2015（H27）年度　東京工業大学　入学試験　物理解説

$\boxed{1}$ (50点)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　120分

＜解答＞

[A] (a)

おもりA が及ぼす棒に平行な力を T とすれば，おもりA が棒から受ける力は$-T$，

おもりA に働く重力の棒に平行な成分は $Mg\cos\theta$

したがって，おもりA の円運動の方程式は $-\dfrac{Mv^2}{l}=-T+Mg\cos\theta$

したがって，$T=\dfrac{Mv^2}{l}+Mg\cos\theta$　（答）

(b)

棒S にはたらく力のつりあいの式は $F_0+F_1=F_2$　（答）

原点O のまわりの力のモーメントのつりあいの式は $F_1l+F_2l=0$　（答）

(c)

棒と垂直な方向のおもりA の運動方程式 $Ma=2ma=-F_1-2mg\sin\theta$　①　（答）

おもりB の加速度はA と同じだから

棒と垂直な方向のおもりB の運動方程式 $ma=-F_2+mg\sin\theta$　②　（答）

(d)

①＋②により，$3ma=-(F_1+F_2)-mg\sin\theta$，(b)から $F_1+F_2=0$ だから，

$a=-\dfrac{1}{3}g\sin\theta$　（答）

(e)

θ が十分小さいとき，$\sin\theta\fallingdotseq\theta\fallingdotseq\dfrac{x}{l}$

したがって，$a=-\dfrac{1}{3}g\sin\theta\fallingdotseq-\dfrac{1}{3}g\theta\fallingdotseq-\dfrac{1}{3}\dfrac{gx}{l}$，$\therefore$ ア$=-\dfrac{g}{3l}$　（答）

$a=-\dfrac{1}{3}g\sin\theta\fallingdotseq-\dfrac{1}{3}g\theta\fallingdotseq-\dfrac{g}{3l}x$

加速度が変位に比例し，方向が変位と逆方向である場合は単振動する。

その周期は イ$=2\pi\sqrt{\dfrac{3l}{g}}$　（答）

[B] (f)

衝突前後の運動エネルギー の保存の法則は

$\dfrac{mu^2}{2}+\dfrac{Mv^2}{2}+\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{mu'^2}{2}+\dfrac{Mv'^2}{2}+\dfrac{mv'^2}{2}$　（答）

これを変形して，$m(u+u')(u-u')=(M+m)(v'+v)(v'-v)$

一方$u-v=v'-u'$だから，$u+u'=v+v'$であるので，$m(u-u')=(M+m)(v'-v)$，

これを変形すれば $(M+m)v+mu=(M+m)v'+mu'$

(g)

$u-v=v'-u'$および $(M+m)v+mu=(M+m)v'+mu'$から

$v'=\dfrac{Mv+2mu}{M+2m}=\dfrac{2mv+2mu}{2m+2m}=\dfrac{u+v}{2}$，$u'=\dfrac{3v-u}{2}$

衝突直後の回転子R全体の運動量の大きさは，

$(M-m)v'=\dfrac{(2m-m)(u+v)}{2}=\dfrac{m(u+v)}{2}$　（答）

衝突直後の物体Cの運動量はmu'，衝突前後の回転子Rと物体Cの運動量変化は

$$\{(M-m)v'+mu'\}-\{(M-m)v+mu\}=\frac{m(u+v)}{2}+\frac{m(3v-u)}{2}-mv-mu$$
$$=mv-mu=-m(u-v)<0$$

力積は運動量の変化である。RとCの運動量が衝突によって負方向に力積を受けたということは，作用反作用の法則により，釘に与えられた力積は $m(u-v)$　（答）

(h)

重力の位置エネルギーの基準位置を$z=0$にとる。

衝突前，回転子Rが周期的な運動をしていたとき

おもりAが最低点にいたとき

運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}(M+m)v^2=\dfrac{3}{2}mv^2$

