2015（H27)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

正の実数a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C:\quad y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

<解答>

$y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$ を変形して，$4(x^2-1)a^2-4ya+1=0$　①

aに関する方程式①が正の実数解をもつためには,

(ｉ) $x^2=1$のとき

$y\fallingdotseq 0$で，$a=\dfrac{1}{4y}>0$，したがって$y>0$

したがって，$x=\pm 1$，$y>0$　②　がC に含まれる。

(ⅱ) $x^2\fallingdotseq 1$のとき

①は2次方程式で，$a^2-\dfrac{y}{x^2-1}a+\dfrac{1}{4(x^2-1)}=\left(a-\dfrac{y}{2(x^2-1)}\right)^2-\dfrac{y^2-(x^2-1)}{4(x^2-1)^2}=0$

実数解をもつ条件は，$\dfrac{y^2-(x^2-1)}{4(x^2-1)^2}\geqq 0$，$\therefore\ y^2-x^2+1\geqq 0$　③

実数解は$\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-x^2+1}}{2(x^2-1)}$であって，これが正となる条件を求める。

(a) $x^2>1$のとき，$y\pm\sqrt{y^2-x^2+1}>0$

(a－1) $y>-\sqrt{y^2-x^2+1}$ のとき，$y>0$

(a－2) $y>\sqrt{y^2-x^2+1}$ のとき，$y>0$

したがって，$x^2>1$，$y>0$　④　がC に含まれる。

(b) $x^2<1$のとき，$y\pm\sqrt{y^2-x^2+1}<0$

(b－1) $y<-\sqrt{y^2-x^2+1}$ のとき，$y<0$

(b－2) $y<\sqrt{y^2-x^2+1}$ は常に成立する。

したがって，$x^2<1$　⑤　がC に含まれる。

以上の結果，②，③を満たす④および⑤は，確かにaとして正の実数全体を与える。
図示すると，図１の打点部になる。ここで，境界は実線を含み，破線と○は含まない。

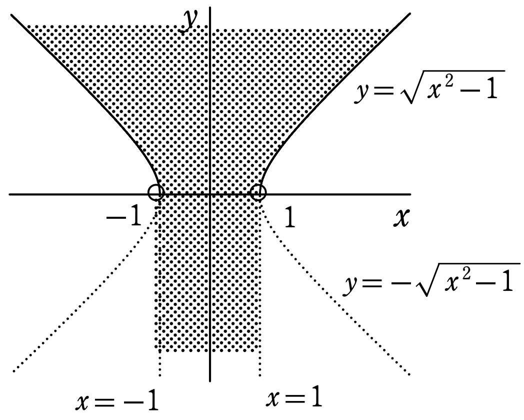

図１

<解説>

$y=f(x)$に含まれるパラメータが変化したとき，関数が取り得る値の領域を図示せよ，というこの種の問題は入試数学に頻出する。練習問題等で取り組んだこともあろう。しかし，習熟していなかったりして，初めから自力で考えようとすると，解答方針に戸惑うことになる。

ここでは，aが正の実数全体を動く，とあるので，aが正の実数をとることができる(x,y)を求めると考える。与えられた式はaの1次方程式または2次方程式だから，正の実数解を与える(x,y)の領域を求めることに帰着する。

第　2　問

どの目も出る確率が$\dfrac{1}{6}$のさいころを１つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを５回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は，

A A C D A A B

となる。このとき，左から４番目の文字はD，５番目の文字はAである。

(1) nを正の整数とする。n回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左からn番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) nを2以上の整数とする。n回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字がAで，かつn番目の文字がBとなる確率を求めよ。

<解答>

(1)

文字AはAAという形で出現するので，1番目と2番目のAを区別するため，出た目が1，2，3のときは文字列AXと書くものとする。

さいころを$n-1$回投げたとき，$n-1$番目の文字がA，X，（BまたはCまたはD）である確率を

それぞれ，p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} とする。

それぞれの文字からの変化を考えると，

- Aの次は必ずX，すなわち確率1でX
- Xの次は，同じ確率でAまたは（BまたはCまたはD）すなわち確率$\frac{1}{2}$でAまたは（BまたはCまたはD）
- （BまたはCまたはD）の次は同じ確率でAまたは（BまたはCまたはD）すなわち確率$\frac{1}{2}$でAまたは（BまたはCまたはD）

したがって，以下の確率漸化式が成立する。

$p_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}r_{n-1}$　①

$q_n=p_{n-1}$　②

$r_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}r_{n-1}$　③

当然，$p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1}=p_n+q_n+r_n=1$,

また $p_1=\frac{1}{2}$，$q_1=0$，$r_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{1}{4}$，$q_2=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{4}$

①，②，③から $p_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}r_{n-1}=\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}p_{n-1}$　④ だから，

