2015 (H27) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）
・歯学部・薬学部・工学部・農学部　　　試験時間 150分

$\boxed{1}$　xy 平面において，次の式が表す曲線をCとする。

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

PをC上の点とする。PでCに接する直線をlとし，Pを通りlと垂直な直線をmとして，x 軸と y 軸とmで囲まれてできる三角形の面積をSとする。PがC上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのPの座標を求めよ。

<解答>

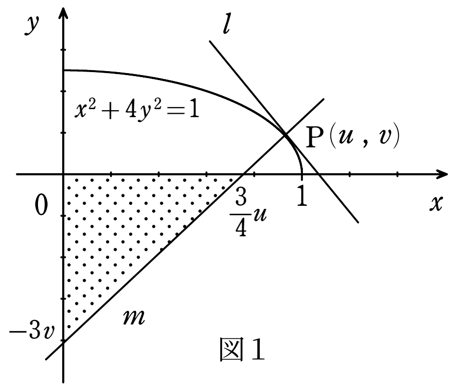


図1

点P$(u,\ v)$とする。ただし$u^2+4v^2=1$，$u>0$，$v>0$

$x^2+4y^2=1$ をx について微分すると，$2x+8yy'=0$,

$\therefore\ y'=-\dfrac{x}{4y}$，したがって接線$l$ の傾きは$-\dfrac{u}{4v}$

したがってl に垂直なm の傾きは $\dfrac{4v}{u}$

m の方程式は $y-v=\dfrac{4v}{u}(x-u)$，したがって $y=\dfrac{4v}{u}x-3v$

直線mとx 軸の交点のx 座標は $\dfrac{3}{4}u$，y 軸との交点のy 座標は $-3v$

したがって x 軸，y 軸，mとでできる三角形の面積 $S=\dfrac{9}{8}uv$

$u>0$，$v>0$だから｛uv が最大値 $\Leftrightarrow$ $(uv)^2$が最大値｝，そこで$(uv)^2$が最大値になる条件を考える。

$$(uv)^2=v^2(1-4v^2)=-\left(2v^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\leqq\frac{1}{16}$$

$v^2=\dfrac{1}{8}$のとき uv は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。すなわち $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$v=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のときS は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとる。

したがって S の最大値は $\dfrac{9}{32}$，そのときのPの座標は$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　（答）

<解説>

図を描いて問題の要点を把握する。与式をxで微分することにより，接線l の傾きを求め，垂直な直線m の傾きを求め，m の表式を求める。（直線の傾き）×（垂直な直線の傾き）＝－1であることを忘れてはならない。

uvの最大値を求めるために，$(uv)^2$の最大値を求めることがミソである。すると，与式の関係がそのまま使える。

$\boxed{2}$ xy 平面において，3 次関数$y=x^3-x$ のグラフをC とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域をD とする。また，P をD の点とする。

(1) P を通りC に接する直線が3 本存在することを示せ。

(2) P を通りC に接する3 本の直線の傾きの和と積がともに0 となるようなP の座標を求めよ。

<解答>

(1)

図１を参照する。P の座標を $(u\,,\,v)$ とする。

P$(u\,,\,v)$ は領域D に属するから，$u^3-u>v>-u$ ①

$y=x^3-x$ の点 $(a\,,\,b)$ とP$(u\,,\,v)$ を結ぶ直線は

$y=\dfrac{v-b}{u-a}(x-u)+v$ ②

$y=x^3-x$ の導関数は$y'=3x^2-1$,

$(a\,,\,b)$における接線の傾きは$3a^2-1$

②がC に接するためには,

$\dfrac{v-b}{u-a}=\dfrac{v-a^3+a}{u-a}=3a^2-1$

したがって，$2a^3-3a^2u+u+v=0$ ③

③の左辺を$f(a)=2a^3-3a^2u+u+v$とおいて,

$f'(a)=6a(a-u)$ だから，図２のように$f(a)$ は変化する。

①により，$f(0)=u+v>0$，$f(u)=-u^3+u+v<0$ である。

したがって，$f(a)$はx 軸と３つの点で交わるので，方程式③のaは３つの実数解をもつ。

すなわち，P から③を満たす３つの点 $(a\,,\,b)$ に接線を引くことができるから，P を通りC に接する直線が3 本存在する。

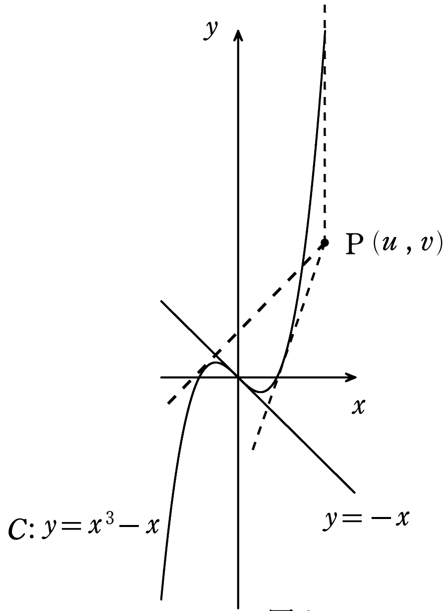


図１

a	$-\infty$		0		u		∞
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$-\infty$	↗	$+$	↘	$-$	↗	∞

