

1 (60点)

数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1=5, a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める. また数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{1+2+\dots+n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と定める.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2) すべての  $n$  に対して, 不等式  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つことを示せ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.

< 解答 >

(1)

$$a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2} \text{ を変形して, } a_{n+1}-3=\frac{a_n-3}{a_n-2}$$

$$c_n=a_n-3 \text{ とおけば, } c_{n+1}=\frac{c_n}{c_n+1}, \therefore \frac{1}{c_{n+1}}=1+\frac{1}{c_n}, \text{ したがって } \frac{1}{c_{n+1}}-\frac{1}{c_n}=1$$

$$\sum_{k=n}^2 \left( \frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_{k-1}} \right) = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_1} = n-1, c_1=a_1-3=5-3=2 \text{ だから,}$$

$$\frac{1}{c_n} = n - \frac{1}{2} = \frac{2n-1}{2}, c_n=a_n-3 = \frac{2}{2n-1}, \therefore a_n = \frac{2}{2n-1} + 3 = \frac{6n-1}{2n-1} \quad (\text{答})$$

(2)

$$b_j \leq 3 + \frac{4}{j+1}$$

すべての  $j=n$  に対して が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

$$a_1+2a_2+\dots+na_n = \sum_{k=1}^n ka_k = \sum_{k=1}^n \left( 1+3k + \frac{1}{2k-1} \right) = n + \frac{3n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

したがって,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3n+5}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \\ &= 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} p(n) \quad , \text{ ただし } p(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{ とおいた。} \end{aligned}$$

で  $j=1$  とおくと,  $b_1 = a_1 = 5 \leq 3 + \frac{4}{1+1} = 5$ ,  $j=1$  で は成立する。

$j=n$ で が成り立つ, すなわち  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つとする。

$$\text{すると } b_n = 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} p(n) = 3 + \frac{2}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n} p(n) \right) \leq 3 + \frac{4}{n+1}, \therefore \frac{1}{n} p(n) \leq 1$$

次に  $j=n+1$  とすると は

$$b_{n+1} = 3 + \frac{2}{(n+1)+1} + \frac{2}{(n+1)(n+1+1)} p(n+1) = 3 + \frac{2}{n+2} \left( 1 + \frac{1}{n+1} p(n+1) \right)$$

しかるに,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} p(n+1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{n} p(n) + \frac{1}{n(2n+1)} \right) \\ &\leq \frac{n}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n(2n+1)} \right) = \frac{2n^2 + n + 1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + 3n + 1} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } b_{n+1} \leq 3 + \frac{2}{n+2} (1+1) = 3 + \frac{4}{(n+1)+1}$$

は  $j=1$  において成り立ち,  $j=n$  で成り立つとすれば,  $j=n+1$  でも成り立つ。

したがって, 数学的帰納法により, すべての  $n$  に対して不等式  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つ。

(3)

$$(2) \text{で記載したように, } b_n = 3 + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > 3$$

$$\text{したがって, } 3 < b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}, \quad 3 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{4}{n+1} \right) = 3$$

$$\text{したがって, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$$

< 解説 >

(1)

ここでは一般項を求める, 一般的な方法があるわけではない。与式を凝視して,  $a_n$  を含む形式と  $a_{n+1}$  を含む形式とが同じになるように変形する。そのことによって, 与式を簡単な式に変形することが可能になる。

(2)

数学的帰納法を用いることは閃くであろう。  $\frac{1}{n} p(n) \leq 1$  を導き,  $\frac{1}{n+1} p(n+1) \leq 1$  であることを証明すればよい。

(3)

はさみうちの方法で極限值を求める。

**2** (60点)

四面体OABCにおいて,  $OA=OB=OC=BC=1$ ,  $AB=AC=x$ とする。頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし, 平面ABCとの交点をHとする。頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし, 平面OBCと

の交点H'とする.

