2016（H28)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）	教育学部（理系）、医学部（人間健康科） 総合人間学部（理系）、経済学部（理系） 理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）	総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）　　200点満点，150分

$\boxed{1}$　　(30点)

(1) n を2 以上の自然数とするとき，関数

$$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値M_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ.

＜解答＞

(1)

$$\begin{aligned}
f'_n(\theta)&=-\sin\theta\sin^{n-1}\theta+(1+\cos\theta)(n-1)\sin^{n-2}\theta\cos\theta\\
&=-\sin^n\theta+(n-1)\sin^{n-2}\theta\cos\theta+(n-1)\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\\
&=\sin^{n-2}\theta\{(n-1)\cos^2\theta+(n-1)\cos\theta-\sin^2\theta\}\\
&=\sin^{n-2}\theta\{n\cos^2\theta+(n-1)\cos\theta-1\}=\sin^{n-2}\theta(n\cos\theta-1)(\cos\theta+1)
\end{aligned}$$

$f'_n(\theta)=0$となるθ をα とすれば，$\cos\theta=\dfrac{1}{n}=\cos\alpha$。

n は2 以上の自然数だから，$0<\cos\alpha\leqq\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ \dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$f_n(\theta)$ は図１のように変化するから，

最大値 $M_n=f_n(\alpha)=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$　（答）

θ	0		α		$\pi/2$
$f_n'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		↗		↘	

図１

(2)

$$(M_n)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n=e^{\frac{1}{2}}$　（答）

＜解説＞

(1)

解答方針は立てやすい。関数$f_n(\theta)$の変化を考える。$f_n(\theta)$は容易に微分でき，$f'_n(\theta)=0$となる条件も簡易な表式で求まる。

(2)

M_n は簡易な表式となる。これをさらに変形すると，$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めやすくなる。

とはいえ，教科書に記載の e の導出方法を的確に理解していないと，ミスしやすい。

教科書には次のように記載されている。

$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$，ただし$k>0$で$k\to 0$である。つまり，$e=\lim_{k\to +0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$。

そして$\lim_{k\to -0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$も e となるとされている。すなわち$e=\lim_{k\to +0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to -0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$

したがって，$n=\frac{1}{k}$とおけば，$e=\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to -\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to \infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$

$\boxed{2}$ (30点)

素数p，qを用いてp^q+q^pと表される素数をすべて求めよ.

＜解答＞

2 以外の素数はすべて奇数である。したがって2 以外の素数p，q によるp^q，q^p とも奇数だから，p^q+q^p は偶数となり，素数にはならない。

したがって$p=2$の場合を考えれば良い。

$q=3$のとき，$2^q+q^2=2^3+3^2=17$　素数

$q=5$のとき，$2^q+q^2=2^5+5^2=32+25=57=3\times19$　① 素数ではない

$q>5$の素数に対し，$2^q+q^2=M$　② とおく。

②の両辺から①の両辺を引くと，

$2^q+q^2-(2^5+5^2)=(2^q-2^5)+(q^2-5^2)=(2^{q-5}-1)2^5+(q+5)(q-5)=M-3\times19$　③

qは素数だから，$q-5=2m$（mは正の整数）とおくと，$2^{q-5}-1=2^{2m}-1=(2^m+1)(2^m-1)$

2^m-1，2^m，2^m+1は連続する3つの整数だから，2^m-1か2^m+1のいずれかが3の倍数である。

したがって$(2^m+1)(2^m-1)$は3の倍数である。

また，qは素数だから3の倍数ではないので，$q+5$か$q-5$のいずれかが3の倍数である。

なぜなら，$q=3k-1\ (k=3,4,...)$とすれば，$q-5=3(k-2)$，$q=3k+1\ (k=3,4,...)$とすれば，$q+5=3(k+2)$，となって3の倍数である。

③から，$M=(2^{q-5}-1)2^5+(q+5)(q-5)+3\times19$は3の倍数となり，素数ではない。

以上によって，素数p，qを用いてp^q+q^pと表される素数は17　（答）

＜解説＞

一瞥して，難しい問題だと感じる。解答方針に着想が必要である。こういう場合はp，qに素数を当てはめて，どうなるか，具体的に見ながら，解答方針を考える。すると，2以外の素数はすべて奇数だから，2以外の素数p，qではp^q+q^pは素数にならないことがわかる。

2^q+q^2と表される素数を考えるという問題に帰着する。この式を凝視しても，得られる数が素数かどうか，どのように考察すべきかわからない。$q=3,5,7,...$とおいてみると，$q=5,7,11$では素数にはならないことがわかる。$q\geqq5$では素数にはならないという予想を立てて，2^q+q^2と表される素数は$q=3$のときの17であるという結論を予想する。しかし，この記述だけでは満点にはならない。

