}\right)$は整数か 0でなければならない。しかし十分大きな整数n_1，n_2に対して，$r\left(\dfrac{1}{dn_2+e}-\dfrac{1}{dn_1+e}\right)<0$である。したがって，$r\left(\dfrac{1}{dn_2+e}-\dfrac{1}{dn_1+e}\right)=0$，$\therefore\ r=0$

すなわち，$f(x)=ax^2+bx+c=(dx+e)(px+q)+r=g(x)(px+q)$となり，$f(x)$ は$g(x)$で割り切れる。

<解説>

「$f(x)$ は$g(x)$で割り切れる」とは何をいうのか，これをを的確に理解しておかなければ，前へ進めない。$f(x)$はxの2次式，$g(x)$は1次式だから，これは$f(x)$が$g(x)$と1次式の積で表されるということを意味する。すると，$f(x)=ax^2+bx+c=(dx+e)(px+q)+r$とおいたとき，$r=0$であることを証明することになる。

$r=0$であることを証明するには，上記に示した以外にいろいろな手法が考えられる。読者自ら考えてほしい。

$\boxed{6}$ (35点)

２つの関数を

$$f_0(x)=\frac{x}{2},\quad f_1(x)=\frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,2,...$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

<解答>

数直線上で $\dfrac{x}{2}$ は0と x の中点，$\dfrac{x+1}{2}$ はxと1の中点だから，$x_0=\dfrac{1}{2}$から始めると，$0<x_n<1$である。そこで，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$となる確率をA_{n-1}，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$となる確率を$B_{n-1}$，$\dfrac{2}{3}\leqq x_{n-1}<1$となる確率を$C_{n-1}$ とする。$x_0=\dfrac{1}{2}$ だから，$A_0=0$，$B_0=1$，$C_0=1$である。

$f_0(0)=0$，$f_1(0)=\dfrac{1}{2}$，$f_0\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$，$f_1\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，$f_0\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，$f_1\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$，$f_0(1)=\dfrac{1}{2}$，$f_1(1)=1$ だから，x_{n-1} からx_n への変化の確率は，各区間について図１のようになる。

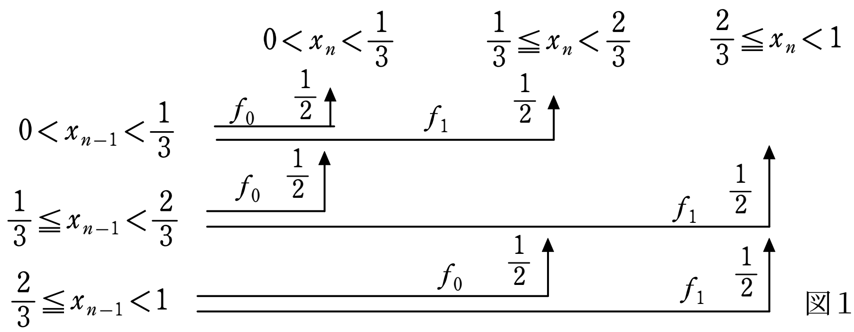

図１

したがって，

$A_n=\dfrac{1}{2}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}B_{n-1}$　①

$B_n=\dfrac{1}{2}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}C_{n-1}$　②

$C_n=\dfrac{1}{2}B_{n-1}+\dfrac{1}{2}C_{n-1}$　③

$A_{n-1}+B_{n-1}+C_{n-1}=A_n+B_n+C_n=1$

②を変形すると，$B_n=\dfrac{1}{2}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}C_{n-1}=\dfrac{1}{2}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}(1-A_{n-1}-B_{n-1})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}B_{n-1}$

$B_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(B_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$, $\therefore B_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(B_0-\frac{1}{3}\right)$, $\therefore B_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$

①−③から，$A_n-C_n=\frac{1}{2}(A_{n-1}-C_{n-1})$, $\therefore A_n-C_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(A_0-C_0)=0$, $\therefore A_n=C_n$

したがって，②から$B_n=A_{n-1}$，$\therefore A_n=B_{n+1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}$