- (1)  $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$  とし,  $\overrightarrow{OH}=\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OH'}=\vec{s}\vec{b}+\vec{t}\vec{c}$  と表す. このとき,  $p, q, r$  および  $s, t$  を  $x$  の式で表せ.
- (2) 四面体OABCの体積 $V$ を $x$ の式で表せ. また,  $x$ が変化するときの $V$ の最大値を求めよ.

< 解答 >

(1)

$$\overrightarrow{OH}=\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c}=\vec{h} \quad \text{とおく.}$$

$\vec{h}\cdot\vec{a}=h\cos\theta_a=h^2$ ,  $\vec{h}\cdot\vec{b}=h\cos\theta_b=h^2$ ,  $\vec{h}\cdot\vec{c}=h\cos\theta_c=h^2$ だから, の両辺に $\vec{h}$ を乗じると,

$$\vec{h}(\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c})=\vec{p}\vec{h}\cdot\vec{a}+\vec{q}\vec{h}\cdot\vec{b}+\vec{r}\vec{h}\cdot\vec{c}=\vec{p}h^2+\vec{q}h^2+\vec{r}h^2=\vec{h}\cdot\vec{h}=h^2, \therefore p+q+r=1$$

ただし,  $|\vec{h}|=h$ ,  $|\vec{a}|=a=1$ ,  $|\vec{b}|=b=1$ ,  $|\vec{c}|=c=1$ ,  $\vec{h}$ と $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ とがなす角をそれぞれ $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ とする.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-\vec{b}+\vec{c}, \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{c}+\vec{a}$$

$$(\overrightarrow{AB})^2=x^2=(-\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}, \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1-\frac{x^2}{2}$$

$$(\overrightarrow{BC})^2=1=(-\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{b})^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+(\vec{c})^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}, \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$$

$$(\overrightarrow{CA})^2=x^2=(-\vec{c}+\vec{a})^2=(\vec{c})^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+(\vec{a})^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{a}, \therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=1-\frac{x^2}{2}$$

の両辺に $\vec{a}$ を乗じると,

$$\vec{a}(\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c})=\vec{p}\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{q}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{r}\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{p}+q\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+r\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\vec{a}\cdot\vec{h}=h^2$$

の両辺に $\vec{b}$ を乗じると,

$$\vec{b}(\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c})=\vec{p}\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{q}\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{r}\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{p}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+q+\frac{1}{2}r=\vec{b}\cdot\vec{h}=h^2$$

の両辺に $\vec{c}$ を乗じると,

$$\vec{c}(\vec{p}\vec{a}+\vec{q}\vec{b}+\vec{r}\vec{c})=\vec{p}\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{q}\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{r}\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{p}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}q+r=\vec{c}\cdot\vec{h}=h^2$$

$$, \quad , \quad \text{から } q=r=\frac{px^2}{2x^2-1}, \quad \text{に代入して, } p=\frac{2x^2-1}{4x^2-1}, \quad q=r=\frac{x^2}{4x^2-1} \quad (\text{答})$$

$$\overrightarrow{AH'}=\overrightarrow{OH'}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{s}\vec{b}+\vec{t}\vec{c}$$

の両辺に $\vec{b}$ を乗じて,  $\overrightarrow{AH'}$ と $\vec{b}$ が直交することを考慮して,

$$0=-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{s}\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{t}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{x^2}{2}-1+s+\frac{1}{2}t$$

の両辺に $\vec{c}$ を乗じて,  $\overrightarrow{AH'}$ と $\vec{c}$ が直交することを考慮して,

$$0=-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{s}\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{t}\vec{c}\cdot\vec{c}=\frac{x^2}{2}-1+\frac{1}{2}s+t$$

$$, \quad \text{から } s=t=\frac{2-x^2}{3} \quad (\text{答})$$

(2)

四面体OABCを三角錐と考えれば、 $V = \frac{1}{3} OH \times (\text{三角形ABCの面積})$

から、 $OH = h = \sqrt{\frac{-x^4 + 4x^2 - 1}{4x^2 - 1}}$ 、三角形ABCの面積  $= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{-x^4 + 4x^2 - 1}{4x^2 - 1}} \times \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{12} \sqrt{-x^4 + 4x^2 - 1} = \frac{1}{12} \sqrt{-(x^2 - 2)^2 + 3} \quad (\text{答})$$