位置エネルギーは$-Mgl+mgl=-mgl$

おもりAのz座標が最大値$-\dfrac{1}{2}l$に達したとき，おもりBのz座標は$\dfrac{1}{2}l$

位置エネルギーは $-\dfrac{1}{2}Mgl+\dfrac{1}{2}mgl=-\dfrac{1}{2}mgl$

エネルギー保存の法則により $\dfrac{3}{2}mv^2-mgl=-\dfrac{1}{2}mgl$，$v^2=\dfrac{gl}{3}$，$\therefore\ gl=3v^2$

衝突直後の回転子Rについて

運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}(M+m)v'^2=\dfrac{3}{2}mv'^2$

位置エネルギーは$-Mgl+mgl=-mgl$

おもりAのz座標が最大値$\dfrac{1}{8}l$に達したとき，おもりBのz座標は$-\dfrac{1}{8}l$,

位置エネルギーは$\dfrac{1}{8}Mgl-\dfrac{1}{8}mgl=\dfrac{1}{8}mgl$

エネルギー保存の法則により， $\dfrac{3}{2}mv'^2-mgl=\dfrac{1}{8}mgl$，$v'^2=\dfrac{3}{4}gl=\dfrac{9}{4}v^2$,

$\therefore\ v'=\dfrac{3}{2}v$　（答），(g)において $v'=\dfrac{u+v}{2}$だから，$u=2v'-v=2v$　（答）

$u'=\dfrac{3v-u}{2}$だから，$u'=\dfrac{3v-u}{2}=\dfrac{1}{2}v$　（答）

＜解説＞

[A](a)

円運動の方程式を考えることが基本である。ここでは問題文にあるように，原点OからおもりAに向かう向きを正として考える。

おもりAが棒に及ぼす力の棒に平行な成分をTとすれば，作用反作用の法則により，棒がおもりに及ぼす力は$-T$であることに注意する。また円運動の方程式は，

向心力＝（質量）×（中心方向の加速度）＝中心方向に働く力

中心方向に働く力＝（おもりに働く重力の成分）＋（おもりに働く棒の力）

＝（おもりに働く重力の成分）＋（－おもりが棒に及ぼす力＝$-T$）

(b)

問題図２に表示されたような力がなぜ存在するのかなど，問題の意図を考えると難しくなる。参考の記述も理解しづらい。単純に問題図に表示された力やモーメントのつりあいを記述すれば良い。

(c)

F_1，F_2はおもりA，Bが棒に及ぼす力だから，作用反作用の法則から棒がA，Bに及ぼす力はそれぞれ$-F_1$，$-F_2$であることに注意する。おもりの運動方程式では，おもりに働く力を記述する必要がある。

(d)

(e)

変位xが単振動するとき，その角振動数をωとして，$x=x_0\cos\omega t$とおけば，

$-x_0\omega^2\cos\omega t=-\dfrac{g}{3l}x_0\cos\omega t$，$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{3l}}$，

したがって振動の周期は$\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{3l}{g}}$，∴ イ$=2\pi\sqrt{\dfrac{3l}{g}}$

[B] (f)

$u-v=v'-u'$ということは反発係数$e=\dfrac{|u'-v'|}{|u-v|}=1$だから，この衝突は弾性衝突で，運動エネルギーの保存の法則が成立する。

(g)

運動量保存の法則によりこの系全体の衝突前後の運動量は保存されなければならない。ところが，回転子Rと物体Cの運動量は衝突前後では保存されない。ということは，衝突前後の運動量の差分がどこかに与えらるということである。それが釘に当たられた運動量変化で力積に相当する。

力積は衝突前後の運動量の変化である。

回転子に与えられた力積は，$\dfrac{m(u+v)}{2}-mv=\dfrac{m(u-v)}{2}$

物体Cの衝突前の運動量はmu，衝突後の運動量はmu'

物体Cに与えられた力積は$mu'-mu=-\dfrac{3m(u-v)}{2}$

力積の和は$-m(u-v)$

(h)

おもりのz座標が最大値に達したということは，その点でおもりの速さが0になったということである。したがって，運動エネルギーは0である。

$\boxed{2}$（50点）

＜解答＞

［A］(a)

