2015（H27)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

（物理，化学，生物，地学のうち２科目受験で150分）

$\boxed{1}$

＜解答＞

問（１）(a)

小球は周速v_0で円筒壁に沿って周長$2\pi r$の円運動をするので，周期は $T=\dfrac{2\pi r}{v_0}$　（答）

(b)

運動量保存の法則により，$m_A v_0 - m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B$　①

反発係数 $e=1=\dfrac{|v_A - v_B|}{|v_0-(-v_0)|}=\dfrac{-v_A+v_B}{2v_0}$　②

①，②から$v_A=\dfrac{m_A-3m_B}{m_A+m_B}v_0$，$v_B=\dfrac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0$　（答）

(c)

小球A から見た小球B の速度は，$v_B - v_A = 2v_0$，すなわち小球A が停止しているとすれば，小球B は時計回りに$2v_0$ の速さで運動している。したがって小球B は1回りして小球A に衝突する。

したがって衝突までの時間は $T_1=\dfrac{2\pi r}{2v_0}=\dfrac{\pi r}{v_0}$　（答）

(d)

（オ）　（答）

$v_A=\dfrac{m_A-3m_B}{m_A+m_B}v_0$ は$m_B \gg m_A$のとき，$v_A=\dfrac{m_A/m_B-3}{m_A/m_b+1}v_0 \fallingdotseq -3v_0$

$v_B=\dfrac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0$ は$m_B \gg m_A$のとき，$v_B=\dfrac{3m_A/m_B-1}{m_A/m_b+1}v_0 \fallingdotseq -v_0$

3 回めの衝突後の相対速度は$|v_A - v_B| = |-3v_0 - v_0| = 2v_0$と同じだから，衝突までの時間は$T_1$

以上を満たすグラフは（オ）のみ。

問（２）(a)

エネルギー保存の法則により，$\dfrac{1}{2}m_A {V_0}^2 = 2m_A gr$，$\therefore V_0 = 2\sqrt{gr}$

(b)

円運動の方程式は $\dfrac{m_A v^2}{r}=N+m_A g\cos\theta$，ただし

v は小球A の速さ，N は円筒壁から小球A に働く抗力，θ は円筒壁の垂線と鉛直線とのなす角

小球が壁から離れるのは，$N=0$ になったときだから $\cos\theta=\dfrac{v^2}{gr}$　①，また$y_0=r+r\cos\theta$　②，

エネルギー保存の法則と①，②を用いて

$2m_A gr = m_A g y_0 + \dfrac{1}{2}m_A v^2 = m_A gr(1+\cos\theta)+\dfrac{1}{2}m_A gr\cos\theta$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，$\therefore\ y_0=\dfrac{5}{3}r$　（答）

(c)

小球A とC の衝突前の速さは(a)で求めたV_0，衝突後の速さをV_{A1}，V_{C1}とする。

運動量保存の法則により，$m_A V - 3m_A V = -m_A V_{A1} + 3m_A V_{C1}$　③

反発係数について $1 = \dfrac{|-V_{A1} - V_{C1}|}{|V_0 - (-V_0)|} = \dfrac{V_{A1} + V_{C1}}{2V_0}$　④

③，④から$V_{A1} = 2V_0$，$V_{C1} = 0$，すなわち小球A ははね返されて，衝突前の2 倍の速さで反時計回りに回る。小球C は静止する。小球A は１回りして原点で静止している小球C に2 回目の衝突をする。

したがって，2 回目の衝突は原点Oで起きるので，座標は $(x_1, y_1) = (0, 0)$　（答）

(d)

図１を参照する。２回目の衝突前の小球A の速さは原点に戻ったので，同じ $2V_0$である。

２回目の衝突前後の運動量保存の法則から $-2m_A V_0 = m_A V_{A2} + 3m_A V_{C2}$　⑤

反発係数について $1 = \dfrac{|V_{A2} - V_{C2}|}{|-2V_0|} = \dfrac{V_{A2} - V_{C2}}{2V_0}$　⑥