したがって、 $x^2 = 2$  のとき、 $V$  は最大値  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  (答)

< 解説 >

(1)

題意は簡明なのだが、どのような方針で解くか、着眼、着想が必要だ。立体図形をベクトルによって扱う問題では、直交するベクトルの内積が0になることを上手に利用する場合が多い。この問題のポイントは 式の導出である。

すべてのベクトルは同一平面上にない3つのベクトルの和によって一意に表されるということが前提である。ここでは  $\vec{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$  のように表されるということだ。しかも、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  がつくる平面と  $\vec{OH}$  が直交し、点Hが平面内にある場合には、 $p + q + r = 1$  というきれいな関係が成り立つということである。この関係式と導出方法は覚えておいて損はない。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OH} = \vec{h}$  において、点A, B, C, Hが同一平面にあって、OHが平面への垂線である場合には、 $\vec{a} \cdot \vec{h} = \vec{b} \cdot \vec{h} = \vec{c} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$  を上記の導出や解法において用いる。すると、上記のようにすっきりと解くことができる。

このような解法を着想できなかった場合、以下のような別解を紹介する。図1を参照する。

$\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$  と  $\vec{OH}$  は直交する。

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{OH} &= (-\vec{a} + \vec{b}) \cdot (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) = -p + q - \vec{a} \cdot (q\vec{b} + r\vec{c}) + \vec{b} \cdot (p\vec{a} + r\vec{c}) \\ &= -p + q + (p - q)\vec{a} \cdot \vec{b} + r\vec{b} \cdot \vec{c} - r\vec{c} \cdot \vec{a} = -p + q + (p - q)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{r}{2}(x^2 - 1) = 0 \\ px^2 &= q(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BC} \cdot \vec{OH} &= (-\vec{b} + \vec{c}) \cdot (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) = -q + r - \vec{b} \cdot (p\vec{a} + r\vec{c}) + \vec{c} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) \\ &= -q + r + (q - r)\vec{b} \cdot \vec{c} + p(\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = -q + r + \frac{1}{2}(q - r) = \frac{1}{2}(r - q) = 0, q = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{OH} &= (-\vec{c} + \vec{a}) \cdot (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) = -r + p - \vec{c} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) + \vec{a} \cdot (q\vec{b} + r\vec{c}) \\ &= -r + p + (r - p)\vec{c} \cdot \vec{a} + q(\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c}) = -r + p + (r - p)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{q}{2}(1 - x^2) = 0 \\ px^2 &= q(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{OH})^2 &= (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) = (p\vec{a})^2 + (q\vec{b})^2 + (r\vec{c})^2 + 2pq\vec{a} \cdot \vec{b} + 2qr\vec{b} \cdot \vec{c} + 2rp\vec{c} \cdot \vec{a} \\ h^2 &= p^2 + q^2 + r^2 + 2pq\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + qr + 2rp\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = p^2 + 3q^2 + 2pq(2 - x^2) \quad , \text{ただし } OH = h \end{aligned}$$

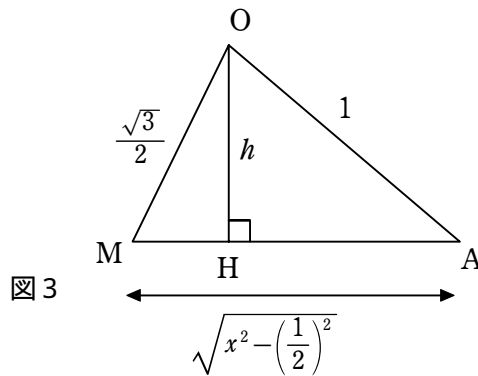
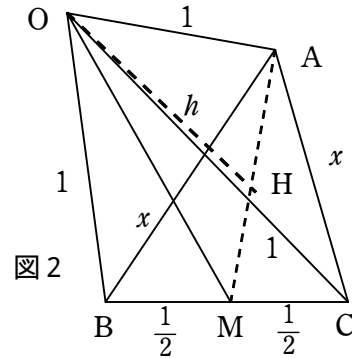
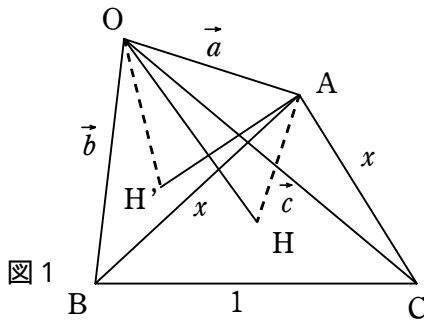
図2, 図3から