$p_n-p_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(p_2-p_1)=\frac{-1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$　⑤

文字列の左からn番目の文字がAとなる確率は$p_n+q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$　（答）

$n=1$のとき，$p_1+q_1=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，合っている。

$n=2$のとき，$p_2+q_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$，合っている。

(2)

$n-1$番目の文字がAで，かつn番目の文字がBとなる確率をr_{ABn}とする。B，C，Dは同じ確率で発生することを考慮し，③，⑤から，

$r_{ABn}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}q_{n-1}=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$　（答）

$n=2$のとき，$r_{AB2}=\frac{1}{6}q_1=0$，1番目の文字がAならば2番目の文字はAであり，Bとなることはないから，確かである。

＜解説＞

自力で解くことができなかった。その理由を書いて，参考としたい。

一読し，頭を巡らせて難問と感じた。確率問題では，まずは解答方針を考える必要がある。n回さい

ころを投げてできる文字列のn番目の文字の確率を問うのだから，入試の確率問題に頻出の確率漸化式を作成する問題と考えた。

ところが，問題はn番目の文字であって，n回投げたときに出る文字ではないのである。AAという2文字が出ることがあるので，投げた回数と文字列の番目が一致しないのである。しかも，$n+1$番目の文字は既に出てしまっている場合があるので，さいころを投げたからといって，$n+1$番目の文字は変化しないのである。すると，確率漸化式の問題ではないのか，と方針が揺らぐ。

n回さいころを投げたとき，AAが出る場合がk回あって，$n+k$個の文字列の中にn番目にAが来る場合の数は，などと考えて組合せ問題と思い込んでしまうと，収拾がつかなくなる。焦りが焦りを呼んで，解答できなかった受験生も多かったのではないか。

この問題では，２つの着想が必要だ。まずは，n回さいころを投げるということと，n番目に書かれる文字，という２つの事象を分けるということだ。上にも書いたように，$n-1$回さいころを投げた後，次にさいころを投げても，n番目の文字は変化しない場合がある。いや、ほとんどの場合，変化しない。$n-1$回のさいころ投げで1度でも1，２，３が出ていれば文字AAが書かれるから，n番目の文字は既定となる。

ここは単純に，$n-1$番目の文字の確率が，次にどのように変化するかを考えれば良い，と考えを切り替えよう。n回目のさいころ投げでn番目の文字が出現した，などと考えるからわけが解らなくなるのだから。さいころ投げで文字列ができるのは確かだが，文字の並びの確率の問題と考え，さいころ投げの順序と切り離して考えることだ。すると，$n-1$番目が文字Aである確率とn番目で文字Aである確率との関係を考えれば良いという，単純な問題に帰着する。

次に，$n-1$番目の文字Aのとき，それがAAの初めのAか次のAかによって，n番目の文字が異なるので，両者の区別が必要になるということだ。初めのAなら，次は必ずAとなる。次のAなら，Aか（BまたはCまたはD）となる。ここでも着想が必要だ。初めのAと次のAとのそれぞれが書かれる確率を考え，Aの書かれる確率は両者の和とすれば良い，ということだ。わかり易くするために，文字列AAをAXとして，それぞれが$n-1$番目とn番目に書かれる確率を考えるようにすれば良い。

このようにして，確率漸化式の問題に帰着させると，得られる式は簡単なものになる。整理すると④式，$p_n=\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}p_{n-1}$が得られる。$p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-p_{n-2})$とおく常套的方法によって，$p_n$の表現を求める。

第　3　問

aを正の実数とし，pを正の有理数とする。

座標平面上の２つの曲線$y=ax^p$ $(x>0)$と$y=\log x$ $(x>0)$を考える。この２つの曲線の共有点が１点のみであるとし，その共有点をQとする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$を証明なしに用いてよい。

(1) aおよび点Qのx座標をpを用いて表せ。

(2) この２つの曲線とx軸で囲まれる図形を，x軸のまわりに１回転してできる立体の体積をpを用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が2π になるときのp の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$f(x)=ax^p-\log x=\log x\left(\frac{ax^p}{\log x}-1\right)$$ とおく。

$\lim\limits_{x\to 0}ax^p=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\log x=-\infty$だから, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$である。

また, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{\log x}=\infty$だから, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$である。

$y=ax^p$ $(x>0)$ と$y=\log x$ $(x>0)$が唯一の共有点をもつということは, $f(x)=0$ が唯一の解をもつということである。$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$だから, $f(x)=0$かつx 軸と接する唯一の値$x=q$ が存在することになる。このq は共有点Qのx 座標である。