⑤，⑥から $V_{A2} = V_0 = 2\sqrt{gr}$，$V_{C2} = -V_0 = -2\sqrt{gr}$　（答）

小球A，C は反対方向に同じ速さで原点から円運動をするから，y 軸に関して対称の位置にある。

小球A，C が離れるのは(b)で求めた $y_0 = \dfrac{5}{3}r$ の位置で，それらの速さは ①から $v = \sqrt{\dfrac{2}{3}gr} = \dfrac{V_0}{\sqrt{6}}$

小球A のx 方向の速さは $v_x = v\cos\theta$，小球C は $v_x = -v\cos\theta$ と逆方向で大きさは同じだから，

両者が衝突するx 座標は $x_3 = 0$　（答）

円筒から小球が離れた点から$x=0$ の鉛直線までのx方向の距離は $r\sin\theta$ だから，

$T_2 = \dfrac{r\sin\theta}{v_x} = \dfrac{r}{v}\tan\theta = \dfrac{\sqrt{5}\,r}{2v} = \dfrac{\sqrt{30}}{4}\sqrt{\dfrac{r}{g}}$　（答）

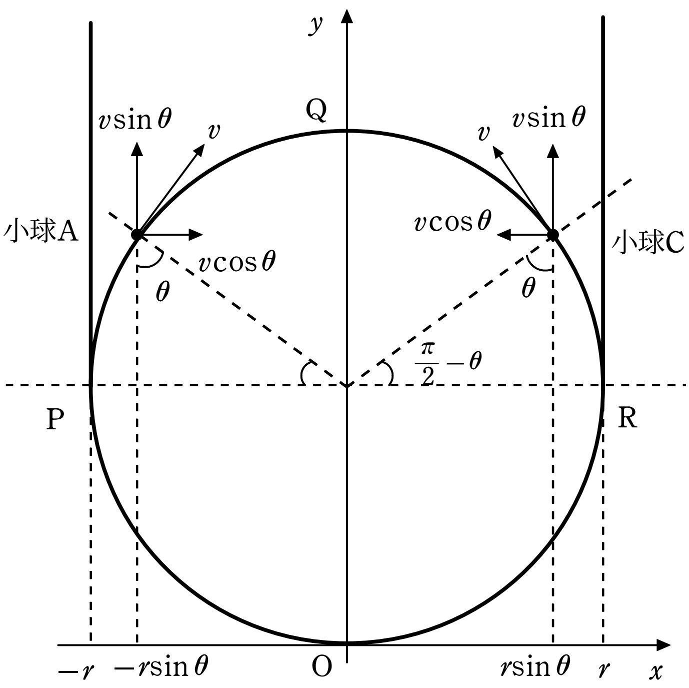

図１

＜解説＞

問（1）(a)

小球は周速v_0で円筒壁に沿って円運動をする。

(b)

運動量保存の法則により，衝突前の運動量 = 衝突後の運動量

運動量の正方向は速度と同じく時計回りとして考える。

$$反発係数=\frac{衝突後の速さの差(正の数値)}{衝突前の速さの差(正の数値)}$$

衝突前の速さの差は $2v_0$，

なぜなら小球Aが時計回りにv_0，小球B が反時計回りにv_0（時計回りに$-v_0$）

衝突後の速さの差は$|v_A-v_B|=-v_A+v_B$

なぜなら小球Aの速度がv_Aだから時計回りに速さがv_A，小球B の速度がv_B だから時計回りに速さv_B，そして$v_B \geqq v_A$（時計回り方向に進むとしたとき，小球A がB を追い越すことはない）

(c)

小球A，B とも同じ円周に沿って運動するので両者の速さに差があれば，必ず衝突する。

別の考え方を示そう。

時間T_1で小球A が動く距離は$v_AT_1=\dfrac{m_A-3m_B}{m_A+m_B}v_0T_1$

時間T_1で小球B が動く距離は$v_BT_1=\dfrac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0T_1$