$$MH = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - h^2}, HA = \sqrt{1 - h^2}$$

$$MH + HA = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - h^2} + \sqrt{1 - h^2} = MA = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

これらから,  $h^2 = \frac{x^4}{1 - 4x^2} + 1$

~ を利用して, やや煩瑣な計算になるが,  $p, q, r$  を求めることができる。



**3** (60点)

$a > 0$  とする. 曲線  $y = e^{-x^2}$  と  $x$  軸,  $y$  軸, および直線  $x = a$  で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体を  $A$  とする.

(1)  $A$  の体積  $V$  を求めよ.

(2) 点  $(t, 0)$  ( $-a \leq t \leq a$ ) を通り  $x$  軸と垂直な平面による  $A$  の切り口の面積を  $S(t)$  とするとき, 不等式

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ.

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

を示せ.

< 解答 >

(1)

回転体A (図1 ドット部) を  $y=q$  の平面で切断した断面は円であり, その面積は

$$B(q) = \pi p^2, \quad (0 < p < a)$$

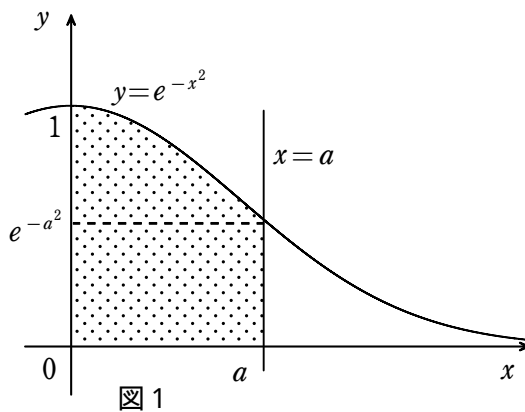
$$\pi a^2, \quad (p = a)$$

$$\text{ただし } q = e^{-p^2}, \quad \frac{dq}{dp} = -2pe^{-p^2}$$

$$\text{したがって, } V = \pi \int_{e^{-a^2}}^1 p^2 dq + \pi a^2 e^{-a^2}$$

$$\pi \int_{e^{-a^2}}^1 p^2 dq = 2\pi \int_0^a p^3 e^{-p^2} dp = 2\pi \times \left( \frac{-1}{2} \right) \left[ p^2 e^{-p^2} + e^{-p^2} \right]_0^a = -\pi (a^2 e^{-a^2} + e^{-a^2} - 1)$$

$$\therefore V = \pi \int_{e^{-a^2}}^1 p^2 dq + \pi a^2 e^{-a^2} = \pi (1 - e^{-a^2})$$



(2)