コンデンサーの容量は$C=\dfrac{\varepsilon_0 A}{z}$，上極板の電位$V=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{zQ}{\varepsilon_0 A}$　（答）

極板間の電場の強さ$E=\dfrac{V}{z}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$　（答）

(b)

コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーは$U=\dfrac{1}{2}QV=\dfrac{zQ^2}{2\varepsilon_0 A}$　（答）

(c)

上極板の加速度をa，糸の張力をT，電荷により極板が引きあう力をF_Eとすれば，上極板の運動方程式は $ma=T-mg-F_E$，$a=0$だから，$T=mg+F_E$

極板がΔz上昇したとき，静電エネルギーは$\Delta U=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\Delta z$増加する。このエネルギー増加は，$F_E$に抗してした仕事に等しいから，$F_E\Delta z=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\Delta z$，∴ $F_E=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$

したがって$T=mg+F_E=mg+\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$　（答）

(d)

放電によって発生するジュール熱は上極板が$z=h$のときにコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーに等しい。したがって(b)の答で $z=h$として $\dfrac{hQ^2}{2\varepsilon_0 A}$　（答）

［B］

(e)

動いている電荷Qに働く磁場Bの力は，ローレンツ力として y方向へ $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}QB$

したがって装置のy方向への運動方程式は $M\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{\Delta z}{\Delta t}QB$，∴ $\dfrac{\Delta v}{\Delta z}=\dfrac{QB}{M}$

$\dfrac{\Delta v}{\Delta z}=\dfrac{QB}{M}=$ア　（答）　$v=\dfrac{QB}{M}z=$イ　（答）

(f)

装置のy方向移動により，電荷もy方向に移動するから，電荷すなわち上極板には下方へローレンツ力vBQが働く。その大きさが張力の増加T_eに等しいから，

$T_e=\dfrac{z(QB)^2}{M}$　（答）

(g)

(e)の結果から，$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{hB}{M}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$，∴ $\dfrac{\Delta v}{\Delta Q}=\dfrac{hB}{M}=$ウ　（答）

放電が始まった瞬間は$z=h$だからイにおいて$z=h$として，$\dfrac{v}{Q}=\dfrac{hB}{M}=$エ　（答）

ウから$v=\dfrac{hB}{M}Q+Const.$であるがエにより$Const.=0$,

したがって$Q=0$のとき$v=0=$オ　（答）

(h)

$$v=\frac{hB}{M}Q=\frac{hB}{M}CV=\frac{hB}{M}\times\frac{\varepsilon_0 A}{h}V_h=\frac{\varepsilon_0 ABV_h}{M}$$

与えられた数値を代入し計算すると，$v=8.85\times10^{-9}$ m/s　（答）

＜解説＞

[A] (a)

コンデンサーの容量，上極板の電位，そして極板間の電場の強さを求める。

(b)

コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの公式は覚えていなければならない。

(c)

一定の速度で上昇しているということは，加速度が働いていない，すなわち力がつり合っているということである。上極板に鉛直下方に働く力＝鉛直上方に働く力。

帯電している極板間に働く力を求めなければならない。静電エネルギーの増加が極板間の引力に抗してした仕事に等しいと考えることにより，引力を求めることができる。これは教科書の練習問題に記載されている。

(a)で極板間の電場の強さEを求めたのだから，直感的に上極板に働く力はQEとしたいところだ。しかし$F_E=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}=\dfrac{Q}{2}\dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}=\dfrac{1}{2}QE$である。電場の強さ$E$は下極板の電荷$-Q$の寄与，上極板の電荷$Q$の寄与の両者の和であることから，上極板に働く引力は$\dfrac{1}{2}QE$となると理解する。

(d)

静電エネルギーは放電によって0となり，すべてジュール熱に変わる。

[B]

(e)

上極板の上昇とともに，そこに蓄えられている電荷が上昇するので，電荷にローレンツ力が働く。その力が上極板に働き，装置全体がy方向に移動する。

(f)