両者の和は円周に等しいから，$\dfrac{m_A-3m_B}{m_A+m_B}v_0T_1+\dfrac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0T_1=2\pi r$

(d)

反発係数が1ということは，衝突前後の小球A とB の相対速さが変化しないということである。1回目の衝突前の相対速さは$2v_0$，したがって衝突のたびに向きを変えても相対速さは$2v_0$ のまま。すると，衝突の周期はT_1のままである。

問（2）(a)

摩擦によるエネルギーの損失はないから，エネルギー保存の法則により，小球が失った重力の位置のエネルギーは運動エネルギーに変化する。

(b)

向心力が働くことによって小球は円運動を行う。

向心力＝（円筒壁の垂直方向に壁から小球に働く力）＋（小球に働く重力の壁垂直方向成分）

(c)

小球A，C は同じ高さから同じ初速度0で，重力により落下したのだから，衝突前の速度は同じ。

(d)

エネルギーの損失がないので，１回りして小球A が原点に戻ると，原点を出たときと同じ速さになる。２回目の衝突により，小球A，C の速さは同じになるので，両者は反対方向に同じ円運動をする。したがって，円筒から離れるy 座標の位置は(b)で求めたy_0 である。

$\boxed{2}$

＜解答＞

問（１）(a)

$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$　（答），

電流は流れていないので極板Bの電位はVとなり，極板Aには負の電荷が蓄えられる。

$Q=-CV=-\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}V$　（答）

(b)

$U_1=\dfrac{1}{2}|Q|V=\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}V^2$　（答）

スイッチ１を閉じてから電池がした仕事 $W=|Q|V=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}V^2$　（答）

問（２）

(a)

極板ABの間隔を半分にしたので，電気容量は$2C$と2倍になった。したがって，コンデンサーに蓄えれられる電荷は2倍の$2CV$，静電エネルギーも2倍のCV^2になるので，静電エネルギーの変化は

$\Delta U=\dfrac{1}{2}CV^2$　（答）

(b)

蓄えられている電荷は変化せず$2CV$のまま，電気容量はCだから，$U_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{(2CV)^2}{C}=2CV^2$　（答）

問３(a)

コンデンサーの電荷がすべて流れて，コイルに流れる電流となったとすれば，エネルギー保存の法則により，（コンデンサーの静電エネルギー）＝（コイルの磁場エネルギー），である。

コイル１，２に蓄えられる磁場のエネルギーは，$\dfrac{1}{2}(L_1+L_2){I_{max}}^2$

エネルギー保存の法則により，$U_2=2CV^2=\dfrac{1}{2}(L_1+L_2){I_{max}}^2$，$\therefore\ I_{max}=2V\sqrt{\dfrac{C}{L_1+L_2}}$　（答）

コイル１の両端にかかる電圧の最大値V_{max}，そのときコイル２の両端にかかる電圧をV_2とすれば，

$V_{max}=-L_1\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$，$V_2=-L_2\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=\dfrac{L_2}{L_1}V_{max}$

コンデンサーの両端の電圧をV_Cとすれば，キルヒホッフの法則により，

$V_{max}+V_2=V_{max}+\dfrac{L_2}{L_1}V_{max}=V_C$，$\therefore\ V_{max}=\dfrac{L_1}{L_1+L_2}V_C$，初めにコンデンサーの電荷は$2CV$，容量は$C$だから，$V_C$の最大値は$2V$，したがって $V_{max}=\dfrac{2L_1}{L_1+L_2}V$　（答）

(b)

充電されたコンデンサーとコイルからなる閉回路において，電流とコイル両端の電圧は正弦波状

の変化をし，$I=I_{max}\sin\omega t$，$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C}}$と表現される。

$U=\dfrac{1}{2}L_1I^2=\dfrac{1}{2}L_1{I_{max}}^2\sin^2\omega t=U_{max}\sin^2\omega t=\dfrac{1}{2}U_{max}(1-\cos 2\omega t)$となり，$t=0$では0である。