したがって, $aq^p=\log q$ ①

$f'(x)=apx^{p-1}-\dfrac{1}{x}$, $\therefore\ f'(q)=apq^{p-1}-\dfrac{1}{q}=0$ ②

①, ②から$\log q=\dfrac{1}{p}$, $\therefore\ a=\dfrac{1}{ep}$, 共有点Q の$x$ 座標 $q=e^{\frac{1}{p}}$ (答)

(2)

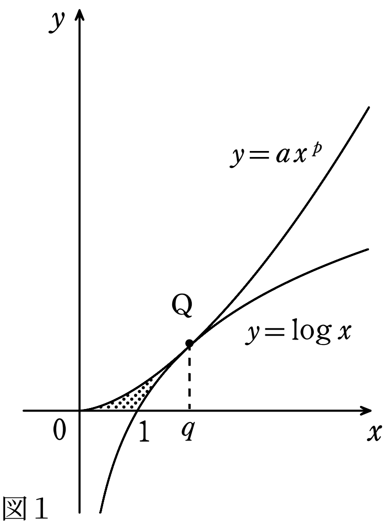

図１

x 軸に垂直な平面による立体の断面は,

$x\leqq 1$では, 半径ax^pの円

$1<x\leqq q$では, 外半径がax^p, 内半径が$\log x$の同心円

したがって, 体積$V=V_1+V_2$

$$V_1=\int_0^1\pi(ax^p)^2dx=\frac{\pi a^2}{2p+1}\Big[x^{2p+1}\Big]_0^1=\frac{\pi a^2}{2p+1}$$

$$V_2=\int_1^q\pi\{(ax^p)^2-(\log x)^2\}dx$$

$$=\frac{\pi a^2}{2p+1}\Big[x^{2p+1}\Big]_1^q-\pi\Big[(t^2-2t+2)e^t\Big]_0^{\log q}$$

$$=\frac{\pi a^2}{2p+1}(q^{2p+1}-1)-\pi\{((\log q)^2-2\log q+2)q-2\}$$

$$=\frac{\pi}{2p+1}\left(\frac{1}{ep}\right)^2\left(e^{\frac{2p+1}{p}}-1\right)-\pi\left\{\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)e^{\frac{1}{p}}-2\right\}$$

$$V=V_1+V_2=\frac{\pi}{2p+1}\left(\frac{1}{ep}\right)^2e^{\frac{2p+1}{p}}-\pi\left\{\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)e^{\frac{1}{p}}-2\right\}=\left\{\frac{2(1-2p)}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}\pi$$ (答)

(3)

(2)において, $V=2\pi$とおけば, $\left\{\dfrac{2(1-2p)}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}=2$

したがって, $\dfrac{2(1-2p)}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}=0$, $\therefore\ 1-2p=0$, $\therefore\ p=\dfrac{1}{2}$ (答)

＜解説＞

(1)

共有点が１点のみということから，この場合，両曲線が接しているということを明らかにすることが必要だ。図１のようにグラフを描いて，両曲線の共有点が１点のみとは，接している場合であるということを記述することで，満点になるかどうかわからない。

共有点Q のx 座標をq とすれば，Q の座標は$(q\,,\ aq^p)$であり$(q\,,\ \log q)$である。

したがって，$aq^p=\log q$　①

二つの曲線の共有点が１点のみということは，両者が接している場合である。したがって，Q における傾きが等しい。$y=ax^p$の導関数は$y'=pax^{p-1}$，したがって点Q における傾きはpaq^{p-1}

$y=\log x$の導関数は$\dfrac{1}{x}$，したがって点Q における傾きは$\dfrac{1}{q}$

両者を等しいとして，$paq^{p-1}=\dfrac{1}{q}$，　$\therefore\ paq^p=1$　②

①，②から$\log q=\dfrac{1}{p}$，$\therefore\ q=e^{\frac{1}{p}}$，$a=\dfrac{1}{ep}$

(2)

$\log x=t$とおくと，$x=e^t$，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e^t}$，$dx=e^t dt$

$\displaystyle\int(\log x)^2dx=\int t^2e^t dt$

部分積分法を用いて，$\displaystyle\int t^2e^tdt=t^2e^t-2\int te^tdt$

部分積分法を用いて，$\displaystyle\int te^tdt=te^t-e^t$

したがって，$\displaystyle\int t^2e^tdt=t^2e^t-2te^t+2e^t=(t^2-2t+2)e^t$

そして$x=q$ のとき $t=\log q$，$x=1$のとき $t=0$として積分範囲が決まる。

第　4　問

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1\,,2\,,3\,,\ldots)$$

(1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$ によらないことを示せ。

(2)　すべての $n=2\,,3\,,4\,,\ldots$　に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3)　数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1\,,2\,,3\,,\ldots)$$

すべての$n=1\,,2\,,3\,,\ldots$　に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。

＜解答＞

(1)