「素数p，qを用いてp^q+q^pと表される素数をすべて求めよ」という問題だから，$q=3$以外では素数にならないことを証明しなければならない。

$q=3$のとき，$2^q+q^2=2^3+3^2=17$　素数

$q=5$のとき，$2^q+q^2=2^5+5^2=32+25=57=3\times19$

$q=7$のとき，$2^q+q^2=2^7+7^2=128+49=177=3\times59$

$q=11$のとき，$2^q+q^2=2^{11}+11^2=2048+121=2169=3^2\times241$

$q\geqq5$では3の倍数になることが予想される。

結局，この問題は「$q\geqq5$の素数のとき2^q+q^2は3の倍数である」という命題の証明に帰着する。

この問題も着想が必要だ。式をいじろうと思っても単純過ぎて，やりようがない。$q=5$のとき3の倍数になるから，$q=5$のときとの差分も3の倍数になるはずだ，と考えることができれば先に進める。確かに，差分から出てくる各項は3の倍数になりそうである。

30点満点で，どのように採点するのか，この種の問題では大学の採点教員も苦労するのではないか。予想するに，単に素数は17とするだけでは10点，妥当な証明を試みていれば20点，証明が完成していれば30点というような段階的な採点ではなかろうか。

$\boxed{3}$ (35点)

四面体OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ.

条件：頂点A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る.

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の３つの頂点がなす三角形のことをいう.

<解答>

頂点A から対面の三角形 OBC へ下ろした垂線をAH_Aとする。H_Aは三角形 OBC の外心だから，その外接円の中心である。すると，$BH_A=CH_A=OH_A$，$\angle AH_AB=\angle AH_AC=\angle AH_AO=$直角

したがって，$\triangle AH_AB\equiv\triangle AH_AC\equiv\triangle AH_AO$，$\therefore$ AB=AC=AO

同様にしてBA=BC=BO，CA=CB=CO。

以上によって，四面体の６つの辺の長さはすべて等しい。

したがって，四面体の４つの三角形は同じ大きさの正三角形である。したがって，四面体は正四面体である。

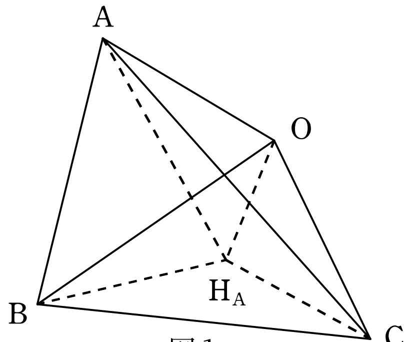

図１

<解説>

問題文を一読して，略図を描いて考えてみる。すると非常に単純な問題であることに気づく。そして，逆にそのことに戸惑いを感じる。京大の数学の問題である。もっと難しい問題のはずだ，などと考えてしまう。再度，問題文を読んで，題意の把握が正確であることを確認するはめになる。

こういう問題も出題されるということだ。

$\boxed{4}$ (35点)

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で

$$|x|\leqq\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1,\quad 0\leqq y\leqq\log a$$

で与えられる図形D を考える。ただしa は1より大きい定数とする.

この図形D をy 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を求めよ.

<解答>

図１のように図形D をy 軸のまわりに１回転させてできる立体は，直線$y=z$と曲線 $|x|=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1$を$y$ 軸のまわりに１回転させてできる立体である。y 軸に垂直な面で立体を切断

すると，切断面には，直線 $y=z$ が回転した軌跡である円と曲線 $x=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1$が 回転した軌跡である円が同心円となっている。二つの円が重ならない円環部が，立体の断面である。この円環の面積をy 軸方向に加算してゆけば，図形D をy 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を 求めることができる。

図形D の輪郭となる点のx 座標は$|x|=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1$，　$0\leqq y\leqq \log a$

輪郭線上の点P$(x\,,\,y\,,\,z=y)$とy 軸上の点 R$(0\,,\,y\,,\,0)$との距離r は

$$r^2=(x-0)^2+(y-y)^2+(y-0)^2=x^2+y^2=\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1\right)^2+y^2$$

直線 $y=z$上 の点Q$(0\,,\,y,\,z=y)$とRとの距離r_0 は

$$r_0{}^2=(0-0)^2+(y-y)^2+(y-0)^2=y^2$$

y 軸に垂直な断面による立体の断面の円環の面積は $\pi(r^2-r_0{}^2)$,

y 軸方向の微小長さdy による立体の体積は $\pi(r^2-r_0{}^2)dy$

したがって，図形D をy 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は,

$$V=\pi\int_0^{\log a}(r^2-r_0{}^2)dy=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1\right)^2dy=\pi\int_0^{\log a}\left(\frac{e^{2y}}{4}+\frac{e^{-2y}}{4}+\frac{1}{2}-e^{y}-e^{-y}+1\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{8}-\frac{e^{-2y}}{8}+\frac{3}{2}y-e^{y}+e^{-y}\right]_0^{\log a}=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-4\left(a-\frac{1}{a}\right)+6\log a\right\}\quad\text{（答）}$$