これを満たすグラフは（オ）である。

(a)の結果を用いて，$U_{max}=\dfrac{1}{2}L_1{I_{max}}^2=\dfrac{2CL_1V^2}{L_1+L_2}$　（答）

τは１周期の時間だから，$\tau=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi\sqrt{(L_1+L_2)C}$　（答）

＜解説＞

問（１）(a)

コンデンサーの電気容量 が極板の面積に比例し，間隔に反比例することを理解していること。

極板Aは電池の負極に接続されているから，電気量（電荷）は負である。

(b)

コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの公式とその導出方法は覚えていなければならない。

その際，電池がする仕事は蓄えられた静電エネルギーの2倍になる。それでは電池がする仕事の半分はどうなるのか。電池内部の抵抗を含め回路を構成する電線等の抵抗を電流が流れることによるジュール熱として消費される。コンデンサーに蓄積されるエネルギーを考察する際に，本来は回路の抵抗を考えないと計算できないのだが，これが省略されて説明されている。

問（２）(a)

極板間隔を半分にすると電気容量は2倍になる。電池の電圧はそのままだから，静電エネルギーは容量が増加した分だけ増加する。

(b)

電荷は変化せず，容量が元のCへ戻ったのだから，その分極板間の電圧が2 倍になるので，静電エネルギーも2 倍になる。

問（３）(a)

充電したコンデンサーをスイッチを介してコイルに接続した図１の CL 閉回路の電流，電圧に関わる問題である。これは電気振動として物理の教科書に記載されていて，正弦波状の電流，電圧波形となり，その角周波数等が与えられている。したがって，ここでは教科書に記載通りのことを解答すれば良いのだが，なぜそのような電流 , 電圧変化をするのか , 図１を参照して検討してみよう。

キルヒホッフの法則から，$V_C+L_1\dfrac{dI}{dt}+L_2\dfrac{dI}{dt}=0$, ただしV_C はコンデンサーの電圧,

$V_C(t)=\dfrac{q(t)}{C}$，$I(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$，$\dfrac{dI(t)}{dt}=\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}$

したがって，$\dfrac{q(t)}{C}=-(L_1+L_2)\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}$，$\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}=-\dfrac{1}{C(L_1+L_2)}q(t)$　①

①式を見つめると，見たことのある形式と気づく。$F=ma=-kx$，aは加速度，という単振動を示す式である。これは力が変位の大きさに比例し変位とは逆方向に働くような場合には変位は単振動することを示している。一般的にいえば，ある物理量の変化の速さが物理量の大きさに比例し反対方向

であるときは，物理量が単振動することを示している。

そこで，$q(t)=q_0\cos\omega t$ とおけば，$\omega^2=\dfrac{1}{C(L_1+L_2)}$，$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}$

また $t=0$ における電荷は　$q(0)=q_0=2CV$ だから，$q(t)=q_0\cos\omega t=2CV\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}\right)$

$I(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=-\dfrac{2CV}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}\right)$，したがってコイル１を流れる電流の最大値

$I_{max}=2V\sqrt{\dfrac{C}{L_1+L_2}}$　（答）

コイル１の両端にかかる電圧は,

$-L_1\dfrac{dI}{dt}=-L_1\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}=\dfrac{L_1}{C(L_1+L_2)}q(t)=\dfrac{2L_1}{L_1+L_2}V\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{C(L_1+L_2)}}\right)$ だから,