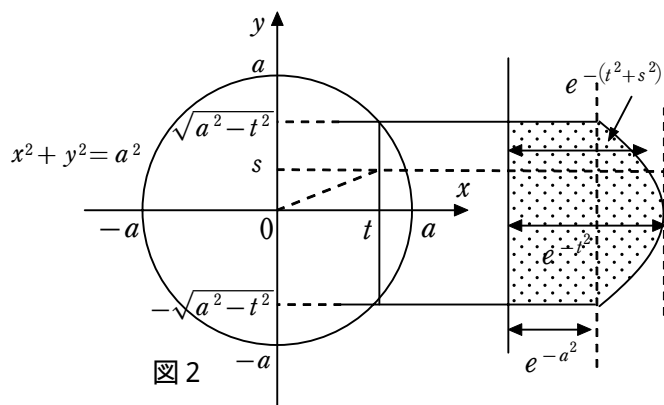


図2は回転体Aを上から見たものである。  $x=t$ での切り口を右から見た図をで表示した。

切り口 (ドット部) の面積  $S(t)$  は,  $y=s$ での切り口の高さは  $e^{-(t^2+s^2)}$  だから,

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(t^2+s^2)} ds$$

$$\text{実数 } s \text{ に対して } e^{-(t^2+s^2)} > 0 \text{ だから, } \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(t^2+s^2)} ds \leq \int_{-a}^a e^{-(t^2+s^2)} ds$$

$$\text{したがって, } S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(t^2+s^2)} ds$$

(3)

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(t) dt \leq \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a e^{-(t^2+s^2)} ds \right) dt = \int_{-a}^a e^{-t^2} \left( \int_{-a}^a e^{-s^2} ds \right) dt \\ &= \int_{-a}^a e^{-t^2} dt \int_{-a}^a e^{-s^2} ds = \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } V = \pi(1 - e^{-a^2}) \leq \left( \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2, \therefore \sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

< 解説 >

(1)

$\int_0^a p^3 e^{-p^2} dp$  の計算では部分積分法を用いる。

$\int p^3 e^{-p^2} dp$  において,  $f(p) = p^2$ ,  $g(p) = p e^{-p^2}$  とおく。

部分積分の定理,  $\int f g dp = f \int g dp - \int f' G dp$  に適用すれば,  $G(p) = \int g(p) dp = -\frac{1}{2} e^{-p^2}$

$$\int p^3 e^{-p^2} dp = p^2 \int p e^{-p^2} dp + \int p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} p^2 e^{-p^2} - \frac{1}{2} e^{-p^2}$$

(2)

回転体Aの切り口の図を描いて, 必要な点の座標等を定めれば, 切り口の面積を求める道筋が見えるだろう。

(3)

(2)を利用することで容易に導くことができる。

**4** (60点)

$xy$  平面上を運動する点Pの時刻  $t$  ( $t > 0$ ) における座標  $(x, y)$  が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている。原点をOとし, 時刻  $t$  におけるPの速度ベクトルを  $\vec{v}$  とする。

(1)  $\overrightarrow{OP}$  と  $\vec{v}$  のなす角を  $\theta(t)$  とするとき, 極限值  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$  を求めよ。

(2)  $\vec{v}$  が  $y$  軸に平行になるような  $t$  ( $t > 0$ ) のうち, 最も小さいものを  $t_1$ , 次に小さいものを  $t_2$  とする。このとき, 不等式  $t_2 - t_1 < \pi$  を示せ。

< 解答 >

(1)

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \text{ とおけば, } v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \cos t - t^2 \sin t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta(t)$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = x v_x + y v_y = t^2 \cos t (2t \cos t - t^2 \sin t) + t^2 \sin t (2t \sin t + t^2 \cos t)$$

$$= 2t^3 (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2t^3$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^4 (\sin^2 t + \cos^2 t)} = t^2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t \cos t - t^2 \sin t)^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2} = \sqrt{4t^2 + t^4} = t \sqrt{4 + t^2}$$

$$\cos \theta(t) = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{OP}| |\vec{v}|} = \frac{2t^3}{t^3 \sqrt{4 + t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + t^2}} > 0$$

したがって,  $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4+t^2}} = 0$ , したがって  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\pi}{2}$  (答)

(2)