$P_n=A_n+B_n=B_{n+1}+B_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ （答）

<解説>

変数の範囲に関する確率の問題である。そこで，まずは変数の範囲を考える必要がある。$x_0=\frac{1}{2}$から始めて変化を追うと，直感的に$0<x_{n-1}<1$ではないかと気づく。きちんと説明しておくことが必要である。

試行がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$ または $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+1)$ である。数直線上で考えると，$\frac{1}{2}x_{n-1}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+0)$ だからx_n はx_{n-1} と0 の中点，x_n はx_{n-1} と1 の中点である。すると $0<x_{n-1}<1$ であれば，$0<x_n<1$であることは明らかである。$x_0=\frac{1}{2}$だから，$0<x_{n-1}<1$である。以上のことは，数学的帰納法によって証明されるのだが，ここでは上記のような説明で十分であろう。

次に $x_{n-1}<\frac{2}{3}$ の変数がn回目の試行でどのような範囲に含まれるかを考える必要がある。$x_{n-1}=\frac{2}{3}$がf_0によって$x_n=\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$になること，$f_1$によって$x_n=\frac{5}{6}>\frac{2}{3}$になること，$x_{n-1}=\frac{1}{3}$が$f_0$によって$x_n=\frac{1}{6}<\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$になること，$f_1$によって$x_n=\frac{2}{3}$になることなどをチェックすると，$0<x_{n-1}<\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\leqq x_{n-1}<1$の場合について，変数の存在確率の変化を考えてはどうかという着眼に至る。

それをn 回目の試行で確かめてみると，図１に示したように，f_0，f_1の試行によって，それらの範囲の変数はすべて，まとまってそれらの範囲に移行することが解る。したがって，x_n がそれらの範囲に存在する確率の漸化式を設定できることが解る。

確率漸化式が表現されたら，それらを上手に解くことが必要である。漸化式を凝視して，足し算，引き算を頭の中で行って，数列の一般項を求める手がかりを得る。ここでは，B_n，B_{n-1} のみを含む表式が得られるから，B_n の一般表式を求めることができる。次に$A_n=C_n$を導くことがポイントである。

<理系総評>

各分野にわたり骨のある問題が揃っている。限られた時間の中で，得点を上げるためには，問題の解答順序が重要になる。容易なものから，得意分野から手をつけたいと思うのは，誰しも同じだろう。

まずは，１から６までの問題をざっと読み込んで分野や題意を理解し，難易（求められる着眼や着想，思考量，計算量など）をざっと見積もってみたい。すると着手する順序をおよそ浮かんでくるだろう。

私は$\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$の順序で着手したいと思った。最初に着手した問題を30分ほどで完答できれば，気持ちも落ち着いて，順調に解答を続けることができるだろう。$\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$は完答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$は少なくも部分点を獲得して，全体として80%以上の得点を狙いたいところだ。

$\boxed{1}$

曲線のグラフに囲まれた図形を軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めるという積分問題である。入試によく出題される。この問題は考え方も計算も容易だから，完答したい。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

題意は簡明であり，表式化や計算も煩瑣なものではない。着実に完答したい。難易度Ｃ。

$\boxed{3}$

解答方針の着想が必要だが，難しい要求ではない。ただし，ただ１つ存在するということの証明はきちんとしなければならない。その論理の流れをつくることに本問の課題がある。計算は容易である。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$

題意は簡明であり，表式化や計算も煩瑣なものではない。余弦の法則など基礎的事項を的確に覚えていなければならない。着実に完答したい。難易度Ｃ。

$\boxed{5}$

解答方針の着想が必要で，それを表式化して，証明すべきことを具体的に明らかにすることが必要である。ここでの表式化は常套的な手法だから，難しいものではない。証明の手法も，いろいろな機会に知るものだから，気づいてほしい。$ax^2+bx+c=0$ がすべての実数xで成立するなら，係数a，b，cは0である。ということを証明するときに使うような手法である。難易度Ａ－。

$\boxed{6}$

確率漸化式の問題は，解答方針の着眼，着想が必要で，表式に至る論理の構想，数列の一般項の計算など，数学力の高低を問うのに好適である。この種の問題が入試に頻出されるのは，読者もよく知っていることだろう。