$A_n=\dfrac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とする。

$$\frac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+1}}{p_n}+\frac{p_n}{p_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_n}{p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}p_n}+\frac{p_np_{n-1}}{p_n{}^2+1}+\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{1}{p_n{}^2+1}$$

$$=\frac{p_n}{p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}p_n}+\frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{p_n{}^2+p_{n-1}{}^2+1}{p_{n-1}p_n}=A_{n-1}$$

したがって，$A_n=\dfrac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ はn によらず，すべて等しい。

ただし，上の計算で，下記を用いた。

$$p_{n+1}=\frac{p_n{}^2+1}{p_{n-1}}=\frac{p_n{}^2}{p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{p_n}{p_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}p_n}$$

$$\frac{p_n}{p_{n+1}}=\frac{p_np_{n-1}}{p_n{}^2+1}$$

$$\frac{1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{1}{p_n{}^2+1}$$

(2)

$$A_n=\frac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+1}{}^2}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+1}}{p_n}+\frac{p_{n+1}p_{n-1}}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+1}+p_{n-1}}{p_n}$$

$p_3=\dfrac{p_2{}^2+1}{p_1}=\dfrac{2^2+1}{1}=5$，$p_4=\dfrac{p_3{}^2+1}{p_2}=\dfrac{5^2+1}{2}=13$

$A_1=\dfrac{p_1+p_3}{p_2}=\dfrac{1+5}{2}=3$，$A_2=\dfrac{p_2+p_4}{p_3}=\dfrac{2+13}{5}=3$

A_nはn によらないのだから，$A_n=A_1=A_2=3$，$\therefore\ p_{n-1}+p_{n+1}=3p_n$

(3)

数学的帰納法によって証明する。

$n=1$のとき，$q_{2-1}=q_1=1$，$\therefore\ p_1=q_{2-1}$

$n=2$のとき，$q_{2\times2-1}=q_3=q_2+q_1=1+1=2$，$\therefore\ p_2=q_{2\times2-1}$

したがって，$n=1,2$ において$p_n=q_{2n-1}$が成立する。

$n=1,2,3,...,k$まで$p_n=q_{2n-1}$が成立するとする。$n=k$のとき，$p_k=q_{2k-1}$である。

$n=k+1$のとき，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ が成立することを証明する。

$p_{k+1}=3p_k-p_{k-1}=3q_{2k-1}-q_{2k-3}$　①

$q_{2k-3}=q_{2k-1}-q_{2k-2}=(q_{2k+1}-q_{2k})-(q_{2k}-q_{2k-1})$　②

②式を①式に代入して，

$p_{k+1}=3q_{2k-1}-\{(q_{2k+1}-q_{2k})-(q_{2k}-q_{2k-1})\}=2(q_{2k-1}+q_{2k})-q_{2k+1}=2q_{2k+1}-q_{2k+1}=q_{2k+1}$

以上によって，$n=1,2,3,...,k$まで$p_n=q_{2n-1}$が成立すれば，$p_{k+1}=q_{2k+1}$が成立する。$n=1,2$

において$p_n=q_{2n-1}$が成立するので，すべての$n=1,2,3,...$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$が成立することが証明された。

<解説>

数列の問題。提示された項間の関係を利用して，数式の変形を行えば，複雑な計算をすることなく，容易に結論を導くことができる。注意すべきことは，p_nやq_nの一般表示式を求めて，解答を得ようとしないこと。すると複雑な計算の迷路にはまり込んでしまう。

(1)

n によらないということをどのように示したら良いか。与えられた条件は，p_{n+2} がp_{n+1}，p_nによって定まることを示している。A_n はp_{n+1}，p_n を含む式である。ならば，p_{n+1} をp_n，p_{n-1} で表したら，A_n がどうなるかを計算し，A_{n-1}に等しくなれば良い，という方針が定まるではないか。

計算は難しくはないが，やや煩瑣である。ていねいに行えば，自然に結果が見えてくる。

(2)

(1)で与えられた式$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$の意味は何かを考える。問題は誘導的に構成されている場合が多いから，この式を凝視してみる。これを変形すると，$p_{n+1}+p_{n-1}$という数式が見えてくるような気がする。変形してみよう。

(3)

解答方針を考える。「すべての$n=1,2,3,...$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ」というような問題は，数学的帰納法を利用することを思い出すであろう。そのように思い定めて，p_k，p_{k+1}をq_{2k-1}，q_{2k+1}で表すよう計算を進める。簡単な計算過程で，$n=k$まで成立すれば$n=k+1$でも成立することが証明できる。