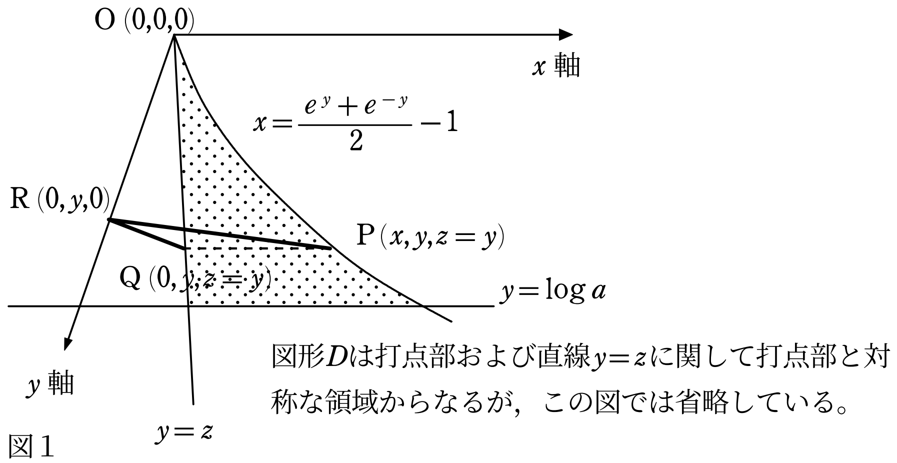

図１

＜解説＞

立体の体積を求める問題。平面図形を軸のまわりに回転してできる立体の体積を求める問題は頻出する。回転の軸に垂直な断面内の該当する図形の断面積を軸方向に加算していくこと（積分することに相当する）により，求める体積を得る。

回転軸に垂直な平面で立体を切断すると，その切断面は回転軸を中心とする円となる。ここでは，$y=z$の直線と垂直な平面との交点が円周を構成する。さらに$|x|=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-1$と垂直な平面との交点が円周を構成する。2つの円に囲まれた円環が立体の断面となる。

$\boxed{5}$ (35点)

xy 平面上の6 個の点 $(0\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(1\,,1)$, $(2\,,0)$, $(2\,,1)$ が図のように長さ1の線分で結ばれている．動点X は，これらの点の上を次の規則に従って1 秒ごとに移動する．

規則：動点X は，そのときに位置する点から出る長さ1の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が$(2\,,0)$にいるときは，$(1\,,0)$，$(2\,,1)$のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．またX が$(1\,,1)$にいるときは，$(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(2\,,1)$のいずれかに$\dfrac{1}{3}$の確率で移動する．

時刻 0 で動点X がO$=(0\,,0)$から出発するとき，n 秒後にXのx 座標が0である確率を求めよ．ただしn は0 以上の整数とする．

＜解答＞

図１において，n 秒後に各点に動点Xが存在する確率をO_n，A_n，・・・のように表す。

$O_n=\dfrac{1}{3}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}C_{n-1}$，$A_n=\dfrac{1}{2}O_{n-1}+\dfrac{1}{2}B_{n-1}+\dfrac{1}{3}D_{n-1}$

$B_n=\dfrac{1}{3}A_{n-1}+\dfrac{1}{2}E_{n-1}$，$C_n=\dfrac{1}{2}O_{n-1}+\dfrac{1}{3}D_{n-1}$

$D_n=\dfrac{1}{2}C_{n-1}+\dfrac{1}{2}E_{n-1}+\dfrac{1}{3}A_{n-1}$，$E_n=\dfrac{1}{2}B_{n-1}+\dfrac{1}{3}D_{n-1}$

ただし，$O_0=1$，$A_0=B_0=C_0=D_0=E_0=0$，$O_n+A_n+B_n+C_n+D_n+E_n=1$

n 秒後にXのx 座標が0，1，2である確率を，それぞれP_n，Q_n，R_nとする。$P_n+Q_n+R_n=1$

$$P_n=O_n+C_n=\frac{1}{2}O_{n-1}+\frac{1}{3}A_{n-1}+\frac{1}{2}C_{n-1}+\frac{1}{3}D_{n-1}=\frac{1}{2}(O_{n-1}+C_{n-1})+\frac{1}{3}(A_{n-1}+D_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{3}Q_{n-1} \quad ①$$

$$Q_n=A_n+D_n=\frac{1}{3}(A_{n-1}+D_{n-1})+\frac{1}{2}(O_{n-1}+B_{n-1}+C_{n-1}+E_{n-1})=\frac{1}{3}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(1-A_{n-1}-D_{n-1})$$

$$=\frac{1}{3}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(1-Q_{n-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}Q_{n-1} \quad ②$$

$$R_n=B_n+E_n=\frac{1}{3}A_{n-1}+\frac{1}{2}E_{n-1}+\frac{1}{2}B_{n-1}+\frac{1}{3}D_{n-1}=\frac{1}{3}(A_{n-1}+D_{n-1})+\frac{1}{2}(B_{n-1}+E_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}R_{n-1}+\frac{1}{3}Q_{n-1} \quad ③$$

①－③から，$P_n-R_n=\dfrac{1}{2}(P_{n-1}-R_{n-1})=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(P_1-R_1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}-0\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ ④