図２

(2)

③の３つの解をp，q，r とする。すなわち，$2a^3-3a^2u+u+v=2(a-p)(a-q)(a-r)=0$

したがって，$p+q+r=\dfrac{3}{2}u$，$pq+qr+rp=0$，$pqr=-\dfrac{u+v}{2}$

傾きは，それぞれ，$3p^2-1$，$3q^2-1$，$3r^2-1$だから

傾きの和 $S=(3p^2-1)+(3q^2-1)+(3r^2-1)=3(p^2+q^2+r^2)-3=0$，$\therefore\ p^2+q^2+r^2=1$

傾きの積 $T=(3p^2-1)(3q^2-1)(3r^2-1)=27(pqr)^2-9\{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2\}+3(p^2+q^2+r^2)-1=0$

$p^2+q^2+r^2=(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)=\dfrac{9}{4}u^2=1$，$\therefore\ u>0$ だから $u=\dfrac{2}{3}$

$(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2=(pq+qr+rp)^2-2pqr(p+q+r)=\dfrac{3}{2}u(u+v)$

$T=\dfrac{27}{4}(u+v)^2-\dfrac{27}{2}u(u+v)+3-1=0$, $\therefore\ v^2-u^2=-\dfrac{8}{27}$, $v^2=-\dfrac{8}{27}+u^2=-\dfrac{8}{27}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{27}$

$v=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，しかるに①から$u^3-u=-\dfrac{10}{27}>v$だから，$v=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

したがってPの座標は$\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$　（答）

＜解説＞

(1)

接線が３本存在するということは，接点が３点あるということである。PとC上の点を直線で結んだとき，接線であるための条件は，その直線の傾きがその点の接線の傾きと一致することである。

そのようなC上の点が３点あるということを証明すれば良い。C上の点$(a, b)=(a, a^3-a)$のaが満たす条件が3次方程式となり，３つの実数解をもつことが解る。つまり接点が３点あるということになる。

(2)

aが満たす3次方程式の解と係数の関係，および傾きの和と積の条件から，点P(u, v)のu，vが満たすべき式を導き，u，vを求めれば良い。

$\boxed{3}$　サイコロを3回投げて出た目の数を順にp_1，p_2，p_3とし，xの2次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える。

(1) 方程式$(*)$が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式$(*)$が実数でない2つの複素数解α，βをもち，かつ$\alpha\beta=1$が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式$(*)$が実数でない2つの複素数解α，βをもち，かつ$\alpha\beta<1$が成り立つ確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

実数解をもつ条件は，解の判別式 $D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0$，$\therefore\ p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}$　①

$p_2\leqq 6$だから，$4\sqrt{p_1p_3}\leqq 6$，$\sqrt{p_1p_3}\leqq 1.5$，$\therefore (p_1, p_3)=(1, 1)$ or $(1, 2)$ or $(2, 1)$

ｉ) $(p_1, p_3)=(1, 1)$のとき①は$p_2\geqq 4$だから，$p_2=4, 5, 6$

$(p_1=1, p_3=1, p_2=4, 5, 6)$の場合の数は3通り

ii) $(p_1, p_3)=(1, 2)$ or $(2, 1)$のとき①は$p_2\geqq 4\sqrt{2}$だから，$p_2=6$

すなわち，$(p_1, p_3, p_2)=(1, 2, 6)$ or $(2, 1, 6)$の2通り

したがって①を満たす(p_1, p_3, p_2)の場合の数はｉ)とii)の場合の数の和 $3+2=5$通り

(p_1, p_3, p_2)の全体の場合の数は$6\times 6\times 6=216$通りだから，求める確率は$\dfrac{5}{216}$　（答）

(2)

　複素数解をもつ条件は，解の判別式 $D=p_2{}^2-16p_1p_3<0$，$\therefore\ p_2<4\sqrt{p_1p_3}$　②

また，$2p_1x^2+p_2x+2p_3=2p_1(x-\alpha)(x-\beta)$だから，$\alpha\beta=\dfrac{p_3}{p_1}=1$，$\therefore\ p_1=p_3$　③

すると②は，$p_2<4p_1$　④

$p_1\geqq 2$なら④ は常に成立，$p_1=1$ なら$p_2<4p_1=4$，$\therefore\ p_2=1$ or 2 or 3

以上をまとめると，

$(p_1\geqq 2,\ p_3=p_1,\ p_2\leqq 6)$の場合の数は30 通り

$(p_1=1,\ p_3=1,\ p_2=1$ or 2 or 3 $)$ の場合の数は3 通り

したがって，②，③を満たす$(p_1,\ p_3,\ p_2)$ の場合の数は，$30+3=33$通り

したがって，求める確率は$\dfrac{33}{216}=\dfrac{11}{72}$　（答）

(3)

　実数解をもつような$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数は5通り。

複素数解をもつような$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数は，全体の場合の数から実数解をもつ場合の数を引いたものだから，$216-5=211$通り