第 5 問

m を2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小のm を求めよ。

<解答>

$${}_{2015}C_m=\frac{2015!}{(2015-m)!\,m!}=\frac{1}{m!}(2015-1)(2015-2)\cdots(2015-m+2)(2015-m+1) \quad ①$$

$$=\frac{1}{m!}(2016-2)(2016-3)\cdots(2016-m+1)(2016-m) \quad ②$$

$$=\frac{1}{m!}(63\times2^5-2)(63\times2^5-3)\cdots(63\times2^5-m+1)(63\times2^5-m) \quad ③$$

$$=\frac{(63\times2^5-m)}{m}\frac{\{63\times2^5-(m-1)\}}{m-1}\frac{\{63\times2^5-(m-2)\}}{m-2}\cdots\frac{\{63\times2^5-(m-(m-2))\}}{m-(m-2)} \quad ④$$

しかるに，$\dfrac{\{63\times2^5-(m-k)\}}{m-k}$ $(k=0,1,2,...,m-2)$において，

分母$(m-k)$と分子$\{63\times2^5-(m-k)\}$がもつ因数2の数は同じである。

なぜなら，$m-k=2^j p$（$j=0,1,2,...$，またpは奇数）とおくと，

$\{63\times 2^5-(m-k)\}=(63\times 2^{5-j}-1)2^j p$となるからである。したがって，④式は奇数である。

ただし，$j=5$のとき，$(63\times 2^{5-j}-1)=(63-1)=62=2\times 31$となって，分母の因数2が１つ増える。したがって，④式は偶数となる。

$m=2^5p+k$となる最小のmは，$p=1$，$k=0$のときだから，$m=2^5=32$　（答）

＜解説＞

整数の問題である。少々，難しい。解答方針の手がかりが思い浮かばないのである。なにしろ，${}_{2015}C_m$が偶数か奇数かなどということは，考えることはないのである。

こういうときは，どうしたら良いか。適当なmによって，具体的に${}_{2015}C_m$が偶数か奇数か確かめる。そして，解答方針のヒントを見つけることを試みる。幸い，計算は簡単である。

$m=1$，${}_{2015}C_1=2015$（奇数）

$m=2$，${}_{2015}C_2=\dfrac{1}{2}\times 2015\times 2014=2015\times 1007$（奇数）

$m=3$，${}_{2015}C_3=\dfrac{1}{3\times 2}\times 2015\times 2014\times 2013=2015\times 1007\times 2013$（奇数）

ここまで来ると，${}_{2015}C_m$は$m=1$から，奇数が続くということがわかる。そして，奇数ということは，分母と分子の因数2 の数（かず）が同じだということである。偶数ということは，分子の因数2 の数が分母の因数2の数よりも多いということである。${}_{2015}C_m$は整数だから，分子の因数2の数が分母のそれより少ないということはない。

このように考えが進むと，${}_{2015}C_m$の定義式①において，因数2の数が分母，分子で同じかどうかをチェックすれば良いということに気づく。そして，当たり前の事実に気づく。分母，分子とも連続する整数の積だから，奇数，偶数の繰り返しであるということ。すると偶数の数は分母，分子とも同じではないかと推量するにいたる。${}_{2015}C_m$が奇数になるのは，当然かと気づく。

①式を凝視すると，$(2015-m+1)$という項が気になる。$(2015-m+1)=(2016-m)$と見えて，2016という数字が出てくる。2016は2のべき乗で表される数字に見える。$2016=63\times 2^5$とくれば，$(2016-m)=(63\times 2^5-m)$は$m$がもつ因数2 のべき数と一致することがわかる。ただし，mがもつ因数2のべき数が5 のときは，$(63\times 2^5-m)=2^5(63-m')$となって，$63-m'$が偶数となり，④式が偶数となる可能性が見えてくる。

以上の思考のプロセスを数式によって上手に表現する。存外，短い数式のプロセスであり，だんだんと霧が晴れるような気分になる。

第　6　問

nを正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数$g(x)$を次のように定める。

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1\text{のとき})\\ 0 & (|x|>1\text{のとき})\end{cases}$$

$f(x)$を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$をみたすx に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx\leqq q$$

(2) 関数$h(x)$を次のように定める。

$$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1\text{のとき}) \\ 0 & (|x|>1\text{のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

＜解答＞

(1)

与えられた式から，

$$g(nx)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2} & (|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{のとき}) \\ 0 & (|x|>\dfrac{1}{n}\text{のとき}) \end{cases}$$

したがって，$\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)dx=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}f(x)dx$

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$をみたすx に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つから，

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}p\,dx\leqq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}f(x)dx\leqq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}q\,dx$$

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx+x\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$$

したがって $\displaystyle\frac{p}{n}\leqq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{\cos((\pi nx)+1)}{2}\right\}f(x)dx\leqq\frac{q}{n}$，したがって $\displaystyle\frac{p}{n}\leqq\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx\leqq\frac{q}{n}$

$\therefore\ \displaystyle p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx\leqq q$

(2)