①＋③から，$P_n+R_n=\dfrac{1}{2}(P_{n-1}+R_{n-1})+\dfrac{2}{3}Q_{n-1}$

$$=\frac{1}{2}(P_{n-1}+R_{n-1}+Q_{n-1})+\frac{1}{6}Q_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}Q_{n-1} \quad ⑤$$

④+⑤から，$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}Q_{n-1}$　⑥

②を変形して，$Q_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(Q_{n-1}-\frac{3}{7}\right)$，$Q_n=\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(Q_1-\frac{3}{7}\right)+\frac{3}{7}$

$Q_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}Q_0=\frac{1}{2}$だから，$Q_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$　⑦

⑦を⑥に代入して

$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}Q_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}-\frac{1}{28}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$　（答）

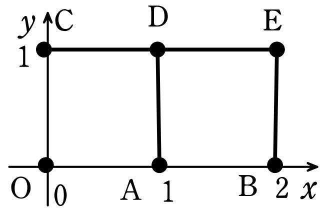

図１

＜解説＞

確率漸化式の問題。n 秒後に動点Xが各点に存在する確率をその1秒前に存在する確率によって表現する。求めるのは，x 座標が0 のときの確率だから，２つの点OとCでの存在確率の和になる。Xのx 座標が0，1，2である確率 P_n，Q_n，R_n の表式 ①，②，③ を求めることがポイントである。

表式 ①，②，③ を見ると，

・$x=0$ には，１秒後に$x=0$ から確率 $\frac{1}{2}$ で，$x=1$ から確率 $\frac{1}{3}$ で動点Xが来る。

・$x=1$ には，１秒後に$x=0$ から確率 $\frac{1}{2}$ で，$x=1$ から確率 $\frac{1}{3}$ で，$x=2$ から確率 $\frac{1}{2}$ で動点Xが来る。

・$x=2$ には，１秒後に$x=1$ から確率 $\frac{1}{3}$ で，$x=2$ から確率 $\frac{1}{2}$ で動点Xが来る。

このことは，例えば，$x=0$となるのは，O点からC点へ確率 $\frac{1}{2}$，C点からO点へ確率 $\frac{1}{2}$，A 点からO 点へ確率 $\frac{1}{3}$，D 点からC 点へ確率 $\frac{1}{3}$ で動点X が来ることから明らかである。したがって初めから，表式 ①，②，③ を書き下して考えることができる。

表式 ①，②，③が求まれば，これらを変形してP_nの表式を求める計算となる。①−③，①+③を計算することにより，効果的に結果を求めることができる。

$\boxed{6}$　(35点)

複素数を係数とする2次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える．

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(ロ) $f(x)$ の係数a，b の少なくとも一方は虚数である．

この２つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす2次式をすべて求めよ．

＜解答＞

条件 (イ)から $f(x^3)=f(x)g(x)$とおくことができる。ただし $g(x)$ はx の4 次以下の多項式である。

2次方程式$f(x)=0$ の２つの解をα，β とすれば，

$f(\alpha^3)=f(\alpha)g(\alpha)=0$

$f(\beta^3)=f(\beta)g(\beta)=0$

したがって，α^3，β^3は$f(x)=0$ の解である。

ⅰ) $\alpha^3\fallingdotseq\beta^3$のとき

α^3，β^3も$f(x)=0$ の２つの解である。

2次方程式の解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=-a$　①，$\alpha\beta=b$　②

$\alpha^3+\beta^3=-a$　③，$\alpha^3\beta^3=b$　④

②，④から$b^3=b$，$\therefore$ $b=0$または$b^2=1$

①～④を用いて $(\alpha+\beta)^3=-a^3=\alpha^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^3=-a-3ab$

bは実数だから$a\fallingdotseq0$なので，$a^2=3b+1$

条件(ロ)からaは虚数だから，$b=-1$でなければならない。すると $a^2=-2$，$\therefore$ $a=\pm\sqrt{2}\,i$

したがって (イ)，(ロ) を同時に満たす2次式は，　$x^2\pm\sqrt{2}\,ix-1$　⑤（答）

ⅱ) $\alpha^3=\beta^3$のとき

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha=\beta$とすれば，$\alpha=\alpha^3=\dfrac{a}{2}$，$b=\dfrac{a}{4}$ なので，a，bとも実数となり，条件(ロ)を満たさなない。

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$の場合を検討すれば良い。

$\alpha=\alpha^3=\beta^3$のとき

$\alpha\fallingdotseq0$だから，$\alpha^2=1$，$\therefore$ $\alpha=\pm1$，$\beta^3=\pm1$，$(\beta\mp1)(\beta^2\pm\beta+1)=0$，$\beta\mp1\fallingdotseq0$だから，

$\alpha=1$に対して，$\beta^2+\beta+1=0$，$\therefore$ $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$a=-(\alpha+\beta)=-\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，$b=\alpha\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　（複合同順）

したがって，$f(x)=x^2-\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　（複合同順）⑥（答）

$\alpha=-1$に対して，$\beta^2-\beta+1=0$，$\therefore$ $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$a=-(\alpha+\beta)=-\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，$b=\alpha\beta=-\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　（複合同順）

