2015（H27）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理・医・歯・工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$　整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$を$x-1$で割ったときの商を求めよ。

(2) ３次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) ３次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。。

＜解答＞

(1)

$P(x)=x^3-ax^2+ax-1=(x-1)(x^2+bx+c)=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$とおく。

$b-1=-a$，$c-b=a$，$c=1$，$b=1-a$，$\therefore\ P(x)=(x-1)(x^2+bx+c)=(x-1)\{x^2+(1-a)x+1\}$

(2)

$P(x)=0$が虚数解をもつとすれば，２次方程式 $x^2+(1-a)x+1=0$が虚数解をもつ。

虚数解をもつためには，解の判別式$D=(1-a)^2-4<0$，$\therefore\ -1<a<3$

これを満たす整数は０，１，２　（答）

(3)

$P(x)=(x-1)\{x^2+(1-a)x+1\}=0$ の整数解を$x=1$，j，k とすれば

$x^2+(1-a)x+1=(x-j)(x-k)=0$だから，$j+k=a-1$　①，$jk=1$　②

②からj，$k=1$ またはj，$k=-1$

j，$k=1$のとき，①から $a=3$，j，$k=-1$のとき①から $a=-1$

$P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値は-1，3

＜解説＞

(1)

$P(x)$は3次式，$x-1$ は1次式だから，$P(x)$を$x-1$で割ったときの商は2次式となる。

(2)

2次方程式の虚数解，判別式の考え方は理解しておかなければならない。

(3)

解と係数の関係から求める方法を示した。この着想に至らない場合のために，別解を示す。

$x^2+(1-a)x+1=0$の実数解は，$\dfrac{1-a\pm\sqrt{D}}{2}$，ただし$D=(1-a)^2-4\geqq 0$　①

①から，$a\leqq -1$あるいは$a\geqq 3$，また整数解であるためには整数n によって，

$\sqrt{(1-a)^2-4}=\sqrt{(a+1)(a-3)}=n$でなければならない。$n^2=(a+1)(a-3)$　②

$n\fallingdotseq 0$のとき，$a-3<n<a+1$，$\therefore\ n=a-2$，$a-1$，a となるが，いずれも②を満たさない。

$n=0$のとき，$a=-1$，3 が②を満たす。すると，解は± 1となって，確かに整数となる。

以上によって，$P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値は-1，3

$\boxed{2}$ △ABCの外心をO，重心をGとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5\ ,\ 4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=12\overrightarrow{OG}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$を示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{OG}|$の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{AG}$，同様に $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{CG}$

したがって，$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=4(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{AG})+3(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{BG})+5(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{CG})$

$=12\overrightarrow{OG}-(4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG})=12\overrightarrow{OG}-12\overrightarrow{OG}=0$

(2)

$(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})\cdot\vec{a}=4\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=4|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ ①

同様に,

$(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})\cdot\vec{b}=4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{b}+5\vec{b}\cdot\vec{c}=75+4\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ②

$(4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c})\cdot\vec{c}=4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+5\vec{c}\cdot\vec{c}=125+4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ③

①，②，③から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-15$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$ （答）

(3)

Gは重心だから，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=25\times3-30-40=5=9|\overrightarrow{OG}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$ （答）

＜解説＞

ベクトルによって図形を扱う問題。ここでは，三角形の重心についての理解が必要だ。

(1)

$\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}$であることを利用する。

(2)

(1)の結果を利用する。$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$

(3)

重心Gについて，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$であることに気づかねばならない。数学Bの教科書に記載されている。

もし忘れていたらどうするか。図１を参照する。解答(1)に記載したことから,

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{CG}=3\overrightarrow{OG}-(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})$

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=0$ に直感的に気づくだろう。何となく三角形の重心とは，各頂点からのその点へのベクトルの和が0 になるような点と理解できそうだ。ここから先は各自で取り組んでほしい。