２つの複素数解の積 $\alpha\beta=1$となる場合の数は(2)から，33通りだから，$\alpha\beta<1$または $\alpha\beta>1$となる場合の数は，$211-33=178$通り。

　解の判別式の条件②はp_1，p_3を入れ替えても変わらない。

　また，$\alpha\beta=\dfrac{p_3}{p_1}$だから，$\alpha\beta<1$のときは $p_1>p_3$，$\alpha\beta>1$のときは $p_1<p_3$

したがって，$\alpha\beta<1$になるp_1，p_3を入れ替えると $\alpha\beta>1$になるから，$\alpha\beta<1$と$\alpha\beta>1$になる$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数は同じ。したがって，$\alpha\beta<1$となる$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数は$\dfrac{178}{2}=89$通り。

したがって，求める確率は $\dfrac{89}{216}$　（答）

＜解説＞

2次方程式の係数を確率的な変数として，ある条件を満たす解の実現確率を求めるという，少々工夫した問題。このような問題は筆者は経験がなかった。しかし，それほど難しい問題ではない。問題を読み進むうちに，（解の条件）→（係数が満たす条件）→（係数が取りえる場合の数）→（確率）という考え方の流れが見えてくるだろう。

(1)

解の判別式から，実数解をもつ条件を満たす係数の組合せ$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数を求めれば良い。

(2)

解の判別式から複素数解をもち，かつ２つの解の積が1となるような係数の組合せ$(p_1,\ p_3,\ p_2)$の場合の数を求めれば良い。

(3)

ここでは(1)，(2)の結果を利用して，場合の数を求めた。別解を示そう。

$\alpha\beta=\dfrac{p_3}{p_1}<1$, $\therefore\ p_1>p_3$ ⑤

したがって②，⑤を満たす確率を求めれば良い。

⑤を満たす最小のp_1p_3は$p_1p_3=2$，$(p_1,\ p_3)=(2,1)$，このとき②は$p_2<4\sqrt{2}$，$\therefore\ p_2\leqq 5$

このような$(p_1=2,\ p_3=1,\ p_2\leqq 5)$の場合の数は5 通り。

次に小さい$p_1p_3=3$，$(p_1,\ p_3)=(3,1)$，このとき②は$p_2<4\sqrt{3}$，$\therefore\ p_2\leqq 6$,

したがって，②，⑤を満たす$(p_1,\ p_3,\ p_2\leqq 6)$の場合の数は,

$(p_1\geqq 3,\ p_3=1,\ p_2\leqq 6)$，24通り

$(p_1\geqq 3,\ p_3=2,\ p_2\leqq 6)$，24通り

$(p_1\geqq 4,\ p_3=3,\ p_2\leqq 6)$，18通り

$(p_1\geqq 5,\ p_3=4,\ p_2\leqq 6)$，12通り

$(p_1=6,\ p_3=5,\ p_2\leqq 6)$，6通り

合せて84通り。したがって，求める確率は$\dfrac{5+84}{216}=\dfrac{89}{216}$　（答）

$\boxed{4}$　$a>0$を実数とする。$n=1,2,3,\cdots$に対し，座標平面の3点

$$(2n\pi,0),\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^{\alpha}}\right),\quad ((2n+1)\pi,0)$$

を頂点とする三角形の面積をA_nとし,

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\quad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1) $n=1,2,3,\cdots$に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$を求めよ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$を求めよ。

<解答>

(1)

$f(x)=\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$とおけば，$f'(x)=-ax^{-a-1}<0$，したがって$x>0$において$f(x)$は単調減少

したがって $2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ において

$x=2n\pi$のとき最大値$\dfrac{1}{x^a}=\dfrac{1}{(2n\pi)^a}$，$x=\{(2n+1)\pi\}^a$のとき最小値$\dfrac{1}{x^a}=\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}$，である。

また$\sin x \geqq 0$だから，$\dfrac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \dfrac{\sin x}{x^a} \leqq \dfrac{\sin x}{(2n\pi)^a}$

したがって，$\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx$

$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = 2$ だから，$\dfrac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq B_n \leqq \dfrac{2}{(2n\pi)^a}$

(2)

三角形の面積 $A_n = \dfrac{1}{2} \times \pi \times \dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} = \dfrac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$

したがって，$\dfrac{\pi(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} \leqq \dfrac{A_n}{B_n} \leqq \dfrac{\pi\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\times 2^a \times \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^a = \frac{\pi}{4}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\times 2^a \times \left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^a = \frac{\pi}{4}$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi}{4}$　（答）

(3)

(1)と同様に，$\dfrac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \dfrac{\sin^2 x}{x^a} \leqq \dfrac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}$ だから，

$\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx \leqq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx \leqq \frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$だから，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq C_n \leqq \dfrac{\pi}{2(2n\pi)^a}$

$\dfrac{(2n\pi)^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} \leqq \dfrac{A_n}{C_n} \leqq \dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$

(2)と同様の計算を経て，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n} = 1$　（答）

＜解説＞

(1)

$f(x) = \dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$ が単調減少関数であることから，$\dfrac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leqq \dfrac{\sin x}{x^a} \leqq \dfrac{\sin x}{(2n\pi)^a}$ を着想することがポイントである。