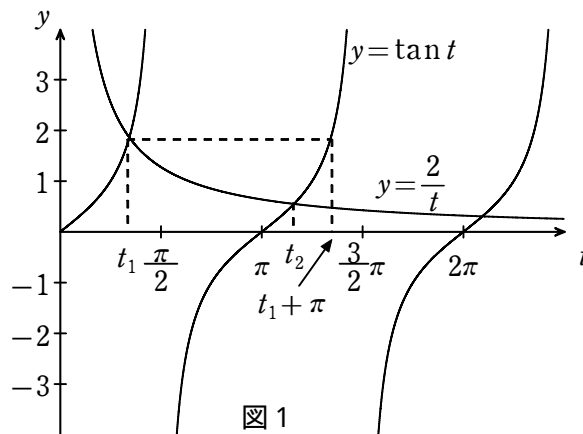
$\vec{v}$  が  $y$  軸に平行になるとは,  $v_x = 0$  だから,  $2t \cos t - t^2 \sin t = 0$ ,  $\therefore \tan t = \frac{2}{t}$

図 1 に  $y = \tan t$  と  $y = \frac{2}{t}$  のグラフを示す.  $t_1, t_2$  は  $y = \tan t$  と  $y = \frac{2}{t}$  のグラフの交点の  $t$  座標

$y = \frac{2}{t}$  は単調減少関数,  $y = \tan t$  は周期  $\pi$  の繰り返し関数

$$\tan t_1 = \frac{2}{t_1}, 0 < t_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \tan t_2 = \frac{2}{t_2}, \pi < t_2 < \frac{3\pi}{2}$$

$t_1 < t_2$  だから  $\frac{2}{t_2} < \frac{2}{t_1}$ , したがって  $\tan t_2 < \tan t_1 = \tan(t_1 + \pi)$ ,  $\therefore t_2 < t_1 + \pi$ ,  $\therefore t_2 - t_1 < \pi$



< 解説 >

(1)

速度ベクトルを  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  とおいて,

$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \cos t - t^2 \sin t$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = 2t \sin t + t^2 \cos t$  と計算することがポイントである。

(2)

$y = \tan t$  と  $y = \frac{2}{t}$  のグラフの交点の座標が  $t_1, t_2$  であること。グラフを描いて, 前者が繰り返し関

数であること, 後者が単調減少関数であることから,  $t_1, t_2$  の関係性について把握すること。

$$\tan(t_1 + \pi) = \frac{\sin(t_1 + \pi)}{\cos(t_1 + \pi)} = \frac{\sin t_1 \cos \pi - \cos t_1 \sin \pi}{\cos t_1 \cos \pi - \sin t_1 \sin \pi} = \frac{\sin t_1 \cos \pi}{\cos t_1 \cos \pi} = \frac{\sin t_1}{\cos t_1} = \tan t_1$$

5 (60点)

$n$  を相異なる素数  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ( $k \geq 1$ ) の積とする.  $a, b$  を  $n$  の約数とすると,  $a, b$  の最大公約数を  $G$ , 最小公倍数を  $L$  とし,

$$f(a, b) = \frac{L}{G}$$

とする.



- (1)  $f(a, b)$  が  $n$  の約数であることを示せ。  
 (2)  $f(a, b) = b$  ならば,  $a = 1$  であることを示せ。  
 (3)  $m$  を自然数とすると,  $m$  の約数であるような素数の個数を  $S(m)$  とする。  
 $S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$  が偶数であることを示せ。

< 解答 >

(1)

$P_n = \{\text{相異なる素数 } p_1, p_2, \dots, p_k (k \geq 1)\}$  の集合とする。

$n$  は  $P_n$  に含まれる素数すべての重複なしの積である。

$a, b$  が  $n$  の約数であるから,

$a$  は  $1$  と  $n$  を構成する相異なる  $k$  個のうち  $h$  個の素数  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_h}$  の積とすることができる。

$P_a = \{\text{素数 } p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_h}\}$  の集合とすれば,  $a$  は  $1$  と  $P_a$  に含まれる素数すべての重複なしの積

$b$  も  $1$  と  $n$  を構成する相異なる  $k$  個のうち  $l$  個の素数  $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_l}$  の積とすることができる。

$P_b = \{\text{素数 } p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_l}\}$  の集合とすれば,  $b$  は  $1$  と  $P_b$  に含まれる素数すべての重複なしの積