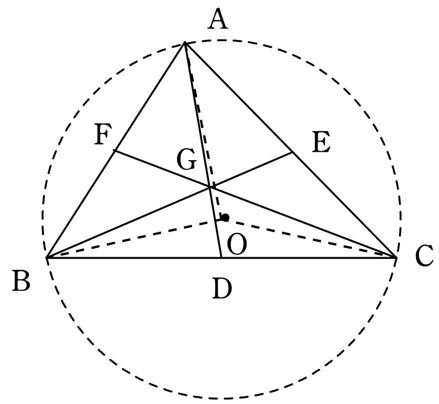

図１

$\boxed{3}$ 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点をA $(a\ ,\ b\ )$とし，$f(x)=(x-a)^2+b$とする。点B$(0\ ,\ -2\ )$から放物線$y=f(x)$ に引いた接線をl_1，l_2 とし，接点をそれぞれP$(p\ ,\ f(p))$，Q$(q\ ,\ f(q))$とする。ただし$p<q$である。放物線$y=f(x)$と2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積をSとする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l_1 の方程式と接点P の座標，および接線l_2 の方程式と接点Q の座標をa，bを用いて表せ。

(2) 面積 S をb を用いて表せ。

(3) 点A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点A の座標 $(a\ ,\ b)$ を求めよ。

<解答>

(1)

$f(p)=(p-a)^2+b$, $f'(x)=2(x-a)$, $f'(p)=2(p-a)$

接線l_1 の式は$y-f(p)=f'(p)(x-p)$, $\therefore\ y=2(p-a)(x-p)+(p-a)^2+b$

l_2 について同様に，$y=2(q-a)(x-q)+(q-a)^2+b$

接線 l_1，l_2 は点B$(0\ ,\ -2\ )$を通るので，$-2=-p^2+a^2+b$，$-2=-q^2+a^2+b$

$p<q$だから，$p=-\sqrt{a^2+b+2}$，$q=\sqrt{a^2+b+2}$

したがって，

$f(p)=(p-a)^2+b=(\sqrt{a^2+b+2}+a)^2+b=2a^2+2b+2+2a\sqrt{a^2+b+2}$

l_1：$y=2(p-a)(x-p)+(p-a)^2+b=-(\sqrt{a^2+b+2}+a)(2x+\sqrt{a^2+b+2}-a)+b$

$=-2(\sqrt{a^2+b+2}+a)x-2$　（答）

P$(-\sqrt{a^2+b+2}\ ,\ 2a^2+2b+2+2a\sqrt{a^2+b+2}\ )$　（答）

同様に，

$f(q)=(q-a)^2+b=(\sqrt{a^2+b+2}-a)^2+b$

l_2：$y=2(q-a)(x-q)+(q-a)^2+b=(\sqrt{a^2+b+2}-a)(2x-\sqrt{a^2+b+2}-a)+b$

$=2(\sqrt{a^2+b+2}-a)x-2$　（答）

Q$\left(\sqrt{a^2+b+2},\ 2a^2+2b+2-2a\sqrt{a^2+b+2}\right)$　（答）

(2)

$$S=\int_p^0[\{(x-a)^2+b\}-\{2(p-a)(x-p)+(p-a)^2+b\}]dx$$

$$+\int_0^q[\{(x-a)^2+b\}-\{2(q-a)(x-q)+(q-a)^2+b\}]dx$$

$$\int_p^0[\{(x-a)^2+b\}-\{2(p-a)(x-p)+(p-a)^2+b\}]dx=\int_p^0(x-p)^2dx$$

$$\int_0^q[\{(x-a)^2+b\}-\{2(q-a)(x-q)+(q-a)^2+b\}]dx=\int_0^q(x-q)^2dx$$

$p=-q$であることを考慮して計算を進めると，

$$S=\int_p^0(x-p)^2dx+\int_0^q(x-q)^2dx=\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_p^0+\left[\frac{(x-q)^3}{3}\right]_0^q$$

$$=\frac{-p^3}{3}+\frac{q^3}{3}=\frac{2}{3}q^3$$

$a^2+b^2=1$だから，

$q=\sqrt{a^2+b+2}=\sqrt{1-b^2+b+2}=\sqrt{-b^2+b+3}$，$\frac{2}{3}q^3=\frac{2}{3}(-b^2+b+3)^{\frac{3}{2}}$

したがって，$S=\frac{2}{3}(-b^2+b+3)^{\frac{3}{2}}$　（答）

(3)

$a^2+b^2=1$だから，$-1\leqq b\leqq 1$

$S(b)=\frac{2}{3}(-b^2+b+3)^{\frac{3}{2}}$とおいて，$\frac{dS}{db}=S'(b)=(-2b+1)(-b^2+b+3)^{\frac{1}{2}}$