$x_1 \leqq x_2$において，$f(x) \leqq g(x)$ であれば，$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$ であることを利用する。

$\because\ h(x)=g(x)-f(x) \geqq 0$ であれば $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\{g(x)-f(x)\}dx \geqq 0$，$\therefore \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$

(2)，(3)

ていねいに計算を進めれば，問題なかろう。

$\boxed{5}$ $t>0$ を実数とする。 座標平面において，3点A $(-2,0)$，B $(2,0)$，P $(t,\sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺AB，BP，PA の中点をそれぞれM，Q，R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形ABP を線分MQ， QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

<解答>

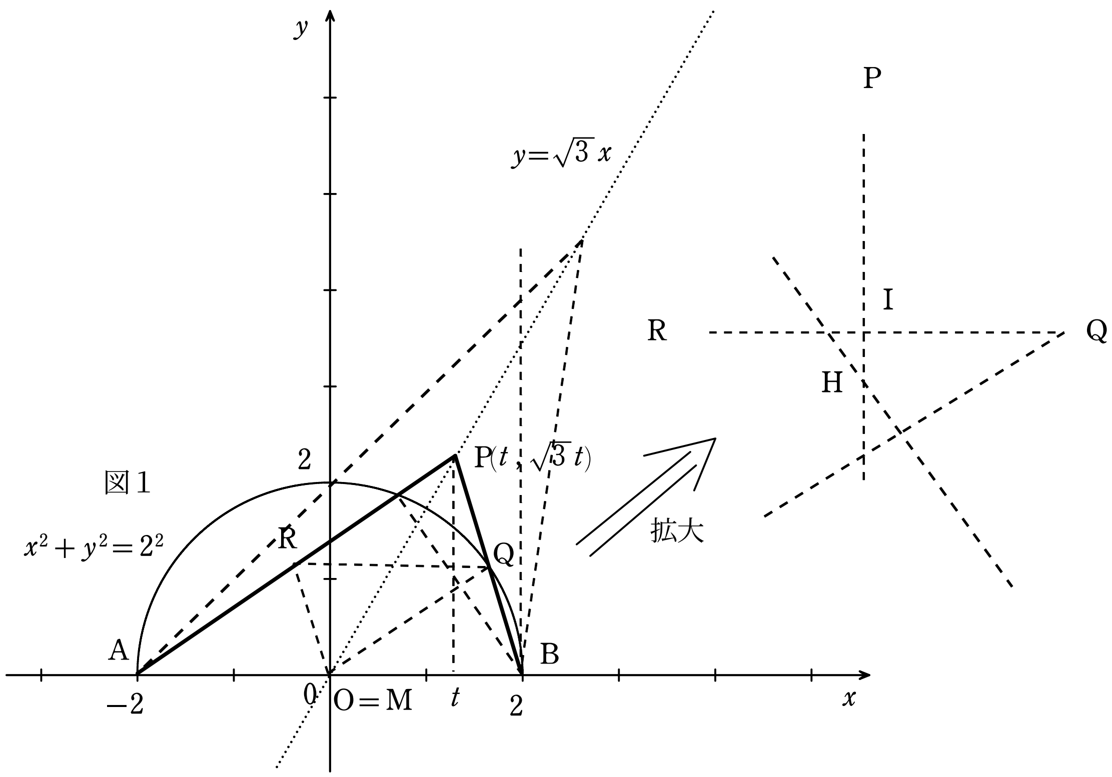
(1)

図１を参照する。$t>0$だから，∠PAB は鋭角

$t=2$のとき，∠PBA$=90°$ だから，$t<2$なら∠PBA は鋭角

∠APB $=90°$ となるのは，OA＝OB＝OP のときで，このとき$t=1$，$\therefore\ t>1$ならば∠APB は鋭角

以上によって $1<t<2$ のとき，三角形ABP は鋭角三角形



(2)

PA の傾きは$\dfrac{\sqrt{3}\,t}{t+2}$，したがってBを通りPA に垂直な直線の方程式は，$y=-\dfrac{t+2}{\sqrt{3}\,t}(x-2)$　①

Pを通りABに垂直な直線は$x=t$　②

①，②の交点，すなわち垂心Hの座標は$\left(t\,,\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}\,t}\right)$　（答）

(3)

線分RQで三角形PRQ を折り曲げると点P は点P を通り線分RQ に垂直な平面上にある。
線分OQ で三角形BQO を折り曲げると点B は点B を通り線分MQ に垂直な平面上にある。
この２つの平面が三角形MQR と交わる直線の交点が垂心H だから，４面体の頂点P（A，Bと一致）から底面三角形MQR に下した垂線はPHとなる。

直線RQと直線PHの交点Iの座標は$\left(t\,,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$\mathrm{IH}^2=\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{8-5t^2}{t}\right)^2$

$\mathrm{PI}^2=\left(\sqrt{3}\,t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2=\dfrac{3}{4}t^2$

したがって，４面体の頂点から底面三角形MQR までの高さをh として，

$h^2=\mathrm{PI}^2-\mathrm{IH}^2=\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{8-5t^2}{t}\right)^2=\dfrac{20t^2-16-4t^4}{3t^2}$，$h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3t}\sqrt{-t^4+5t^2-4}$