したがって，$f(x)=x^2-\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}x-\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　（複合同順）⑦（答）

$\alpha\fallingdotseq\alpha^3$のとき，$\beta=\alpha^3=\beta^3$となり，$\alpha=\alpha^3=\beta^3$のときと同じことである。

以上をまとめると，２つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす2次式は⑤，⑥，⑦である。

＜解説＞

$f(x^3)=x^6+ax^3+b$ が $f(x)$ で割り切れる，ということの意味を理解していなければならない。2 次方程式 $f(x)=0$ の解 α，β としたとき，(イ)の条件により，α^3，β^3 もまた解になるということの気づきが本問のポイントである。

解と係数の関係を使って，a，b に課せられる条件を明らかにすることによって，(イ)，(ロ) を同時に満たす2 次式を求めることができる。

上記のような気づきがなかった場合，うまい方法ではないが，単純な解法を記載する。

$$f(x^3)=x^6+ax^3+b=(x^2+ax+b)(x^4+px^3+qx^2+rx+s)$$
$$=x^6+(a+p)x^5+(b+ap+q)x^4+(aq+bp+r)x^3+(bq+ar+s)x^2+(as+br)x+bs$$

とおくことができる。両式の x の各次の係数を等しいとおいて，

$a+p=0$，$b+ap+q=0$，$aq+bp+r=a$，$bq+ar+s=0$，$as+br=0$，$bs=b$

$b=0$ のとき，$a^2=1$ となって(ロ)の条件を満足しない。

$b\fallingdotseq 0$ のとき

$$p=-a,\ q=a^2-b=\frac{a^2-b}{b^2},\ r=-\frac{a}{b},\ s=1$$

i) $b=a^2$ のとき，$aq+bp+r=a$ によって，$b^2+b+1=0$，$\therefore\ b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，

$$a=\pm\sqrt{b}=\pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

$a=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}=p+qi$ とおくと，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

$a=\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}=p+qi$ とおくと，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

したがって，$f(x)=x^2+\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ （複合同順） ⑧ （答）

$a=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}=p+qi$ とおくと，$p=-\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

$a=-\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}=p+qi$ とおくと，$p=-\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

したがって，$f(x)=x^2-\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}x+\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ （複合同順） ⑨ （答）

ii) $b\fallingdotseq a^2$ のとき，$b^2=1$，$b=\pm1$

$b=1$ とすれば，$a^2=4$ となり条件 (ロ) を満たさない。

$b=-1$ とすれば，$a^2=-2$，$a=\pm\sqrt{2}i$ となり，(ロ) を満足する。

したがって，$f(x)=x^2\pm\sqrt{2}ix-1$ ⑩ （答）

以上の結果，条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす2 次式は，⑧，⑨，⑩である。

この解法は直ぐに思いつくが，場合分けがやや錯綜するので，ミスしないこと。

なお，⑥，⑦式と⑧，⑨式の表現が異なるが，同じ４つの式を示している。

<理系総評>

$\boxed{3}$ を除いて，骨の折れる思考を要する問題が並んでいる。最初にざっと問題文に目を通し，難易を見積り，着手する順序を決めたい。私の場合は$\boxed{3}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{4}$ であった。

$\boxed{1}$

題意は簡明で解答方針に紛れがないので，扱いやすい。ただし，自然対数の底 e の導出について，教科書の記載を的確に理解していないと，ミスしやすいので，要注意である。難易度B。

$\boxed{2}$

整数の問題。問題文が短いのはありがたい。結論は容易に求まるが，証明は容易ではない。整数の面白い証明問題となる。解答方針に着眼，着想が必要であり，難易度A－。

$\boxed{3}$

望星塾において2010年度以降の京大入試の数学問題を扱ってきたが，これほど容易な問題は初めてだ。問題文の把握が正しいかどうか，疑心暗鬼となった受験生も多かろう。こういう問題もあるということで，完答しなければならない。難易度C－。

$\boxed{4}$

曲線によって囲まれた図形を軸のまわりに回転してできる立体の体積を求める問題は頻出する。多くの場合，図形はxy 平面内で定義され，立体はx 軸またはy 軸のまわりの回転によって形成される。回転軸と図形が同一平面にあるので，立体のイメージも描き易く，計算過程も考え易い。本問は，図形は$y=z$ 平面で与えられ，回転軸はy 軸であり，図形の平面内に回転軸は存在しない。練習問題等で扱ったことがあれば，戸惑うことがないだろうが，初めてだと，解答方針に時間が必要になる。そういう点で難しさがある。難易度はA－。

$\boxed{5}$

しばしば出題される確率過程の問題。上手に確率漸化式を表現することがポイントである。その上で，上手に一般表式を求めることが必要である。このために，式を見つめ，練習問題等の勉学によって培った直感や方法を働かせていく。過去の問題と比較して難しいということはない。難易度A－。

$\boxed{6}$

新課程で復活導入された複素数を含む問題。複素数の問題は練習問題も少なく，受験者も習熟していない可能性が高いので，戸惑うかも知れない。気づきが良ければ，解答への道をスムーズに辿ることができよう。気づきがないと，少々煩瑣な解法に頼ることになる。難易度はA。

160503

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$

(30点)

xy 平面内の領域

$$x^2+y^2 \leqq 2, \quad |x| \leqq 1$$

で，曲線 C : $y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ.