$-1\leqq b\leqq 1$において $S'(b)=0$となるのは $b=\frac{1}{2}$ で，$S(b)$の変化は図１の通り。

$b=\frac{1}{2}$ で$S(b)$は最大値 $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13\sqrt{13}}{12}$　（答）

このとき $a^2=1-b^2=\frac{3}{4}$，$\therefore\ a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，点Aの座標$(a,b)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　（答）

b	-1		$\frac{1}{2}$		1
$S'(b)$		$+$		$-$	
$S(b)$		$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{13}}{12}$	$\searrow$	

図１

＜解説＞

(1)

図２のような図を大雑把に描いて，題意を把握する。

接線l_1の式は$y-f(p)=f'(p)(x-p)$，接線 l_2 の式は $y-f(q)=f'(q)(x-q)$

l_1，l_2が点B$(0\,,-2)$を通ることから p，qをa，b を用いて表せば良い。

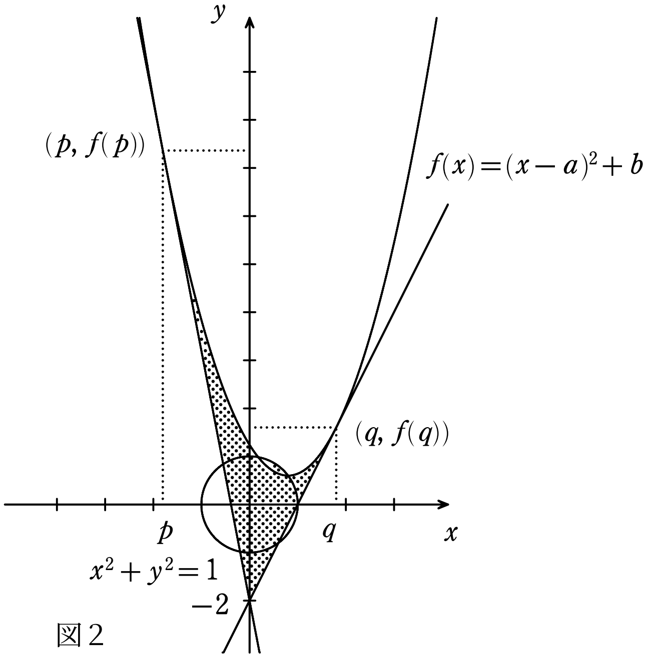

図2

(2)

よくある積分問題だが，少々注意が必要だ。なぜなら，(1)において接線 l_1，l_2 をa，bを用いて表したので，面積を求める被積分関数をa，bを用いて表すと複雑になって，計算ミスをおかし易い。ここは上記のように，

l_1 ：$y=f'(p)(x-p)+f(p)$，l_2 ：$y=f'(q)(x-q)+f(q)$

として，

$$S=\int_p^0[f(x)-\{f'(p)(x-p)+f(p)\}]dx+\int_0^q[f(x)-\{f'(q)(x-q)+f(q)\}]dx$$

ところが，

$f(x)$と$f'(p)(x-p)+f(p)$ は $x=p$ において接するのだから，2次方程式$f(x)=f'(p)(x-p)+f(p)$ すなわち$f(x)-f'(p)(x-p)+f(p)=0$は$x=p$ の重解をもつ。

したがって，$f(x)-f'(p)(x-p)+f(p)=(x-p)^2$

同様に，$f(x)-f'(q)(x-q)+f(q)=(x-q)^2$

のように被積分関数は直ちに求まることに注意する。

$\boxed{4}$ 数列$\{a_n\}$を次の条件(ⅰ)および(ⅱ)を満たすように定める。

(ⅰ) $a_1=0$，$a_2=3$

(ⅱ) 3 以上の自然数n に対して，第$(n-1)$項 a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項 a_{n-2}までのどの項の値とも等しくないときは$a_n=a_{n-1}-1$であり，第$(n-1)$項 a_{n-1}の値が初項 a_1から第$(n-2)$項 a_{n-2}までのどれかの項の値と等しいときは $a_n=a_{n-1}+6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第3項から第10項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第2015項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第201項までの和を求めよ。