与えられた式から，

$$h(nx)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi nx) & (|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{のとき}) \\ 0 & (|x|>\dfrac{1}{n}\text{のとき}) \end{cases}$$

$$\frac{dg(nx)}{dx}=-\frac{\pi n}{2}\sin(\pi nx)=nh(nx)$$

$$\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=\frac{1}{n}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{dg(nx)}{dx}\right\}\log(1+e^{x+1})\,dx$$

不定積分に部分積分法を適用して，

$$\int\left\{\frac{dg(nx)}{dx}\right\}\log(1+e^{x+1})\,dx=g(nx)\log(1+e^{x+1})-\int g(nx)\times\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left\{\frac{dg(nx)}{dx}\right\}\log(1+e^{x+1})\,dx=\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\times\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\times\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$とおく。$f'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}>0$だから，$f(x)$は単調増加関数。

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$を満たすxに対して，$f\left(-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$

(1)の結果から，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=-\frac{1}{n}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$だから，

$$-\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\leqq-\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}=\frac{e}{1+e}$だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=\frac{-e}{1+e}$

＜解説＞

(1)

与えられた定義式から，$|x|>\dfrac{1}{n}$に対して，$g(nx)=0$であることを利用して，積分計算を進めれば，結論に至る。

(2)

(1)を利用するのだが，どう利用するのか。似たような式だが，(1)の考え方をそのまま使ってもうまくいかない。ここで，$\dfrac{dg(nx)}{dx}=nh(nx)$に気づくと，ハハーンということになる。そうなれば，部分積分法を使って与えられた式を変形して，(1)を利用できる式を導くことができる。この気づきがポイ

ントなのだが，存外気づかないことがある。後の祭りで，アァーとため息をつくことになる。ここは，どこかにとっかかりがないか，式を凝視することだ。すると，良く勉強してきた者に特有の直感が働き，幸運の女神が訪れる。

万一，この気づきがなかったとき，以下のような解法があることを紹介する。

$f(x)=\log(1+e^{x+1})$ とおく。$f'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}>0$ だから，$f(x)$ は単調増加関数。

したがって，n が十分大きいとして，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$ は直線と見なすことができる。$f(0)=\log(1+e)$，$f'(0)=\dfrac{e}{1+e}$，だから，直線の式は $y=\dfrac{e}{1+e}\{x+\log(1+e)\}$

$$\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\fallingdotseq\frac{e}{1+e}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\{x+\log(1+e)\}dx$$

$$=\frac{e}{1+e}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)x\,dx+\frac{e}{1+e}\log(1+e)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)dx=\frac{e}{1+e}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)x\,dx$$

ここで，$h(nx)$ は奇関数だから，$\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)dx=0$ とした。

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)x\,dx=-\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}x\sin(\pi nx)\,dx=-\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{(\pi n)^2}\Big[-\pi nx\cos(\pi nx)+\sin(\pi nx)\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{(\pi n)^2}\times2\pi=-\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{e}{1+e}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)x\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{e}{1+e}\left(\frac{-1}{n^2}\right)=\frac{-e}{1+e}$$

こちらの方が単純なのだが，$\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\fallingdotseq\frac{e}{1+e}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\{x+\log(1+e)\}dx$ と $\fallingdotseq$ を使わざるをえないことで，厳密さが欠けるとして，減点されるかも知れない。

<総評>

例年のように，解答方針の着想力，解答論理の構成力，計算力等を必要とする一筋縄ではいかない問題が揃っている。受験生それぞれの得意分野等によって，問題の難易は異なるし，取組順序も異なるだろう。筆者は，４，１，３，６，５，２の順序で取り組みたいと思った。初めの３問を正答し，６，５については部分点が欲しいところである。２はあっさりと，できる人がいるかも知れない。

第１問

2次方程式の正の実数解を与える$(x\,,\,y)$を図示する問題と捉えて，解答方針を考えれば，大きな紛れなく解答できるであろう。難易度はＢ－。

第２問

確率漸化式の問題として捉えるために気づきと着想が必要だが，そこを超えると解答を導く論理と計算は難しくない。難易度はＡ－。

第３問

２次関数曲線と対数関数曲線の微分，積分に関する問題。粘り強い思考とていねいな計算が必要である。方針に戸惑うことは少ないので，取り組みやすい。⑴は共有点が１点のみという条件から，両曲線が接していることを，どのように導くかが，数学的に問われる。グラフから指摘するだけだと，部分点かも知れない。⑴は難易度Ｂ＋。⑵は座標軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求める積分問題。この種の問題は入試数学には頻出されるので，戸惑うことはないだろう。部分積分法を用いる。計算がやや複雑になるので，ていねいに進める。難易度Ｂ。⑶は⑵において正しい結果を得ていれば，問題ない。全体として難易度Ｂ。