<解答>

$x^2+y^2=2$ と曲線 C : $y=x^3+x^2-x$ の交点は，$(2-x^2)-(x^3+x^2-x)^2=0$とおいて

$(2-x^2)-(x^3+x^2-x)^2=(x+1)(x-1)\{1-(x^3+x^2-x)(x+1)\}=0$から，$x=\pm 1$

曲線 C の式を変形すると，$y=x^3+x^2-x=x(x^2+x-1)=x\left\{\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

x 軸との交点は，$x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ，0 ，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$y'=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$，したがって曲線 C は図１のように変化する。

$x^2+y^2=2$と曲線 C のグラフを描くと，求める面積は図２の打点部だから，

$$\int_{-1}^{1}\{\sqrt{2-x^2}-(x^3+x^2-x)\}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx-\int_{-1}^{1}(x^3+x^2-x)dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta\,d\theta-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$$ （答）

x	-1		$\frac{1}{3}$		1
y'	0		0		
y		↘		↗	

図１

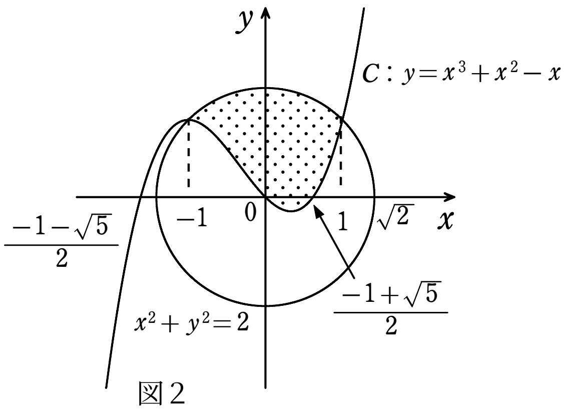

図２

＜解説＞……………………………………………

題意は簡明な積分の問題。円と曲線 C の図を描いて，面積を求める部分を確定する。

$x^2+y^2=2$ は円の式である。曲線 C の 3 次式を因数分解すると，x 軸と3 点で交わることがわかる。以上によって，グラフを描いて，

領域　$x^2+y^2\leqq 2$，　$|x|\leqq 1$

であって，曲線 C の上側にある部分を確定する。

積分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$ は良く知られているように，$x=\sqrt{2}\sin\theta$ なる変数変換によって行う。

$x=\sqrt{2}\sin\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$，$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-2\sin^2\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

$x=\pm 1\rightarrow \sin\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta+1)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1+\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{2}$ (30点)

ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある．「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする．この装置のボタンを20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は36 %である．1 回以上「あたり」の出る確率が90 %以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか．必要なら$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$を用いてよい．

＜解答＞

ボタンを押すと「はずれ」が表示される確率をqとする。

20回押したとき，1回以上「あたり」の出る確率をP_{20}とすれば，

「あたり」が出ず「はずれ」だけが出る確率 Q_{20} はP_{20} の余事象だから $Q_{20}=1-P_{20}$,

しかるに $Q_{20}=q^{20}$，$P_{20}=0.36$ だから，$q^{20}=0.64$ ①

①の両辺の常用対数をとると，$\log_{10} q=\dfrac{\log_{10} 0.64}{20}=\dfrac{6\log_{10} 2-2}{20}=0.3\log_{10} 2-0.1$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$を用いると，$-0.0097 < \log_{10} q < -0.00967$ ②

N 回押すことにより1回以上「あたり」の出る確率P_N が90% 以上となるということは，

$P_N=1-Q_N \geqq 0.9$，$Q_N=q^N \leqq 0.1$ ③，

ただしQ_N はN 回押すことにより「あたり」が出ず「はずれ」だけが出る確率でP_N の余事象

③の両辺の常用対数をとると，$N\log_{10} q \leqq -1$，$\therefore N \geqq \dfrac{-1}{\log_{10} q}$

②により$\dfrac{-1}{\log_{10} q}$を評価してみると，$-0.0097=\log_{10} q$のとき $\dfrac{-1}{\log_{10} q} \fallingdotseq 103.09$,

$\log_{10} q < -0.00967$のとき $\dfrac{-1}{\log_{10} q} \fallingdotseq 103.4$, $\therefore$ 自然数 $N \geqq 104$,

したがって1回以上「あたり」の出る確率が90%以上となるためには，最低104回押せばよい。

＜解説＞

1回以上「あたり」が表示される事象の余事象は，「あたり」が出ず「はずれ」だけが出る事象である。この余事象の発生する確率は毎回「はずれ」だから，$Q_{20}=q^{20}$と簡単に表現できる。