＜解答＞

(1)

$a_3=a_2-1=3-1=2$, $a_4=a_3-1=2-1=1$, $a_5=a_4-1=1-1=0=a_1$, $a_6=a_5+6=6$

$a_7=a_6-1=6-1=5$, $a_8=a_7-1=5-1=4$, $a_9=a_8-1=4-1=3=a_2$, $a_{10}=a_9+6=9$

(2)

$n-2$を4で除したときの商をk，剰余をrとおく。

すなわち，$n-2=4k+r$，($k=0,1,2,3,\cdots$　$r=0,1,2,3$) とおく。

すると，$n\geqq 2$ に対して，$a_n=3(k+1)-r$ となる。

$n=2015$ のとき，$n-2=2013=4\times 503+1$，$\therefore\ k=503$, $r=1$

$\therefore\ a_{2015}=3\times(503+1)-1=1512-1=1511$　（答）

(3)

$201-2=199=4\times 49+3$，$\therefore\ k=49$, $r=3$

$$S_n=a_1+\sum_{i=2}^{201}a_i=0+\sum_{r=0}^{3}\sum_{j=0}^{49}\{3(j+1)-r\}=\sum_{j=0}^{49}(3j+3)+\sum_{j=0}^{49}(3j+2)+\sum_{j=0}^{49}(3j+1)+\sum_{j=0}^{49}3j$$

$$=50\times(3+2+1)+3\times 4\times\frac{50\times 49}{2}=15000$$　（答）

＜解説＞

(1)

数列の説明通りに求める。

(2)

$n-2=4k+r$

$6-2=4\times1+0$　$7-2=4\times1+1$　$8-2=4\times1+2$　$9-2=4\times1+3$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	・・・
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	・・・
値	0	3	2	1	0	6	5	4	3	9	8	7	6	12	13	・・・

$6=3(1+1)-0$　$5=3(1+1)-1$　$4=3(1+1)-2$　$3=3(1+1)-3$

図１

$a_n=3(k+1)-r$

(1)で各項の値を求める計算を続けるうちに，この数列がもつ規則性に気づく。図１に示すような関係である。4項ごとに，同じ値が出ること，そのため次の項の値は前項の値に6を加算すること，次の項の値は前項の値から1ずつ減じるので，4 項めに同じ値が出現することになる。

そこで，項番nを4の商と余りによって表現する。その商と余りによって，各項の値を表現すること

ができることに気づく。ただし，$n=2,6,10,14,\cdots$ の各項において，3の倍数が出るので，$n-2$を4の商と余りによって表現すれば，(3×商＋余り)が各項の値になることが解る。

上記のことを$n=2015$に適用すればよい。

(3)

$n-2=4k+r$ の k，r によって，$a_n=3(k+1)-r$ と表されるので，$k=1,2,3,\cdots$ に対して，$r=0,1,2,3$と変化させて，和を計算すればよい。

$\boxed{5}$ 自然数n に対して，関数$f_n(x)$を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad (n\text{が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad (n\text{が}3\text{以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数$f_2(x)$，$f_3(x)$を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq \frac{x^4}{4!}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$のとき，次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)dt=\left[t-\frac{t^3}{6}\right]_0^x=x-\frac{x^3}{6} \qquad (\text{答})$$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)dt=1-\int_0^x f_2(t)dt=1-\int_0^x\left(t-\frac{t^3}{6}\right)dt=1-\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{24}\right]_0^x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$f_1(x)-\cos x=1-\frac{x^2}{2}-\cos x=\frac{x^2}{2}-\int_0^x \sin t\,dt$$

$0<x\leqq 1$のとき $0<x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$であり，$x=0$のとき$x-\dfrac{x^3}{3!}=\sin x=x=0$だから，

$0 \leqq x \leqq 1$のとき $0 \leqq x-\dfrac{x^3}{3!} \leqq \sin x \leqq x$。各辺を積分しても不等号の関係は変わらない。

すなわち，$\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt \leqq \int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$，$\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt \geqq \int_0^x \left(t-\frac{t^3}{3!}\right)dt=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}$

したがって，$\displaystyle\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!} \leqq \int_0^x \sin t\,dt \leqq \frac{x^2}{2}$