第４問

数列の問題。与えられた数列の連続する項間の関係を用いることで，複雑な計算なく，結論を導くことができる。数列の項の一般表式を求めて，結論を導こうとすると，複雑な計算の迷路にはまり込むので注意する。全体として，難易度はＢ。

第５問

問題文が短いのは嬉しい。しかし整数問題の常として，解答方針の着想が必要で，思案しているうちに，時間が過ぎてゆく恐れがある。うまく閃めくと，存外すらすらと解けてゆく。閃くかどうかの運不運がありそうだ。閃きを生み出すためには，思考を紙面に書きだすことが良い。思考の断片を見ているうちに，それらを繋ぐ思考の過程が生み出されてくることがある。

整数問題と確率問題の分野は，練習問題を数多く解き，解答の感覚を養っておきたい。

難易度はＡ。

第６問

⑴は普通に積分計算を進めていけば良い。⑵は⑴を利用するための気づきが必要である。部分積分法によって，積分関数を求める。対数関数の微分方法，三角関数の微分積分などが必要だから，習熟すること。難易度Ｂ＋。

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題B　整数n，m，l が$5n+5m+3l=1$をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$が成り立つ。

<解答>

命題Aは偽である。

$f(x)=x^3-26x^2+2600$なる関数を考える。$f'(x)=3x^2-52x=3x\left(x-\dfrac{52}{3}\right)$

$f(x)$は下図のように変化するから，$x=\dfrac{52}{3}$で最小値をとる。$x=\dfrac{52}{3}$をはさむ最も近い正の整数は17と18である。

しかるに $f(17)=-1<0$ だから，命題は偽で，反例は命題が$n=17$で成立しない。

x		0		$\frac{52}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

命題B は真である。証明は以下の通り。

$3l=1-(5n+5m)$を下式に代入して，

$10nm+3ml+3nl=10nm+3l(m+n)=10nm+(n+m)-5(n+m)^2=(n+m)-5(n^2+m^2)$

明らかに，$n-5n^2<0$，$m-5m^2<0$だから，$10nm+3ml+3nl<0$が成り立つ。

＜解説＞

真偽の判定は，暗算や図を描いたりして，大雑把にあたりをつけることが必要である。反例が容易に見つかる問題なら良いが，両命題とも，そうではない。そうなると，証明と真偽判定が同時併行となる。とはいえ文系の受験生も，容易に解かねばならない問題である。

命題A

暗算で真偽はわからない。3次関数として，極値を求めることが速そうと考える。

命題B

暗算で真偽はわからない。簡単な式の変形によって証明する。

第２問

座標平面上の２点A$(-1, 1)$，B$(1, -1)$を考える。また，P を座標平面上の点とし，そのx 座標の絶対値は１以下であるとする。次の条件 (ｉ) または (ⅱ) をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(ｉ) 頂点のx 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点A，P，B をすべて通るものがある。

(ⅱ) 点A，P，B は同一直線上にある。

＜解答＞

点P を(x_p, y_p)とする。$|x_p|\leqq 1$　①である。

(ｉ)

2次関数を$y=ax^2+bx+c$とする。点A，B を通るので，

$1=a-b+c$，$-1=a+b+c$，したがって$b=-1$，$c=-a$

2次関数は$y=ax^2-x-a=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1+4a^2}{4a}$

頂点のx座標の絶対値が1以上だから，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$，$\therefore |a|\leqq\dfrac{1}{2}$　②

点Pを通るから，$y_p=a{x_p}^2-x_p-a$,

${x_p}^2=1$のとき，$y_p=-x_p$，したがって点Pは$(1,-1)$，$(-1,1)$　③

${x_p}^2\neq 1$のとき$a=\dfrac{x_p+y_p}{{x_p}^2-1}$

したがって②から，$\dfrac{|x_p+y_p|}{1-{x_p}^2}\leqq\dfrac{1}{2}$，$2|x_p+y_p|\leqq 1-{x_p}^2$

$x_p+y_p\geqq 0$のとき，$y_p\leqq -\dfrac{1}{2}{x_p}^2-x_p+\dfrac{1}{2}$　④

$x_p+y_p<0$のとき，$y_p>\dfrac{1}{2}{x_p}^2-x_p-\dfrac{1}{2}$　⑤

(ii)