$V_{max}=\dfrac{2L_1}{L_1+L_2}V$　（答）

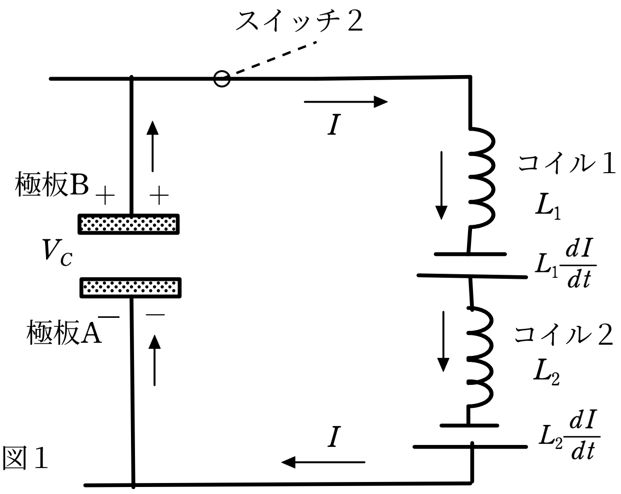

図１

(b)

グラフの選択は以下のように考えると，正答は(オ)に帰着する。

蓄積されるエネルギーが負になることはない。したがって，(ア)，(イ)は棄却される。

$t=0$でコイルにはエネルギーは蓄積されていない。したがって，(エ)，(カ)は棄却される。

コンデンサーに蓄積されていた電荷は有限だから，電流が一方向に流れ続けることはない。したがって，ウは棄却される。

グラフを一目して，上記のような判断により，(オ)を正答したい。

3

問（１）(a)

液体表面で反射した光と境界面で反射した光との経路差は $2d_1$，液体中の波長は$\dfrac{\lambda}{n_1}$

したがって，両光が弱めあう条件は $\dfrac{2d_1}{\lambda/n_1}=m+\dfrac{1}{2}$　$(m=0, 1, 2, ...)$

d_1の最小値は$m=0$のときで，$\dfrac{\lambda}{4n_1}$　（答）

(b)

液体中へ入る光の屈折角をθ_1とすれば，液体表面で反射した光と境界面で反射した光とが強めあう条件 は，両者の光路長の差が波長の整数倍である。すなわち，

$$\frac{2n_1d_1}{\cos\theta_1}-2d_1\tan\theta_1\sin\theta_0=m\lambda \quad (m=1,2,...) \quad ①$$

屈折の法則により，$\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0}=\dfrac{1}{n_1}$　②

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_0}{n_1}\right)^2}=\frac{\sqrt{n_1{}^2-\sin^2\theta_0}}{n_1}$$

これらを用いて①を変形すると

$$\frac{2n_1d_1}{\cos\theta_1}-2n_1d_1\tan\theta_1\sin\theta_1=\frac{2n_1d_1}{\cos\theta_1}(1-\sin^2\theta_1)$$

$$=2n_1d_1\cos\theta_1=2d_1\sqrt{n_1{}^2-\sin^2\theta_0}=m\lambda \quad (m=1,2,...) \quad （答）$$

(c)

液体からガラス板へ入射する光の屈折の法則により，$\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\dfrac{n_1}{n_2}$

②を用いると$\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0}=\dfrac{1}{n_2}$，$\therefore \sin\theta_2=\dfrac{\sin\theta_0}{n_2}$　（答）

問（2）(a)

光が通過する容器近傍での経路を図２に示す。

ガラス板中での光がガラス面の法線となす角をϕ_dとすれば，屈折の法則により，

$\dfrac{\sin\phi_0}{\sin\phi_d}=n_2$，$\dfrac{\sin\phi_d}{\sin\phi_1}=\dfrac{1}{n_2}$，$\therefore \sin\phi_0=\sin\phi_1$，$\phi_0$，$\phi_1$ともに鋭角だから，$\phi_0=\phi_1$　（答）