三角形MQRの面積は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\,t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

四面体の体積は，三角錐の体積として$V(t)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\times h=\dfrac{1}{3}\sqrt{-t^4+5t^2-4}$

$f(t)=-t^4+5t^2-4$とおく。$f'(t)=-4t^3+10t=-2t(2t^2-5)$，$f'(t)=0$となるのは$t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$f(t)$は図２のような変化をする。

t	1		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		2
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

図２

したがって，$t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$のとき，最大値$f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$をとる。

したがって四面体の体積の最大値は$V\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\sqrt{f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$　（答）

＜解説＞

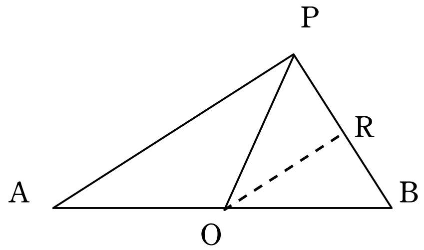
(1)

当たり前のことだが，鋭角三角形の定義を明確にしよう。三角形の３つの角すべてが，90°より小さい三角形ということである。図１のような図を描いて考える。すると，$t>0$だから直感的に∠PAB は鋭角であることがわかる。したがって，∠PAB が鋭角になる条件を議論する必要はない。

点P は直線 $y=\sqrt{3}x$　$(x>0)$　上を動く。P が$x=2$の直線上にあるとき，∠PBA は直角だから，90°より小さいためには，$t<2$が必要である。

次に，∠APB が鋭角になる条件を検討する。t が小さくなるにつれ，明らかに∠APB は大きくなる。だから，∠APB=90°になるt を求めればよい。∠APB =90° となるのは，OA=OB=OP のときとしたが，これは自明ではない。「OA=OB=OP ならば∠APB =90° 」は容易に証明できる。しかし「∠APB =90°ならばOA=OB=OP」をどのように示すか。しかし，この証明が問題ではないから，証明する必要はない。ここでは，解答のような記載で十分である。ちなみに，Oを通りAPと平行な直線とPB の交点をR とすれば，△OPR≡△ORBからOP=OB となる。

図１に示したように，Oを中心とした半径２(=OA=OB)の円を描く。点Pがその円の周上にあるなら，∠APB =90°だから，円外にあれば∠APBは鋭角となる。



(2)

垂心とは三角形の各頂点から対辺に下した垂線が交わる点である。３本の垂線は１点で交わる。ここでは，$x=t$ がP からAB への垂線であることが自明だから，垂心を求めることは容易である。もう１つの垂線との交点が垂心である。ここでは，B からAP へ下した垂線との交点を計算して垂心の座標を求めた。

(3)

四面体MQRP は三角形MQRを底面としP(=A=B)を頂点とする三角錐とみることができる。すると，三角錐の体積の公式が使える。頂点P と底面MQR との距離をどのようにして求めるか。(2)で垂心の座標を求めたので，頂点P から底面へ下した垂線は垂心を通るものと推定される。そのように考えれば，三角錐の高さは容易に求まる。

ただ，頂点P から底面へ下した垂線は垂心を通ることを説明する必要があるかどうか，説明がなければ，減点になるかも知れない。計算が煩瑣になるので，十分注意のこと。

$\boxed{6}$　$k\geqq 2$ とn を自然数とする。n がk 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$$

が成り立つような自然数m が存在するとき，n をk連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは１以上の整数のことである。

(1) n がk連続和であることは，次の条件(A)，(B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n がk連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を2 でない素数とする。$n=p^f$のとき，n がk連続和となるような自然数 $k \geqq 2$の個数を求めよ。

<解答>

(1)

n はk連続和であるとする。

すなわち，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ とおき，m は自然数とする。

$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)=km+\dfrac{(k-1)k}{2}$，$\therefore\ \dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m$

すなわち $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。したがって (A) が成り立つ。

さらに $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2n-k^2}{2k}+\dfrac{1}{2}=m \geqq 1$ だから， $2n > k^2$ である。すなわち (B) が成り立つ。

次に(A)，(B)が成り立つとする。

$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2n-k^2}{2k}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}$

(A) が成立していることから，自然数m を用いて，

$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m$ ① とおくことができる。

①を変形すると $n=km+\dfrac{(k-1)k}{2}=km+(1+2+\cdots+k-1)=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ ②

②はn がk 個の連続する自然数の和であることを示すから， n はk連続和である。

以上によって，n がk連続和であれば(A)，(B) が成り立ち，(A)，(B) が成り立てばn はk連続和である。したがって n がk連続和であることと (A)，(B)の両方が成り立つことは同値である。

(2)

$n=2^f$ のとき，n がk連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在するとする。

すると(A)が成り立つので，m を整数として $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m$ ③とおくことができる。

③を変形して，$2n=2^{f+1}=k^2-k+2mk=k(k-1+2m)$

kが偶数とすれば，$(k-1+2m)$は奇数である。$(k-1+2m)$が偶数とすればkは奇数である。

2^{f+1} は奇数を因数としてもたないので，これは矛盾である。すなわち③ は成立しない。

(A) が成立しないので，(1)の議論から，n がk連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しない。