直線ABは$y=-x$

点A，P，Bは同一直線上にあるので，

$y_p=-x_p$　⑥

以上によって，点Pの範囲は

①の下で，③，④，⑤，⑥だから

図１の打点部である（境界を含む）。

その面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$　（答）

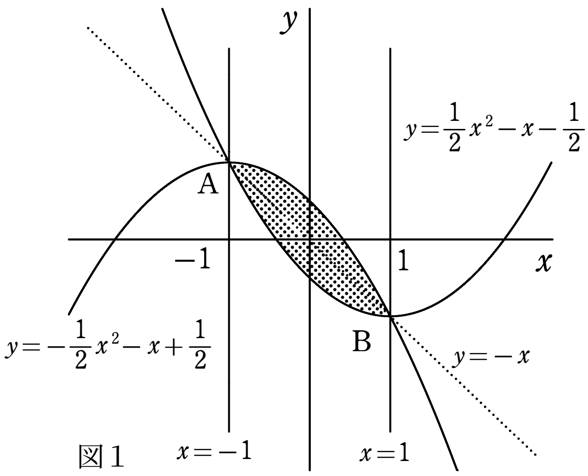

図１

＜解説＞

与えられた条件の下で，2次関数の係数の条件を確定し，点Pの座標の範囲を決めていけば良い。

第　3　問

lを座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の３条件(i)，(ii)，(iii)で定まる円C_1，C_2を考える。

(i) 円C_1，C_2は２つの不等式$x\geqq 0$，$y\geqq 0$で定まる領域に含まれる。

(ii) 円C_1，C_2は直線lと同一点で接する。

(iii) 円C_1はx軸と点$(1,0)$で接し，円C_2はy軸と接する。

円C_1の半径をr_1，円C_2の半径をr_2とする。$8r_1+9r_2$が最小となるような直線lの方程式と，その最小値を求めよ。

＜解答＞

図２を参照する。

円C_1，C_2 の中心をそれぞれO_1，O_2とする。OO_1 がx 軸となす角をθとする。

すると，直線l とOO_1 がなす角もθである。直線lとOO_2 がなす角は，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

$r_1=\tan\theta$　①

$k=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2r_1}{1-{r_1}^2}$　②

①を用いて，$r_2=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$　③

したがって，$8r_1+9r_2=8r_1+\dfrac{9(1-r_1)}{1+r_1}=\dfrac{8{r_1}^2-r_1+9}{1+r_1}$

$f(r_1)=\dfrac{8{r_1}^2-r_1+9}{1+r_1}$ とおき，$f'(r_1)=\dfrac{8{r_1}^2-+16r_1-10}{(1+r_1)^2}=\dfrac{2(2r_1-1)(2r_1+5)}{(1+r_1)^2}$

図２のように，$r_1=\dfrac{1}{2}$ のとき，$8r_1+9r_2=f(r_1)$ は最小値をとる。

②を用いて，$k=\dfrac{2r_1}{1-{r_1}^2}=\dfrac{4}{3}$　したがって直線l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$（答）

また最小値は$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=7$　（答）

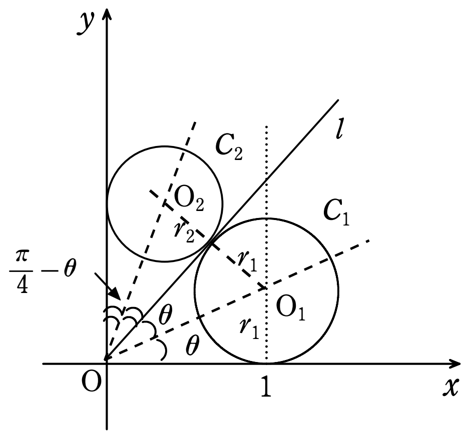

図１

r_1	0		$\frac{1}{2}$	
$f'(r_1)$		$-$	0	$+$
$f(r_1)$		↘	7	↗

図２

<解説>

題意は簡明であるが，解答方針を着想する必要がある。問題図を見ながら，解答方針を考える。円の中心と原点を結ぶ線を引いて，図形を凝視すると，直線lの傾き，円の半径r_1，r_2の間には簡単な関係のありそうなことが見えてくるではないか。

ここは，円の方程式や円どうしが接触する条件などの計算をすることを考えると，難しくなりそうだ。

第 4 問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。コインを投げ，表が出たときは文字列AA を書き，裏が出たときは文字B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AAB をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを5 回投げ，その結果が順に表裏裏表裏であったとすると，得られる文字列は，

A A B B A A B

となる。このとき，左から4 番目の文字はB，5番目の文字Aである。

(1) nを正の整数とする。n回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左からn番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) nを2 以上の整数とする。n回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字がA で，かつn番目の文字がB となる確率を求めよ。

理科の第２問とほぼ同じ。

<解答>，<解説>は理科第２問を参照のこと。

<総評>

第１，２，３問は正答したい。第４問は文系には難しい問題だと思う。

第１問

最初に着手して，完答し落ち着きたい。難易度C。

第２問

解答方針に紛れのない，文系には手頃な問題と思われる。着実に正答したい。難易度はB。

第３問

図形を凝視して，解答方針を着想してほしい。難易度はA－。

第４問

理系とほぼ同じ確率の問題で，着眼，着想が必要だ。難易度はA－。

140831