したがって，$\displaystyle -\frac{x^4}{4!} \leqq 0 \leqq \frac{x^2}{2}-\int_0^x \sin t\,dt \leqq \frac{x^4}{4!}$

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$のとき $\displaystyle -\frac{x^4}{4!} \leqq f_1(x)-\cos x \leqq \frac{x^4}{4!}$

(3)

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leqq f_{2m-1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \quad ①$$

数学的帰納法を用いて①を証明する。$m=1$のとき，(2)により①式は成立する。

kをある自然数として，$m=k$のとき①は成立するとする。

$$-\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leqq f_{2k-1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \quad ②$$

$m=k+1$のとき

$-\dfrac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq f_{2k+1}(x)-\cos x \leqq \dfrac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$　③　が成立することをいえばよい。

$$f_{2k+1}(x)-\cos x=1-\int_0^x f_{2k}(t)dt-\cos x \quad ④$$

$\displaystyle f_{2k}(t)=\int_0^t f_{2k-1}(u)du$ と②から，$\displaystyle -\frac{u^{2k+2}}{(2k+2)!} \leqq f_{2k-1}(u)-\cos u \leqq \frac{u^{2k+2}}{(2k+2)!}$　⑤

$0 \leqq t \leqq 1$において，⑤の各辺を積分しても不等号の関係は変わらないから，

$$-\int_0^t \frac{u^{2k+2}}{(2k+2)!}du+\int_0^t \cos u\,du \leqq \int_0^t f_{2k-1}(u)du \leqq \int_0^t \frac{u^{2k+2}}{(2k+2)!}du+\int_0^t \cos u\,du$$

$$-\frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}+\sin t \leqq \int_0^t f_{2k-1}(u)du \leqq \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}+\sin t$$

したがって，$\displaystyle -\frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}+\sin t \leqq f_{2k}(t) \leqq \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}+\sin t$

$$-\int_0^x \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}dt+\int_0^x \sin t\,dt \leqq \int_0^x f_{2k}(t)dt \leqq \int_0^x \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}dt+\int_0^x \sin t\,dt$$

$$-\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}-\cos x+1 \leqq \int_0^x f_{2k}(t)dt \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}-\cos x+1$$

これを整理すると，$\displaystyle -\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq 1-\int_0^x f_{2k}(t)dt-\cos x \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$

④から，$\displaystyle -\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq f_{2k+1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$

したがって，③が成立することが示された。

①式は $m=1$において成立し，$m=k$において成立するとすれば，$m=k+1$においても成立することが示されたので，数学的帰納法により，すべての自然数 m に対して成り立つことが解る。

(4)

①式で，$x=\dfrac{\pi}{6}$とおく。

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2} \leqq f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{\pi}{6} \leqq \frac{1}{(2m+2)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}$$

$$-\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m+2)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2} \leqq \lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2m+2)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}$$

$\dfrac{\pi}{6}<1$だから，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}=0$，$\displaystyle 0\leqq \lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq 0$

したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　（答）

＜解説＞

(1)

積分の計算を行えばよい。

(2)

$\cos x$を含む不等式の証明である。問題文に$\sin x$の範囲式が与えられている。だから，これを利用する問題だと気づく。$\cos x$を$\sin x$を含む式に変換することが必要である。

不定積分$\cos x=-\int \sin x\,dx$を容易に思い出せるだろう。

$0<x\leqq 1$のとき $0<x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ という表式を

$0\leqq x\leqq 1$のとき $0\leqq x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq \sin x\leqq x$ という表式にすることが必要である。

また，$0\leqq x\leqq 1$で $h(x)\leqq g(x)$ならば，$\int_0^x h(t)dt\leqq\int_0^x g(t)dt$であることを自明として利用している。これを証明しておこう。

$\int h(x)=H(x)$，$\int g(x)=G(x)$とすれば，$\int_0^x h(t)dt=H(x)-H(0)$，$\int_0^x g(t)dt=G(x)-G(0)$

$\int_0^x g(t)dt-\int_0^x h(t)dt=\{G(x)-G(0)\}-\{H(x)-H(0)\}=A(x)$とおく。

$A'(x)=G'(x)-H'(x)=g(x)-h(x)\geqq 0$，したがって$A(x)$は単調増加関数で，かつ$A(0)=0$だから，$A(x)\geqq 0$。したがって$\int_0^x g(t)dt-\int_0^x h(t)dt\geqq 0$，すなわち$\int_0^x h(t)dt\leqq\int_0^x g(t)dt$