別解を示そう。

ボタンを押すと「あたり」の表示される確率をpとする。$p+q=1$である。

20回押したとき，1回以上「あたり」が出る確率は $P_{20}=\displaystyle\sum_{m=1}^{20} {}_{20}C_m p^m (1-p)^{20-m}=0.36$

しかるに $\displaystyle\sum_{m=0}^{20} {}_{20}C_m p^m (1-p)^{20-m}=\{p+(1-p)\}^{20}=1$

左辺は ${}_{20}C_0 p^0 (1-p)^{20}+P_1=(1-p)^{20}+0.36=1$，$\therefore (1-p)^{20}=0.64$，$1-p=q$ だから①式と同じ。

以下は上記の解答と基本的には同じである。

両辺の常用対数をとることにより，$20\log_{10}(1-p)=\log_{10} 0.64=\log_{10} 2^6-\log_{10} 10^2=6\log_{10} 2-2$

$\log_{10}(1-p)=0.3\log_{10}2-0.1$

$0.09030-0.1<0.3\log_{10}2-0.1<0.09033-0.1$, $\therefore 0.09030-0.1<\log_{10}(1-p)<0.09033-0.1$

$-0.0097<\log_{10}(1-p)<-0.00967$

N回押すことにより1回以上「あたり」の出る確率が90%以上となるということは,

$P_N=\sum_{m=1}^{N}{}_NC_m p^m(1-p)^{N-m}\geqq 0.9$だから, ${}_NC_0p^0(1-p)^N+P_N=(1-p)^N+P_N=1$,

$\therefore (1-p)^N=1-P_N\leqq 1-0.9=0.1$, 両辺の常用対数をとることにより, $N\geqq\dfrac{-1}{\log_{10}(1-p)}$

$-0.0097=\log_{10}(1-p)$のとき, $\dfrac{-1}{\log_{10}(1-p)}\fallingdotseq 103.09$

$\log_{10}(1-p)<-0.00967$のとき, $\dfrac{-1}{\log_{10}(1-p)}\fallingdotseq 103.4$

したがって, $N\geqq 104$, 1回以上「あたり」の出る確率が90%以上となるためには,
最低104 回押せばよい。

$\boxed{3}$ (30点)

n を4 以上の自然数とする. 数2 , 12 , 1331 がすべてn 進法で表記されているとして,

$$2^{12}=1331$$

が成り立っている. このときn はいくつか. 十進法で答よ.

＜解答＞

n 進法表記の2 , 12 , 1331を10進法表記すると,

$2=2n^0=2$, $12=n^1+2n^0=n+2$, $1331=n^3+3n^2+3n^1+n^0=n^3+3n^2+3n^1+1$

$2^{12}=1331$から, $2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$

2^{n+2}と$(n+1)^3$の大小関係を調べる。

$n=4$ では, $2^{n+2}=2^6=64<(n+1)^3=5^3=125$

$n=5$, 6 でもこの大小関係は変わらない。

$n=7$ では, $2^{n+2}=2^9=512=(n+1)^3=8^3=512$

$n\geqq 8$ では, $2^{n+2}>(n+1)^3$となるので, 求めるn は $n=7$ (答)

＜解説＞

n進法で表記した数 $a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0$ は, 10進法で表記すると数 $a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n^1+a_0n^0$ になることを理解していること。

$\boxed{4}$ (30点)

理系の $\boxed{3}$ に同じ.

$\boxed{5}$ (30点)

実数を係数とする3次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える．

(イ) 方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である．

(ロ) 方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくも１つもつ．

この２つの条件 (イ)，(ロ) を同時に満たす3次式をすべて求めよ．

＜解答＞

3次方程式$f(x)=0$の３つの解をα，β，γとする。3次方程式は必ず1つの実数解をもつ。それをγとする。条件(イ)によりα^3，β^3，γ^3も解である。

条件(ロ)から，虚数解として $\alpha=p+qi$（ただしqは0でない実数）とおく。

すると，共役な複素数 $p-qi$ も解である。そこで$\beta=p-qi$とおく。

ｉ) α^3，β^3とも実数ではないとき

$\alpha^3 \fallingdotseq \beta^3$だから，条件(イ)により$\alpha^3$，$\beta^3$，$\gamma^3$ は3次方程式$f(x)=0$ の異なる解である。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\gamma^3)(x-\alpha^3)(x-\beta^3)$とおくことができる。

実数解はγとγ^3だから，$\gamma=\gamma^3$，したがって$\gamma=0$または$\gamma^2=1$

x の各次数の係数を比較することにより，

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a$　①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=(\alpha\beta)^3+(\beta\gamma)^3+(\gamma\alpha)^3=b$　②

$\alpha\beta\gamma=\alpha^3\beta^3\gamma^3=-c$　③

$\gamma=0$のとき

③から$c=0$

②から$\alpha\beta=(\alpha\beta)^3=b$，$\alpha\beta \fallingdotseq 0$，$\therefore (\alpha\beta)^2=1$，$\alpha\beta=p^2+q^2=1=b$

①から$\alpha+\beta=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-a$，$2p=2p(p^2-3q^2)=-a$