今年の問題は，昨年に比して難しいと思われる。確率的に変化する変数がある範囲に存在する確率を求めるという従来にない問題だからである。存在する範囲の場合分けを考案しなければならないところに難しさがある。計算は難しくはない。難易度はＡ。

151015

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$

(30点)

直線$y=px+q$が，$y=x^2-x$ のグラフと交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような$(p\,,\,q)$の範囲を図示し，その面積を求めよ．

<解答>

$y=px+q$ のグラフと$y=x^2-x$ のグラフが交わるためには，二次方程式$x^2-x=px+q$ が実数解を

もつ必要がある。

$x^2-(1+p)x-q=0$の解の判別式は，　$D=(1+p)^2+4q\geqq 0$，$\therefore\ q\geqq\dfrac{-(1+p)^2}{4}$　①

$y=|x|+|x-1|+1$ は，図１に示すように

（ｉ）$x<0$では，$y=-x-x+1+1=-2x+2$　②

（ii）$0\leqq x<1$では，$y=x-x+1+1=2$　③

(iii) $1\leqq x$ では，$y=x+x-1+1=2x$　④

$y=px+q$ は$(0,q)$を通るので，$y=|x|+|x-1|+1$と交わらないためには，$q<2$　⑤

②と交わらないためには，$p\geqq -2$　⑥

③と交わらないためには，$p<2-q$　⑦

④と交わらないためには，$p\leqq 2$　⑧

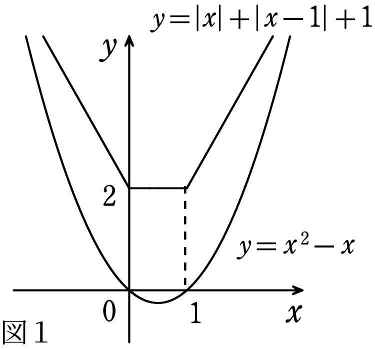

図１

以上，①，⑤，⑥，⑦，⑧によって定める(p,q)の範囲を打点部として図２に示す。ここで，$q=2$と$q=2-p$の線は含まない。

$$面積S=\int_{-2}^{0}\left\{2-\frac{-(p+1)^2}{4}\right\}dp+\int_{0}^{2}\left\{(2-p)-\frac{-(p+1)^2}{4}\right\}dp$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{p^3}{3}+p^2+9p\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{4}\left[\frac{p^3}{3}-p^2+9p\right]_{0}^{2}=\frac{25}{3}\quad（答）$$

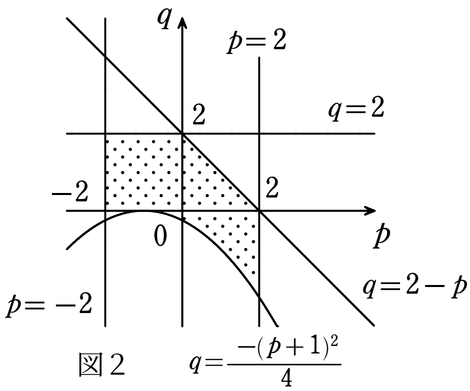

図２

<解説>

$y=x^2-x$ と$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフを描いて考える。$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフはxの範囲によって変わることは容易に理解できる。

$\boxed{2}$　(30点)

理系の$\boxed{2}$に同じ。

$\boxed{3}$　(30点)

６個の点A，B，C，D，E，Fが下図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n=0$，2，4について，$X=n$ となる確率を求めよ．

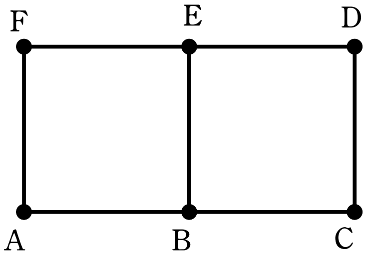

図１

＜解答＞

AからEに至る経路は，以下の３種類

ABE（経路長2）

AFE（〃　　）

ABCDE（経路長4）

経路長2は最短の経路だから，$X=2$ は少なくも経路ABE，AFEのいずれかが赤となる場合

経路ABEが赤となるのはAB，BEが赤の場合だから，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

AFEが赤となる確率は同様に $\left(\frac{1}{2}\right)^2$，経路ABEとAFEともに赤となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

