平成27年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で5ページある。(落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。)

　別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科により解答すべき問題(○印)，解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題(○印)					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科，物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部(化学科，生物学科，自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4枚	90分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5, \qquad 4\,\overrightarrow{\mathrm{AG}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{BG}} + 5\,\overrightarrow{\mathrm{CG}} = 12\,\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $\mathrm{A}(a, b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする。点 $\mathrm{B}(0,-2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接点をそれぞれ $\mathrm{P}(p, f(p))$，$\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする。ただし $p<q$ である。放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2) 面積 S を b を用いて表せ。

(3) 点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 (a, b) を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める。

(i) $a_1 = 0,\ a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \qquad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \qquad (n \text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0 < x \leqq 1$ のとき $x - \dfrac{x^3}{3\,!} < \sin x < x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{x^4}{4\,!} \leqq f_1(x) - \cos x \leqq \frac{x^4}{4\,!}$$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)\,!} \leqq f_{2m-1}(x) - \cos x \leqq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)\,!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。