$0\leqq\int_0^x h(t)dt$も同様である。

(3)

すべての自然数に対して成立する，ことを証明する常套的手法が数学的帰納法である。ここでは，(2)によって，その準備がなされているから，すぐに数学的帰納法を使うと決めて取り組むことができるだろう。ここでも $0\leqq x\leqq 1$で $h(x)\leqq g(x)$ならば，$\int_0^x h(t)dt\leqq\int_0^x g(t)dt$であることを利用するので，「各辺を積分しても不等号の関係は変わらない」というように，述べておく必要がある。

＜総評＞

例年のように，新潟大学の数学問題は数学の学力を問うに適切な難易度の問題を構成しているように思う。$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ は完答し，$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ は食らいついて少なくも部分点を得て，80点以上をめざしたいところだ。

$\boxed{1}$

1 次式と2 次式に因数分解できる3 次式からの2 次方程式の解の性質に関する問題。基礎的な数学力を問うもので，完答したい。難易度はC。

$\boxed{2}$

ベクトルによって三角形の性質を明らかにする問題。外心，重心等の意味を理解していることが必要だ。題意が簡明であり計算も容易なので，完答したい。難易度はB－。

$\boxed{3}$

単位円の円周上の点を通る放物線と二つの接線で囲まれる図形の面積を求める問題。よくある問題だが，計算ミスを誘発しやすい少々意地が悪い設問の文言となっているように思う。難易度はB。

$\boxed{4}$

あまり経験することのない数列を扱う。しかし，落ち着いて考えれば，簡単な規則によって作成される数列であることが解る。数列の項番$n-2$を4で除したときの商と余りによって項の値が決まることに気づくことがポイントである。難易度はB。

$\boxed{5}$

関数列の不等式に関する問題。次項が前項の積分によって作成される関数において，与えられた関係式を活用して一般項における不等式関係を証明する。解答の着想や計算が少々複雑なので，難易度はA。

＜人文・教育・経済・農学部＞ (90分)

$\boxed{1}$ 理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{2}$ △ABC の外心をOとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5\,,\ 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) △ABC の重心をG とするとき，$|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

＜解答＞

（問題設定は理系の $\boxed{2}$ に同じ。）

(1)

$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$の両辺と$\vec{a}$の内積を考える。

$4\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{a}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{0}\cdot\vec{a}$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$であるから，$4\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　①

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=25$だから，①は$100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　②となる。

(2)

$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$の両辺と$\vec{b}$の内積を考える。

$4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{0}\cdot\vec{b}$

(1)と同様に，$4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{b}+5\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$4\vec{a}\cdot\vec{b}+75+5\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　③

同様に，$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$の両辺と$\vec{c}$の内積を考える。

$4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+5\vec{c}\cdot\vec{c}=4\vec{c}\cdot\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+125=0$　④

②，③，④から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-15$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$　（答）

(3)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}$，ただしGは重心だから$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

$9|\overrightarrow{OG}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=75-70=5$，$\therefore\ |\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　（答）

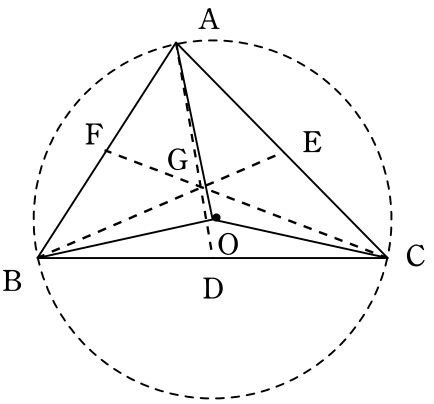

図１

<解説>

理系の$\boxed{2}$とほぼ同じ問題なのだが，見方によってはこちらの方が扱い難いかも知れない。(3)で初めて重心が出てきて，$\overrightarrow{OG}$と$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$との関係を求めなければならないからだ。理系では予め，$\overrightarrow{OG}$と$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$の関係を示すことになる式が提示されているからだ。どういう意図で，微妙に問題を変えたのだろう。