したがって，$X=2$ となる確率 $p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{16}$　（答）

$X=4$ とは，経路ABCDEが赤で，他に長さが3以下の赤の経路がない場合だから

経路ABCDEが赤かつBEが黒，かつAFとFEが同時に赤にならない場合だから，

経路ABCDEが赤かつBEが黒の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}$，AFとFEが同時に赤にならない確率は $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$p_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{128}$　（答）

$X=0$ とは，$X=2$，4ではない場合だから，$p_0=1-p_2-p_4=1-\frac{7}{16}-\frac{3}{128}=\frac{69}{128}$　（答）

＜解説＞

$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4$ で，$\left(\frac{1}{2}\right)^4$ を引くのは，経路ABEとAFEともに赤となる確率を，経路ABEが赤になる確率と経路AFEが赤になる確率の両方に含んでいるからである。2回数えているので，1回分を引くのである。

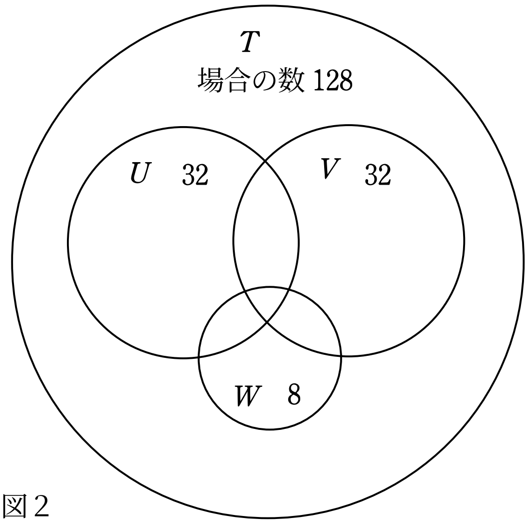

図２

別解を示す。

7 本の線分，すなわちAB，BC，CD，DE，EF，FA が赤か黒に塗られる場合の全集合をTとする。その場合の数は$\{T\}=2^7=128$である。

経路 ABE が赤だけとなる場合の集合をUとして，$\{U\}=2^5=32$

経路 AFE が赤だけとなる場合の集合をVとして，$\{V\}=2^5=32$

経路 ABCDE が赤だけとなる場合の集合をWとして，$\{W\}=2^3=8$

$\{U\cap V\}=2^3=8$，$\{U\cap W\}=2^2=4$，$\{V\cap W\}=2^1=2$，$\{U\cap V\cap W\}=1$

これらの集合の関係を図２に示す。

$X=0$とは，この経路の中に，赤だけで塗られた経路が存在しないことである。

そのような場合は，$T-(U\cup V\cup W)$

$$(U\cup V\cup W)=(U+V+W)-(U\cap V+U\cap W+V\cap W)+U\cap V\cap W$$

$$\{(U\cup V\cup W)\}=\{(U+V+W)-(U\cap V+U\cap W+V\cap W)-U\cap V\cap W\}$$

$$=(32+32+8)-(8+4+2)+1=59$$

したがって，$\{T-(U\cup V\cup W)\}=128-59=69$，したがって，$X=0$となる確率は$\dfrac{69}{128}$　（答）

$X=2$とは，少なくも経路ABE，AFE のいずれかが赤の場合だから，場合の集合は$U\cup V$

$\{U\cup V\}=\{U\}+\{V\}-\{U\cap V\}=32+32-8=56$，したがって$X=2$となる確率は$\dfrac{56}{128}=\dfrac{7}{16}$　（答）

$X=4$ とは，経路ABCDE が赤で，他に長さが3 以下の赤の経路がない場合だから，場合の集合は$W-(U\cap W+V\cap W)$となり，$\{W-(U\cap W+V\cap W)\}=8-(2+4)+1=3$

したがって$X=4$となる確率は$\dfrac{3}{128}$　（答）

このように場合の数を数えて，確率を求めた。もちろん，確率とは場合の数の比率だから，本質的に別の方法だというわけではない。

$\boxed{4}$ (30点)

xyz 空間の中で，$(0,0,1)$ を中心とする半径1の球面 S を考える．点Q が$(0,0,2)$以外の S 上の点を動くとき，点Q と点 P$(1,0,2)$の 2点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点をR とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