(3)

nをk連続和とすれば，m を自然数として $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}=m$ とおくことができる。

これを変形して $2n=2p^f=k^2-k+2mk$，$k^2+(2m-1)k-2p^f=0$ ④

kに関する2次方程式 ④ の整数解の個数を考える。

④の解をα，βとすれば，解と係数の関係から，$\alpha+\beta=1-2m$，$\alpha\beta=-2p^f$

$f=f_1+f_2$としてα，βを整数解とすれば，$\alpha=2p^{f_1}$，$\beta=-p^{f_2}$または$\alpha=-2p^{f_1}$，$\beta=p^{f_2}$である。

ただし，f_1，$f_2=0, 1, \cdots, f-1, f$

$k\geqq 2$だから，$\alpha=2p^{f_1}\geqq 2$と$\beta=p^{f_2}\geqq 2$，したがって$f_1\geqq 0$，$f_2\geqq 1$

また，$2n=2p^f > k^2$だから，

$2p^f > \alpha^2=4p^{2f_1}$，したがって $p^f > 2p^{2f_1} > p^{2f_1}$，$\therefore f > 2f_1$，したがって$f_1<\dfrac{f}{2}$　⑤

$2p^f > \beta^2=p^{2f_2}$，したがって $p^f > \dfrac{1}{2}p^{2f_2} > p^{2f_2-1}$，$\therefore f > 2f_2-1$，したがって$f_2<\dfrac{f+1}{2}$　⑥

fが偶数，すなわち$f=2i$　$(i=1, 2, \cdots)$のとき，

⑤は，$f_1<\dfrac{f}{2}=i$，$\therefore f_1=0, 1, 2, \cdots, i-1$，したがって$f_1$の個数は$i$

⑥は，$f_2<\dfrac{f+1}{2}=\dfrac{2i+1}{2}=i+\dfrac{1}{2}$，$\therefore f_2=1, 2, \cdots, i$，したがって$f_2$の個数は$i$

したがって，kの個数，すなわちαとβの個数の和は$2i=f$

fが奇数，すなわち$f=2i-1$　$(i=1, 2, \cdots)$のとき，

⑤は，$f_1<\dfrac{f}{2}=i-\dfrac{1}{2}$，$\therefore f_1=0, 1, 2, \cdots, i-1$，したがって$f_1$の個数は$i$

⑥は，$f_2<\dfrac{f+1}{2}=\dfrac{2i-1+1}{2}=i$，$\therefore f_2=1, 2, \cdots, i-1$，したがって$f_2$の個数は$i-1$

したがって，kの個数，すなわちαとβの個数の和は$2i-1=f$

以上によって，自然数$k\geqq 2$の個数はf

＜解説＞

(1)

「同値である」ことの意味を理解していなければならない。「命題Pと命題Qが同値である」とは，「命題Pが成り立てば命題Qが成り立つ，逆に命題Qが成り立てば命題Pが成り立つ」ということである。命題Pと命題Qは互いに必要十分条件の関係である。したがって，ここでは命題「nがk連続和であること」と，命題「(A)，(B)が両方成り立つこと」が必要十分条件の関係にあることを証明する。

解法のポイントはk連続和とは，初項m，公差1，項数kの等差数列の和ということに気づくことである。

(2)

命題を証明するとき，背理法を用いることが有効である。

(3)

kが2次方程式④の解であることを着想することが解答への道である。次に解と係数の関係によって，２つの解の積の形式が解の個数を示唆することに着眼することがポイントである。

$f=f_1+f_2$とし，α，βを整数解として，$\alpha\beta=-2p^f$から$(\alpha, \beta)=(2p^{f_1}, -p^{f_2})$または$(-2p^{f_1}, p^{f_2})$とおいた。このような$\alpha$，$\beta$が④の解となりえるかどうか確認しておこう。

$(\alpha, \beta)=(2p^{f_1}, -p^{f_2})$のとき，$f_1<\dfrac{f}{2}$で，$f=2i$あるいは$f=2i-1$として，$f_1\leqq i-1$

解と係数の関係，$\alpha+\beta=1-2m$によって

$$m=\frac{1-\alpha-\beta}{2}=\frac{1-2p^{f_1}+p^{f-f_1}}{2}>\frac{1-2p^{i-1}+p^{i+1}}{2}\geqq\frac{1-2p^{i-1}+p^2p^{i-1}}{2}>1 \quad (f=2i)$$

$$m=\frac{1-\alpha-\beta}{2}=\frac{1-2p^{f_1}+p^{f-f_1}}{2}>\frac{1-2p^{i-1}+p^{i}}{2}\geqq\frac{1-2p^{i-1}+pp^{i-1}}{2}\geqq1 \quad (f=2i-1)$$