(1)

与えられた等式の両辺と$\vec{a}$の内積をとることは容易に解る。

(2)

(1)と同様に，$\vec{b}$，$\vec{c}$との内積をとれば，３元連立方程式となる。

(3)

Gが重心のとき，$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$となることを知っていないと，解答は難しい。数学Bの教科書に記載されている。

$\boxed{3}$　$f(x)=x^2-2x+2$とする。放物線$y=f(x)$上の点P$(p, f(p))$における接線をl_1とし，放物線 $y=f(x)$ 上の点 Q$(p+1, f(p+1))$ における接線をl_2とする。2 直線l_1，l_2の交点をRとする。ただしpは定数である。次の問いに答えよ。

(1) 直線l_1，l_2の方程式をそれぞれpを用いて表せ。

(2) 交点R の座標をpを用いて表せ。

(3) 放物線$y=f(x)$と2 直線l_1，l_2とで囲まれた部分の面積を求めよ。

＜解答＞

（理系の $\boxed{3}$ を容易にした問題）

(1)

$f'(x)=2x-2$，$f'(p)=2p-2$,

したがって接線l_1は$y-f(p)=f'(p)(x-p)$,

$\therefore\ y=2(p-1)(x-p)+f(p)=2(p-1)(x-p)+p^2-2p+2=2(p-1)x-p^2+2$　①

接線l_2は①でpを$p+1$として，$y=2px-(p+1)^2+2=2px-p^2-2p+1$　②

(2)

①=②として，$x=p+\frac{1}{2}$，$f\left(p+\frac{1}{2}\right)=p^2-p+1$，したがってR$\left(p+\frac{1}{2}, p^2-p+1\right)$　（答）

(3)

$$\int_p^{p+\frac{1}{2}}[(x^2-2x+2)-\{2(p-1)x-p^2+2\}]dx+\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1}\{(x^2-2x+2)-(2px-p^2-2p+1)\}dx$$

$$=\int_p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^2dx+\int_{p+\frac{1}{2}}^{p+1}(x-p-1)^2dx=\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_p^{p+\frac{1}{2}}+\left[\frac{(x-p-1)^3}{3}\right]_{p+\frac{1}{2}}^{p+1}=\frac{1}{12}$$　（答）

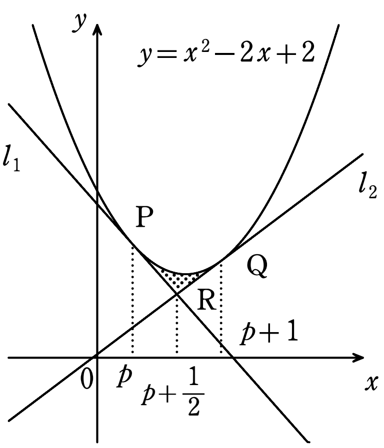

図 1

＜解説＞

2 次式の微分，積分の問題。図 1 を参照する。

(1)

接線の傾き，$f'(p)$ および$f'(p+1)$ を求める。

(2)

両接線の方程式を連立させて解を求める。

(3)

面積を求めるための被積分関数は，（放物線の式−接線の式）である。放物線の式＝接線の式 としたとき，点Pで両者のグラフは接するので，（放物線の式−接線の式）$=0$ は$x=p$ の重解をもつ。

したがって，接線l_1 に対して，（放物線の式−接線の式）$=(x-p)^2$となる。

接線l_2 においても同様に，（放物線の式−接線の式）$=(x-p-1)^2$となる。

$\boxed{4}$

（理系の $\boxed{4}$ とほぼ同じ問題，(2)の第50項が理系では第2015項，(3)の第50項が理系では第201項）

（理系の解答を参考に，読者自ら解いてほしい）

＜総評＞

理系の問題をベースにして，それらと同じか，または容易化した問題となっている。

$\boxed{1}$

理系の問題 $\boxed{1}$ と同じ。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

理系の問題 $\boxed{2}$ とほぼ同じ。難易度はＢ。

$\boxed{3}$

理系の問題 $\boxed{3}$ を容易にした問題。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

理系の問題 $\boxed{4}$ とほぼ同じ。文系には少々難しいかも知れない。難易度はＢ＋。

151125