エネルギー保存の法則を利用した別解を示す。

装置の運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}Mv^2$，これは上極板を上昇させるのに要した仕事に等しい。

上昇距離zでの張力の増加を$T_e(z)$とする。微小距離移動Δzによる仕事が$T_e(z)\Delta z$だから，

zまでの移動により増加した張力がする仕事は

$$\int_0^z T_e(z)dz=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{QBz}{M}\right)^2,\quad \therefore T_e(z)=\frac{z(QB)^2}{M}\quad（答）$$

(g)

極板の電荷が放電によってz軸負方向に流れると，ローレンツ力がy軸負方向に働く。

したがって装置は減速し，放電が終了したとき静止する。

(h)

数式を整理してから，与えられた数値を代入して計算する。観測することが難しいほどの小さな速度である。

$\boxed{3}$ (50点)

＜解答＞

[A] (a)

点P $(\sqrt{3}\lambda, \lambda)$で水面の変位は正弦波の変化をし，$t=0$で変位は山であるから，

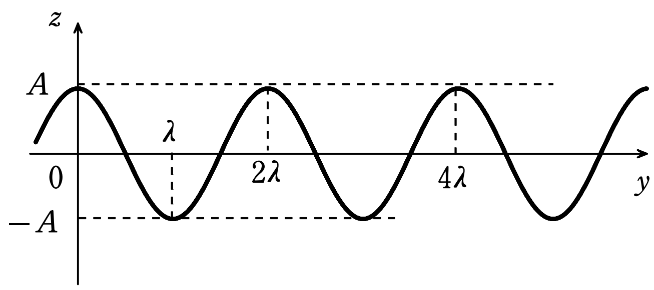
$z_p = A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$　（答）

(b)

山の波面の進行速度は $v=\dfrac{\lambda}{T}$

$v_x = v\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v = \dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2T}$　（答），$v_y = v\sin 30° = \dfrac{1}{2}v = \dfrac{\lambda}{2T}$　（答）

(c)



[B] (d)

時刻t，点P $(\sqrt{3}\lambda, \lambda)$において，

x軸方向に対して30°の向きに進む平面波の変位は(a)から$A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$

y軸方向に進む平面波の変位は，問題図２から同様に，$A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$

水面の変位は両者の和だから，$z_p = A\cos\dfrac{2\pi t}{T} + A\cos\dfrac{2\pi t}{T} = 2A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$　（答）

(e)

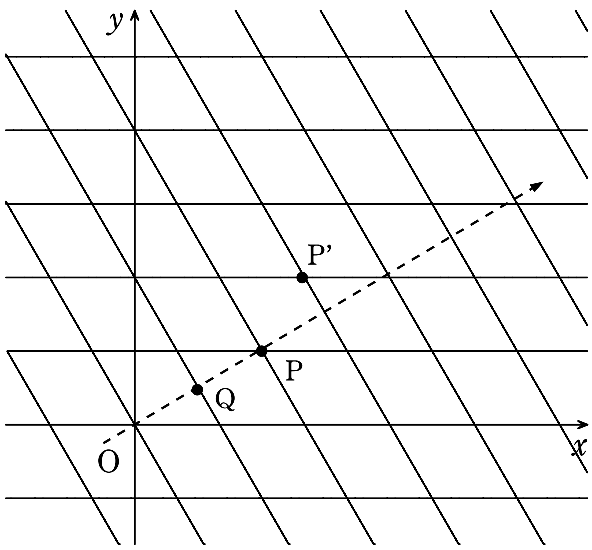
時刻 t，点 Q$\left(\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \dfrac{\lambda}{2}\right)$において，問題図２から

x軸方向に対して30°の向きに進む平面波の変位は山だから，$A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$

y軸方向に進む平面波の変位は谷だから，$-A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$

z_Qは両波の和だから，$z_Q = A\cos\dfrac{2\pi t}{T} - A\cos\dfrac{2\pi t}{T} = 0$　（答）

(f)



(g)