＜解答＞

点Q を(x_Q, y_Q, z_Q)とおけば，$x_Q{}^2+y_Q{}^2+(z_Q-1)^2=1$　①

$\overrightarrow{PQ}=(x_Q-1, y_Q, z_Q-2)$だから，点Rを$(x_R, y_R, z_R)=(x_R, y_R, 0)$とし，$t$ を$\neq 0$ の 実数として

$\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}=t(x_Q-1, y_Q, z_Q-2)=(x_R-1, y_R, z_R-2)=(x_R-1, y_R, -2)$

したがって，$t(x_Q-1)=x_R-1$，$ty_Q=y_R$，$t(z_Q-2)=-2$

$x_Q=\dfrac{x_R-1}{t}+1$，$y_Q=\dfrac{y_R}{t}$，$z_Q=2-\dfrac{2}{t}$を①に代入して，

$(x_R-1+t)^2+y_R{}^2+(t-2)^2=t^2$，$t$ について整理すると，

$t^2+2(x_R-3)t+(x_R-1)^2+y_R{}^2+4=0$　②

t の2次方程式 ② において，t が実数値をとることができるためには，解の判別式

$D=(x_R-3)^2-\{(x_R-1)^2+y_R{}^2+4\}\geqq 0$，$\therefore\ x_R\leqq -\dfrac{1}{4}y_R{}^2+1$

したがって，点R$(x_R, y_R, 0)$ の動く範囲は，$z=0$ の (x, y) 平面内で，図1の打点部である。

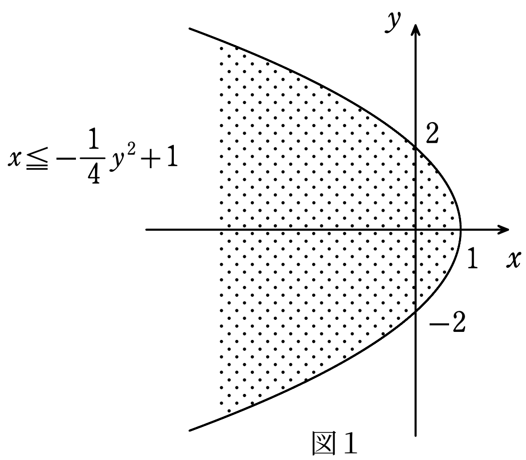

図1

＜解説＞

ベクトルを用いて，$\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$とおいて考えることがポイントである。すると，$(x_Q, y_Q, z_Q)$を$(x_R, y_R, z_R)$によって表すことができる。すると，$(x_R, y_R)$は$t$ の2次方程式の係数となるから，t が実数解をもつために，(x_R, y_R)に条件が課せられることが解る。

$\boxed{5}$ (30点)

理系の $\boxed{5}$ に同じ。

<文系総評>

問題数５問で120 分150点満点の数学入試は，文系受験者にとってなかなか厳しいのではないか。東大文科は問題数４問で100 分80 点満点である。理科が6 問で150 分120 点満点であるから，東大文科の数学の配点は理科の$\frac{2}{3}$である。京大ではこの比率が$\frac{3}{4}$である。京大の方が文系における数学の比重が高いように思える。

文系の問題としては例年同様に頭を絞る問題が揃っている。私ならば，$\boxed{2}$，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{3}$ の順で取り組みたい。前３問は完答し，後２問は部分点を獲得して，80%以上の得点を得たい。

$\boxed{1}$

題意は簡明だから，着実に正答したい。難易度Ｂ－

$\boxed{2}$

理系の問題の $\boxed{2}$ と同じ。文系の問題としては難易度Ｂ－

$\boxed{3}$

確率の問題で一見容易なようだが，紛らわしいところがあり，ミスが誘発されやすい。文系の問題としては，正答率が低いのではないか。難易度Ｂ＋。

$\boxed{4}$

題意は簡明であり，実数解の存在する範囲を求める問題に帰着するから，着実に正答したい。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

理系の問題の $\boxed{5}$ と同じ。文系の問題としてはなかなか難しい。難易度Ａ。

151026