のように自然数mを決めることができるから，α，βは④の解となる。

$(\alpha,\beta)=(-2p^{f_1},\ p^{f_2})$のとき，$f_2<\dfrac{f+1}{2}$で，$f=2i$のとき$f_2\leqq i$，$f=2i-1$のとき$f_2\leqq i-1$

$$m=\frac{1-\alpha-\beta}{2}=\frac{1+2p^{f-f_2}-p^{f_2}}{2}>\frac{1+2p^{i}-p^{i}}{2}=\frac{1+p^{i}}{2} \quad (f=2i)$$

$$m=\frac{1-\alpha-\beta}{2}=\frac{1+2p^{f-f_2}-p^{f_2}}{2}>\frac{1+2p^{i}-p^{i-1}}{2}>\frac{1+p^{i}}{2} \quad (f=2i-1)$$

のように自然数mを決めることができるから，α，βは④の解となる。

＜総評＞

例年のように，６問に難易がバランスよく含まれている。ざっと問題文に目を通し，容易なもの，得意とするものから手をつけたい。確率の問題は解答方針の着想が必要なだけに，例年は難問なのだが，今年は標準的なレベルである。

私が手をつけたい順序は$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ であった。

$\boxed{1}$

図を描いて題意を把握すれば，大きな困難なく正答への道を辿ることができるだろう。この問題を着実に解いて，落ち着きたいところだ。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

大雑把にグラフを描いて題意を把握する。題意は簡明だから，解答方針の着想に困難はあまりないだろう。(1) の証明問題は，Ｐから曲線Cへの接線が３本あるということは，接点が３点あるということを証明すれば良い，という方針を立てれば良い。

(2)は計算がやや煩雑だからミスがないように注意する。難易度Ｂ

$\boxed{3}$

確率の問題。2次方程式の係数が確率変数となっており，条件を満たす解の実現確率を求める。工夫された問題である。確率の問題は，解答方針を立てるために，着眼着想が必要になり，個別性が高いため，入試問題としては難問になる傾向がある。しかし，本問は難問ではない。解説に記載したように，問題を読み進むうちに考え方の流れが浮かんでくる。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

一見煩雑そうな問題だが，グラフを描いて題意を把握すれば，解答方針の着想が浮かび，難しい計算もなく，順調に解答できるのではないか。難易度はＢ－。

$\boxed{5}$

題意は簡明であり，(1)，(2)は容易である。(3)はやや難しい。計算ミスをしないように気をつけること。難易度はＢ＋。

$\boxed{6}$

整数の問題で，解答方針の着想が必要である。数学的論理力を問う難問である。(1)はnの表式が等差数列の和であること，(A)の表式を変形すると等差数列の和の公式を含むこと，などに着眼すると，意外に容易に扱えることが解る。(2)は背理法を使う，と閃けば，証明は難しくなかろう。(1)，(2)は難易度B。

(3)は解答方針の着想が難しい。唸っているだけで，どんどん時間が過ぎそうな問題である。kが2次方程式の解であること。そして解と係数の関係から解の表式に気づけば，意外に容易に解答への思考を進めることができる。難易度A。

160108

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$ 次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3$$
$$a_{n+1}>a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a^2{}_{n+1}=3(a_n+a_{n+1}) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) $n=1,2,3,\cdots$に対し，a_n+a_{n+2}をa_{n+1}を用いて表せ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

＜解答＞

(1)

$a^2{}_n-2a_na_{n+1}+a^2{}_{n+1}=3(a_n+a_{n+1})$ ①

①から，$a^2{}_{n+1}-2a_{n+1}a_{n+2}+a^2{}_{n+2}=3(a_{n+1}+a_{n+2})$ ②

①−②から，$a^2{}_n-a^2{}_{n+2}-2a_{n+1}(a_n-a_{n+2})=3(a_n-a_{n+2})$，$a_{n+2}>a_n$だから，

$a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}=3$，$\therefore a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+3$ ③ （答）

(2)

③を変形して，$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+3$，$\therefore b_{n+1}=b_n+3$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$b_{n+1}-b_n=3$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=3n$，$\therefore b_{n+1}=b_1+3n$

①で$n=1$として，$a_1{}^2-2a_1a_2+a^2{}_2=3(a_1+a_2)$，$a_1=3$として，$9-6a_2+a^2{}_2=9+3a_2$，$\therefore a_2=9$

$b_1=a_2-a_1=6$，したがって$b_{n+1}=b_1+3n=3n+6$，

$\therefore b_n=3(n-1)+6=3(n+1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ （答）

(3)

$b_n=a_{n+1}-a_n$ から，$a_{n+1}-a_n=3(n+1)$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1=3\sum_{k=1}^{n}(k+1)=3n+\frac{3}{2}n(n+1)=\frac{3}{2}n(n+3)$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{3}{2}n(n+3)+a_1=\frac{3}{2}n(n+3)+3$，したがって $a_n=\frac{3}{2}n(n+1)$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$　（答）

＜解説＞

(1)

①式から②式を導く。両者の差分をとることにより，a_{n+2}を含む関係式を導くことができる。

(2)

b_nは初項6，公差3の等差数列の第n項に相当する。

(3)

b_nはa_nの階差数列である。

$\boxed{2}$　理系の問題$\boxed{5}$と同じである。そちらを参照のこと。

$\boxed{3}$　理系の問題３(1)，(2)と同じである。そちらを参照のこと。

$\boxed{4}$　$a>0$を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を$M(a)$ とする。