点P にある高い山は一定速度で移動し，時間T後に点P'$\left(\sqrt{3}\lambda+\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}},2\lambda\right)$に至る。

時間Tでx方向に$\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}}$移動したから，高い山の移動速度の$x$向成分は$\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}\,T}$　（答）

y方向にλ移動したから，y方向成分は$\dfrac{\lambda}{T}$　（答）

[C](h)

$t=0$でP にあった高い山は$t=T$で隣の山の波面の交点に移動する。$t=2T$でさらに隣の山の波面の交点に移動する。すると，交点のx座標の間隔は次第に狭くなることがわかる。

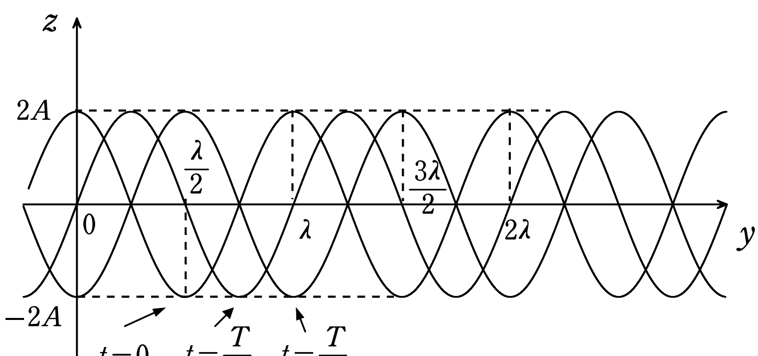
したがって，高い山の移動速度のx成分は次第に小さくなる。しかし，0より小さくなることはない。これを満たすのは ⑥　（答）

交点のy座標の間隔は一定である。したがって速度のy成分は一定である。これを満たすのは ⑦　（答）

(i)

問題図３上で高い山の点の位置となる球面波と平面波の交点をたどると，x方向の間隔は次第に狭くなり，y方向は一定の間隔だから，高い山の描く軌跡は ②　（答）

(ii)



<解説>

[A](a)

厳密には以下のような考え方となる。

山の波面は$y=-\sqrt{3}\,x+C$と表される。ただしCは一定値。すなわち$y+\sqrt{3}\,x=C$を満たす点$(x\,,\,y)$が同一波面となる。波の進行方向と波面は垂直だから，問題図１で原点から山の波面までの距離は，波面上の点$(x\,,\,y)$を用いると$\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2}=\dfrac{C}{2}$

したがって，波の式は$z=A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2\lambda}+b\right)$

$t=0$，$(0\,,0)$で$z=A$だから$A=A\sin 2\pi b$，$b=\dfrac{1}{4}$とおけるから，

$z=A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2\lambda}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right\}=A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2\lambda}\right)$

したがって時刻tでの点P$(\sqrt{3}\,\lambda\,,\,\lambda)$における水面の変位は，$x=\sqrt{3}\,\lambda$，$y=\lambda$として

$z_p=A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{3\lambda+\lambda}{2\lambda}\right)=A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-2\right)=A\cos\dfrac{2\pi t}{T}$　（答）

しかし，このような波の式を求めることは，高校物理の範囲外だから，解答のように問題図１から点Pの変位は$t=0$のとき山であるとして求めれば良い。

(b)

波の進行方向の速度からx方向成分，y方向成分を求めれば良い。

(c)

問題図１における山の波面となる直線の式は

$y=-\sqrt{3}\,x+C_m$　$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$とおける。$C_m$は$y$軸上の山の位置である。

$m=2$のとき点P$(\sqrt{3}\,\lambda\,,\,\lambda)$を通るから，$C_2=4\lambda$である。したがって，$C_m=2m\lambda$

y軸上での波形は$y=0\,,\pm 2\lambda\,,\ \pm 4\lambda\,,\cdots$において山となる正弦波である。

B(d)

問題図２から点Pでは両波とも山である。

(e)