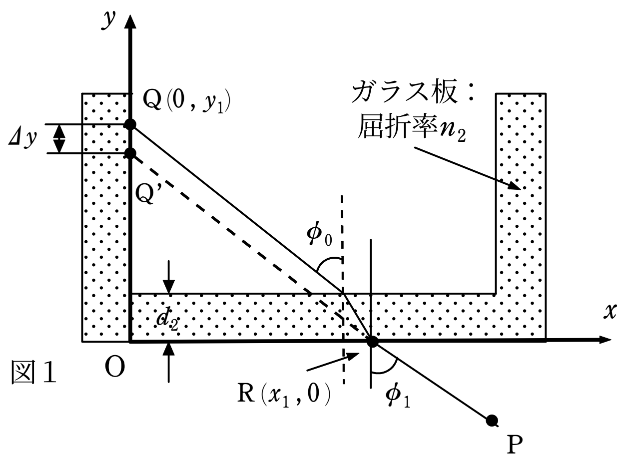

図１

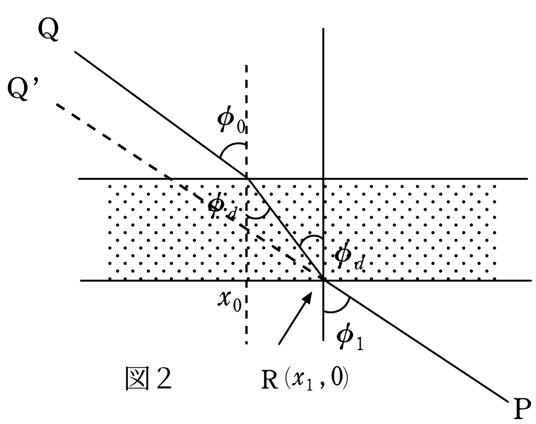

図２

(b)

ガラス面への光の入射点のx座標をx_0とすれば，$y_1=d_2+\dfrac{x_0}{\tan\phi_0}=d_2+\dfrac{x_0}{\tan\phi_1}$

Q’のy座標をy'とすれば，$y'=\dfrac{x_1}{\tan\phi_1}$

$$\Delta y = y_1 - y' = = d_2 + \frac{x_0}{\tan\phi_1} - \frac{x_1}{\tan\phi_1} = d_2 - \frac{1}{\tan\phi_1}(x_1 - x_0)$$

$$x_1 - x_0 = d_2 \tan\phi_d = d_2 \frac{\sin\phi_d}{\cos\phi_d}$$

$$\sin\phi_d = \frac{\sin\phi_1}{n_2},\quad \cos\phi_d = \sqrt{1-\sin^2\phi_d} = \frac{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}{n_2}$$

$$\frac{\sin\phi_d}{\cos\phi_d} = \frac{\sin\phi_1}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}$$

$$\Delta y = d_2 - \frac{d_2 \tan\phi_d}{\tan\phi_1} = d_2\left(1 - \frac{\cos\phi_1}{\sqrt{{n_2}^2 - \sin^2\phi_1}}\right) \quad \text{（答）}$$

問（3）

図3を参照する。空気とガラス面での屈折の法則により $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_1} = 2$ ③

ガラス面と液体の境界面での屈折の法則により $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④

液体と空気の境界面での屈折の法則により $\dfrac{\sin(75° - \theta_2)}{\sin\theta_3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ⑤

液体と空気の境界面で全反射する条件は，$\theta_3 = 90°$，⑤から $\sin(75° - \theta_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$

したがって，液体と空気の境界面での入射角 $75° - \theta_2 = 45°$ が全反射の臨界角となる。

$\theta_2 = 30°$ となり，④から $\sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，③から $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore\ \theta = 45°$

$\theta \leqq 45°$ であれば，③，④から $\sin\theta_2 = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \leqq \dfrac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$，したがって $\theta_2 \leqq 30°$

液体と空気境界面で入射角は $75° - \theta_2 \geqq 45°$ となって，臨界角以上の入射角となるから，

$\theta \leqq 45°$ であれば，液体と空気境界面で光は全反射する。

したがって，全反射する最大の θ は $45°$ （答）

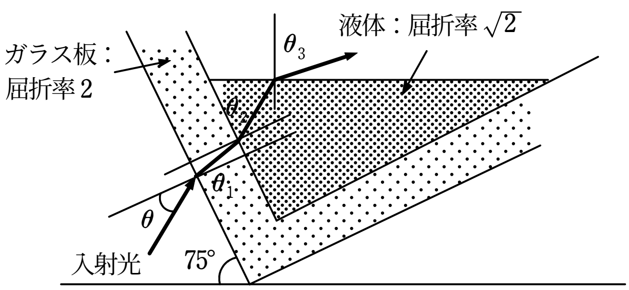

図3

＜解説＞

光の屈折と干渉の問題である。

問（1）(a)