$a, b$  の最大公約数  $G$  は  $P_a \cap P_b$  を満たす素数すべての重複なしの積

$a, b$  の最小公倍数  $L$  は  $P_a \cup P_b$  を満たす素数すべての重複なしの積

$f(a, b) = \frac{L}{G}$  は  $P_a \cup P_b$  を満たす素数から  $P_a \cap P_b$  を満たす素数を除いた素数の積となる。

$\{P_a \cup P_b - P_a \cap P_b\} \subset P_n$  となるので,  $f(a, b)$  は  $n$  の約数となる。

(2)

$\{P_a \cup P_b - P_a \cap P_b\} = P_b$  だから,  $P_a \cap P_b = \phi$ 。すると  $P_a \cup P_b = P_b$  だから,  $P_a = \phi$

ただし,  $\phi$  は空集合を意味する。

したがって,  $a = 1$

(3)

$P_a \cap P_b$  に含まれる素数の個数を  $q$  個とする。

$f(a, b)$  の素因数の個数は集合  $\{P_a \cup P_b - P_a \cap P_b\}$  の要素の個数だから,

$$S(f(a, b)) = S(a) + S(b) - 2q$$

したがって,  $S(f(a, b)) + S(a) + S(b) = 2\{S(a) + S(b)\} - 2q = 2\{S(a) + S(b) - q\}$

したがって,  $S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$  は偶数である。

< 解説 >

整数の問題で一目難しそうだが, 内容はごく当たり前に理解できる事象である。それだけに, 数学的表現と論理によって, 的確に説明することが求められる。

(1)

まず,  $n, a, b$  を構成する素数の集合を定義しておく。すると, 最大公約数, 最小公倍数が含む素数を集合演算によって表現することができる。

$f(a, b)$  は  $n$  の約数であるとは,  $f(a, b)$  の素因数がすべて,  $n$  の素因数に含まれていることである。したがって,  $f(a, b)$  の素因数の集合が  $n$  の素因数の集合に含まれていることを示せば良い。

(2)

$a=1$ ということは、 $a$ の素因数の集合が空集合ということである。

(3)

偶数ということは2の倍数ということである。

< 総評 >

多くの国立大学の理系の数学試験は6問150分、200点満点である。東工大が5問で180分、300点満点だから、数学を重視していることがわかる。今年は確率の問題が出題されなかった。

思考力、計算力を必要とする骨のある問題が揃っているが、例年に比べて難問がなく、易化したように思える。簡単そうな問題を最初に解いて、落ち着いて次の問題に取り組みたいのだが、簡単な問題がないので、最初の問題の選択が悩ましいかも知れない。

私は、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{3}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{5}$ 、 $\boxed{2}$ の順序で取り組みたいと思った。

$\boxed{1}$  (60点)

数列の問題。(1)は一般的な方法があるわけではないので、着想が必要である。(2)は数学的帰納法を用いて、ていねいに計算を進める。難易度はB+。

$\boxed{2}$

立体図形をベクトルによって扱う問題。四面体を対象とする立体図形の問題は頻出されるので、習熟しておきたい。数学Bの教科書に記載の「平面上のベクトル」「空間のベクトル」をしっかりと理解し、練習問題に取り組んでいれば、面喰うことはないだろう。上手な解法のための着眼、着想が必要であり、難易度はA-。

$\boxed{3}$

曲線を回転して得られ立体の体積等を求める問題。立体図形なのでやや手強い。図を描いて、問題の概要をすみやかに把握する。(2)、(3)単純な思考と計算で間に合う。難しく考えないこと。難易度B。

$\boxed{4}$

ベクトルの問題。ベクトルの内積を利用して、ベクトル間のなす角を求める。難易度B。

$\boxed{5}$

整数の問題は、着眼、着想を基に論理の筋道をつけていく問題が多い。しかし、本問は当たり前の事象を数学的表現と論理を使って証明していく問題で、かえって難しいかも知れない。採点はどのように行うのか。これも難しそうだ。難易度A-。

160122