問題図２から点Qでは，x軸方向に対して30°の向きに進む平面波は山，y軸方向に進む平面波は谷であることがわかる。

これも厳密に考えると，以下のようになる。しかし高校物理の範囲外である。

時刻t，点Q$\left(\dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2},\dfrac{\lambda}{2}\right)$において，問題図２から

x軸方向に対して30°の向きに進む平面波は$A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2\lambda}\right)$

y軸方向に進む平面波は$z=A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{y}{\lambda}\right)$

両波の和は$z=A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{\sqrt{3}\,x+y}{2\lambda}\right)+A\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{y}{\lambda}\right)$　①

点Q$\left(\dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2}\,,\dfrac{\lambda}{2}\right)$における水面の変位は，①において$x=\dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2}$，$y=\dfrac{\lambda}{2}$として

$$z_Q = A\cos\frac{2\pi t}{T} + A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) = A\cos\frac{2\pi t}{T} - A\cos\frac{2\pi t}{T} = 0 \quad \text{（答）}$$

(f)

一周期の時間T が経過すると両波とも１波長進行する。すなわちx軸方向に対して30°の向きに進む平面波は右上方向へ，y軸方向に進む平面波は上へ動くので，点P は図のP’へ移動する。

(g)

(f)が本問への誘導となっている。点P にある高い山は両波面の交点である。山の波面は一定の速度で移動するから，その交点も一定の速度で移動する。

点P’の座標は図から明らかである。時間T後にPからP’に移動したのだから，各方向への移動距離をTで割れば良い。

(h)

問題図３上に点P にあった高い山が時間T経過するごとに移動する点を追ってゆけば明らかとなる。(ｉ）は高い山の軌跡だから交点を結ぶ曲線となる。

(ⅱ) y軸上では平面波と球面波が同じ速度で移動しながら重なり合うので，振幅が2倍の正弦波となる。

＜総評＞

複雑な考察や煩瑣な計算を必要とする難問ではない。しかし的確な物理理解力を問う問題である。教科書をしっかり理解していることが基本である。

$\boxed{1}$

両端におもりをつけた棒の回転運動に関する問題。長文を的確に読み込み，題意を正確に把握すること。おもりが棒に及ぼす力は棒がおもりに及ぼす力と符号が逆で大きさが同じであることに注意する。運動方程式を考えるときに重要である。

(f)，(g)で衝突前後で物体Cと回転子Rの運動量が保存されないということは，運動量の保存の法則から，運動量変化（力積）が別に存在するということである。それが釘に与えれる力積である。[A]は難易度Ｂ，[B] (g)は難易度Ａ－，他はＢ。

$\boxed{2}$

力学的な装置によってコンデンサーを構成した電磁気と力学の融合問題。電磁気力による運動を取り扱う。総合的な物理理解力を問う。

[A] (c)では極板間に働く力を求める必要がある。これは教科書にも記載されていないものだが（教科書によっては練習問題に記載），電荷に働く力は（電荷×電場の強さ）ということから上極板に働く力を直感的に正しく求めることができれば素晴らしい。だが考え過ぎると難しく，正答者は少ないのではないか。極板間の電場の強さがEと与えられ，(a)で計算される。これをこのまま使ってはだめで，$E/2$とすることができるかどうか。難しそうだ。(c)は難易度Ａ－，他はＢ。

[B] は磁場を印加したとき，電荷の上方移動によって発生するローレンツ力による装置の移動に関する問題。装置の移動による電荷移動で，さらにローレンツ力が発生し，張力が増加すること，放電電流によりローレンツ力が発生し，装置移動が減速することなど，

複雑な物理過程を考慮しなければならない。全体として難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

波動の問題。座標軸方向の波の重なりではなく，平面上での波の重なりを問題の素材にしているところに，目新しさと難しさがある。しかし，点(x, y)における波を一般的に表現することは高校物理の範囲外なので，図を利用して解答を考えることができるようになっている。

波動の基本，例えば振幅，周期，波長，速度，重なり，などの概念を的確に理解していることが必要である。難易度Ｂ。

160312

$\boxed{1}$ [B] (h) の解答を修正

210628