液体表面で反射した光と境界面で反射した光が重なり合って干渉が起き，強めあったり，弱めあったりする。その強弱が波長，液体層の厚さ，入射角度によって異なるので，色がついて見える。美し

く色が着いて見えるシャボン玉の原理である。

水面に油が流れたときに見える着色も同じ原理に基づく。

(b)

屈折率nの媒体中では光の波長は$\frac{\lambda}{n}$となる。したがって経路長がn倍になることと同じである。

①の$\frac{2n_1d_1}{\cos\theta_1}$は液体中の光の経路長$\frac{2d_1}{\cos\theta_1}$を$n_1$倍したもので光路長である。波長$\lambda$の光に対する実質的な経路長である。空気中の経路長との差を考えるために，$\frac{2d_1}{\cos\theta_1}$を$n_1$倍したのである。

(c)

屈折率n_0，n_1，n_2，．．．の媒体の層が続くときの屈折の法則は，

$n_0\sin\theta_0=n_1\sin\theta_1=n_2\sin n_2=$．．．である。したがって，最初の入射角$\theta_0$と$i$番目の層への屈折角$\theta_i$（$i+1$番目の層への入射角でもある）の関係は途中の層に関係しない。

問２(a)

光が屈折する光路を描けば良い。問題図２はかなりデフォルメされているので，捉われないこと。Q’Pの破線とQからの入射光は平行になることに注意する。

(b)

考え方は単純である。光路の図から，Δyの算出式は容易に求まる。光の問題の多くは，計算が煩瑣になる場合が多いので，計算ミスに注意する。

問（３）

空気－ガラス－液体－空気の各境界面での光路の屈折と屈折角，入射角の略図を描いて，屈折の法則を適用する。液体から空気への入射角は簡単な考察により，$75°-\theta_2$と求めることができる。

＜総評＞

去年と同様に，$\boxed{1}$が力学，$\boxed{2}$が電磁気，$\boxed{3}$が波動という問題構成である。$\boxed{1}$，$\boxed{2}$にやや難しい問題が含まれているが，教科書を繰り返し読んで理解し，練習問題を解くなどの勉強によって，70点以上の得点を得たいものだ。

結果だけでなく，考え方や計算の過程を示せということだから，粘り強く取り組んで部分点を確保しよう。

$\boxed{1}$

どのようにして円筒内に球を閉じ込めるかという疑問はともかくとして，円運動，衝突，重力の作用の有無など，なかなか面白い仮想実験の問題である。特に円筒を横にして重力の作用を考慮する運動にした問（２）はなかなか難しい。問（１）は難易度Ｂ，問（２）は難易度Ａ－。

$\boxed{2}$

問（１），（２）が抵抗とコンデンサーを直列接続した閉回路，問（３）が充電されたコンデンサーとコイルを直列接続した閉回路の動作の問題である。コンデンサーの問題は簡明で基本的なものだから，正答したい。難易度はＢ－。問（３）はやや難しい。教科書に記載されているのだが，考え方を的確に理解していないと正答できないだろう。難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

　光の屈折と干渉に関する基本的な問題。光路図を描いて，入射角，屈折角，光路長等を求めれば，正答できる。教科書に記載されている基本的事項の簡明な問題だから，計算ミスに気をつけて，全問正答したい。問（１）(a)，(c)は難易度Ｃ，(b)はＢ，問（２）(a)は難易度Ｃ，(b)はＢ，問３はＢ。

　波動の問題としては去年より易化している。

160211