(1) $M(a)$を求めよ。

(2) 実数$x>0$に対し，$g(x)=M(x)^2$とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，

$$k=\frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$f'(t)=-12t^2+(a+3)=0$の解は，$t=\pm\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}$

$0\leqq\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}<1$のとき $f(t)$は図１のように変化する。

ただし $0\leqq\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}<1$となるのは $0<a<9$

$0<a<9$のとき $M(a)=f\left(\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}\right)=\frac{(a+3)\sqrt{3(a+3)}}{9}$　（答）

$9\leqq a$のとき $1\leqq\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}$だから，$M(a)=f(1)=a-1$　（答）

t	0		$\frac{\sqrt{3(a+3)}}{6}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

図１

(2)

$g(x)=M(x)^2=\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^3 \quad (0<x<9)$

$g(x)=M(x)^2=(x-1)^2 \quad (9\leqq x)$

$0<x<9$のとき

$g(x)=M(x)^2=\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^3$，$g'(x)=\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^2$，

したがって点$(s,\ g(s))$において$y=g(x)$に接する直線は $y-g(s)=g'(s)(x-s)$

原点を通るので $g(s)=sg'(s)$，したがって $\left(\dfrac{s+3}{3}\right)^3=s\left(\dfrac{s+3}{3}\right)^2$，$\therefore\ s=\dfrac{3}{2}$，$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$

$9\leqq x$のとき

$g(x)=M(x)^2=(x-1)^2$，$g'(x)=2(x-1)$，

$g(s)=sg'(s)$から，$(s-1)^2=2s(s-1)$，$9\leqq s$を満たすsは存在しない。

以上によって，$(s,\ g(s))$において$y=g(x)$に接する直線は，$s=\dfrac{3}{2}$で傾きは$\dfrac{9}{4}$　（答）

(3)

$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$を変形して，$k^2a=M(a)^2$　①

①は$(a,\ y)$平面において，原点を通る直線$y=k^2a$と曲線$y=M(a)^2$が共有点をもつことを意味する。

$0<a<9$のとき

$k^2a=M(a)^2=\left(\dfrac{a+3}{3}\right)^3$

$y=k^2a$ が$y=M(a)^2$ に接するとき傾きk^2 が最小になる。このとき(2)で求めたように $k^2=\dfrac{9}{4}$

$k>0$だから $k=\dfrac{3}{2}$

$9\leqq a$のとき

$k^2a=M(a)^2=(a-1)^2$，傾きk^2 が最小になるのは，$y=k^2a$が$(9\ ,\ M(9))$を通るときで，$k^2=\dfrac{64}{9}$

以上によって，k の最小値は $\dfrac{3}{2}$　（答）

＜解説＞

(1)

極値を与えるt がaの値によって異なる。それが$0\leqq t\leqq 1$に入るかどうかで，場合分けして考えなければならない。

(2)

　$9 \leqq x$において原点を通り$g(x)$ に接する直線は存在しない。

(3)

　多くの場合，項番のある問題は誘導的にできている。(2)を利用することに気づく必要がある。①式のように変形すれば，(2)を利用することができる。

　(2)を利用することに気づかない場合のために別解を示そう。一般的な方法である。

$$k(a)=\frac{M(a)}{\sqrt{a}}=\frac{(a+3)\sqrt{3(a+3)}}{9\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{\frac{(a+3)^3}{a}} \qquad (0<a<9)$$

$$k(a)=\frac{M(a)}{\sqrt{a}}=\frac{(a-1)^2}{\sqrt{a}} \qquad (9 \leqq a)$$

　$0<a<9$のとき

　$k'(a)=\frac{\sqrt{3}}{9}\times\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}(a+3)^{\frac{1}{2}}(3-a^{-1}(a+3))=0$とすれば，$a=\frac{3}{2}$

　$k(a)$は図２のように変化する。$k\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

a	0		$\frac{3}{2}$		9
$k'(a)$		−	0	+	
$k(a)$		↘	$\frac{3}{2}$	↗	

図２

　$9 \leqq a$のとき

　$k'(a)=\frac{\sqrt{3}}{9}\times 2a^{-\frac{1}{2}}(a-1)\left(1-\frac{1}{2}a^{-1}(a-1)\right)>0$だから，$k(a)$は単調増加する。$k(9)=\frac{8}{3}$

　以上によって，kの最小値は$\frac{3}{2}$　（答）

＜総評＞

　文系の問題としては，数学的着想力，思考力，計算力を問うレベルの高い問題がそろっている。

$\boxed{1}$

　数列の基礎的な問題。着実に解答したい。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

　(1)，(2)は着実に解答したい。(3)はやや難しい。(1)，(2)は難易度Ｂ－。(3)は難易度Ａ－。

$\boxed{3}$

　2次方程式の３つの係数が確率変数となっている。条件を満たす確率変数の場合の数を求める。確率の問題としては，例年に比して容易である。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$

　2次，3次関数の微分や極値の問題。着想や思考力を必要とするので，文系の受験者には難しいところがあるかも知れない。難易度Ｂ＋。

160112