$p=0$，$a=0$

または$p^2-3q^2=1$，しかるに$p^2+q^2=1$だから$q^2=0$となり，$q \fallingdotseq 0$に矛盾，$p^2-3q^2 \fallingdotseq 1$

したがって，$f(x)=x^3+x$

$\gamma^2=1$のとき

③から，$\gamma(p^2+q^2)=\gamma(p^2+q^2)^3=-c$，$c=-\gamma$，$p^2+q^2=1$

$\gamma=1$のとき

②から$\alpha\beta+\beta+\alpha=(\alpha\beta)^3+(\beta)^3+(\alpha)^3=b$

①から$\alpha+\beta+1=\alpha^3+\beta^3+1=-a$，$\alpha+\beta=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha+\beta=0$のとき，$a=-1$，$b=1$

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1$のとき，$p^2=1$，$q^2=0$となり，これはない。

したがって，$f(x)=x^3-x^2+x-1$

$\gamma=-1$のとき

②から$\alpha\beta-(\beta+\alpha)=(\alpha\beta)^3-(\beta)^3-(\alpha)^3=b$，

①から$\alpha+\beta-1=\alpha^3+\beta^3-1=-a$，$\alpha+\beta=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\alpha+\beta=0$のとき，$a=1$，$b=1$

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1$のとき，$p^2=1$，$q^2=0$となり，これはない。

したがって，$f(x)=x^3+x^2+x+1$

ii) α^3，β^3のいずれかが実数となるとき

α^3 が実数になるとすれば，$\alpha^3=\gamma^3=\gamma$である。$\alpha\fallingdotseq 0$だから，$\gamma\fallingdotseq 0$で$\gamma^2=1$である。

以下の表現において，複合同順である。

$\gamma=\pm1$に対して，$\alpha^3=\pm1$，$(\alpha\mp1)(\alpha^2\pm\alpha+1)=0$,

$\gamma=1$のとき，$\alpha^2+\alpha+1=0$，$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}$

$\gamma=-1$のとき，$\alpha^2-\alpha+1=0$，$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}$

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta\pm1=\mp1\pm1=0=-a$，$a=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta\pm(\beta+\alpha)=1\pm(\mp1)=0=b$

$\alpha\beta\gamma=\pm\alpha\beta=\pm=-c$，$c=\mp1$

$f(x)=x^3\mp1$

α^3 が実数になれば，β^3 も実数になるので，α^3 が実数になる検討で十分である。

以上をまとめると，

$f(x)=x^3-1$，x^3+1，x^3+x，x^3-x^2+x-1，x^3+x^2+x+1　（答）

＜解説＞

3 次方程式に関わる問題だが，練習問題を解くなどして習熟していないと，なかなか難しいかも知れない。n 次方程式は複素数の範囲で常にn 個の解をもつ，と教科書に記載されている。実数を係数とする3 次方程式では，必ず1個の実数解をもつ。また虚数解をもつときは，共役な複素数も解である。

したがって，この方程式は1個の実数解と共役な2 個の複素数解をもつ，ということを承知していなければならない。その上で，どのように取りかかったら良いのか，着眼，着想が必要だから，文系の受験者にはなかなか難しい問題だったのではないか。筆者もかなり手こずった。

とりあえず，解と係数の関係から，(イ)，(ロ)の条件を満たす解が係数a，b，c に対して与える条件を求めることを考える。このとき，$f(x)=0$の３つの解をα，β，γとしたとき，α^3，β^3，γ^3もまた異なる３つの解とすれば容易なのだが，そうもいかないから，難しくなる。つまり，複素数解 α の3乗 α^3 が実数になる場合がある，ということに気づく必要がある。すると，α^3，β^3 が実数になる，すなわち $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=\gamma=\pm1$となる場合のことを検討する必要が出てくる。

このとき，$\alpha^3=\pm1$，$\alpha^3\mp1=0$となって，$x^3\mp1=0$ の実数解が $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=\gamma=\pm1$ ということがわかる。この3 次方程式には，他には実数解は存在しないので，α，β は虚数解ということになる。すると，$f(x)=x^3\mp1$も求める3次式ということになる。

＜文系総評＞

例年通り問題数５問で120 分150点満点の数学入試である。文系の問題としては骨の折れる問題が揃っている。

$\boxed{1}$

曲線 C のグラフを描いて，面積を求める部分を的確に把握する。x 軸との交点や極値を与える x 座標などを求め，できるだけ正確な図を描く。積分では変数変換を用いる。難易度はB+。

$\boxed{2}$

確率の問題。余事象の考え方を活用しないと，解答がやや煩瑣になる。難易度B。

$\boxed{3}$

整数の位取り記数法に関する問題。難易度はC。

$\boxed{4}$

理系の $\boxed{3}$ に同じだから参照のこと。

$\boxed{5}$

理系の $\boxed{6}$ に類似の問題だが，文系のこの問題の方が難しいような気がする。読者はどう感じたであろうか。複素数は指導要領の改訂により24 年度から復活したが，入試問題には今年度から出題されるようになった。難易度A。

160515