2016（H28）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$　整式 $P(x)=x^4+x^3+x-1$ について，次の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $P(x)=0$ の実数解を求めよ。

(3) $Q(x)$ を３次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),$$
$$Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす$Q(x)$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

$P(i)=i^4+i^3+i-1=1-i+i-1=0$　（答）

$P(-i)=(-i)^4+(-i)^3+(-i)-1=1+i-i-1=0$　（答）

(2)

$P(i)=P(-i)=0$だから，x^2+1は $P(x)$の因数である。したがって，

$P(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)=0$，$x^2+x-1=0$，$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　（答）

(3)

$Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$とおく。

$Q(1)=a+b+c+d=P(1)=2$

$Q(-1)=-a+b-c+d=P(-1)=-2$

$Q(2)=8a+4b+2c+d=P(2)=16+8+2-1=25$

$Q(-2)=-8a+4b-2c+d=P(-2)=16-8-2-1=5$

以上から，$a=1$，$b=5$，$c=1$，$d=-5$，したがって$Q(x)=x^3+5x^2+x-5$　（答）

＜解説＞

(1)は変数が虚数の場合の関数値を求める。虚数 i の計算といっても，単純なものだから，ミスのないこと。(2) は (1) から $\pm i$ が$P(x)=0$ の解であることがわかるから，$(x+i)(x-i)=(x^2+1)$ が$P(x)$ の因数であることを利用する。

$\boxed{2}$　△OAB において，OA=5，OB=6，AB=7 とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺OA を$t:(1-t)$ に内分する点をP，辺 OB を$1:t$ に外分する点をQ，辺AB と線分PQ の交点をR とする。点R から直線OB へ下した垂線をRS とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OR}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OS}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが4 となる t の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ とする。すると，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$，したがって $(\vec{c})^2=(-\vec{a}+\vec{b})^2$，

$7^2=(-\vec{a})^2+(\vec{b})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{25+36-49}{2}=6$　（答）

(2)

メネラウスの定理から，$\dfrac{AR}{RB}\dfrac{BQ}{QO}\dfrac{OP}{PA}=1$，しかるに $\dfrac{BQ}{QO}=t$，$\dfrac{OP}{PA}=\dfrac{t}{1-t}$ だから

$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{1-t}{t^2}$，$\therefore \dfrac{AR}{AB-AR}=\dfrac{1-t}{t^2}$，$\therefore \mathrm{AR}=\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\mathrm{AB}$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\vec{a}+\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\vec{c}=\vec{a}+\dfrac{1-t}{1-t+t^2}(-\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{1-t+t^2}\{t^2\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}$　（答）

(3)

k を正の実数として $\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OB}=k\vec{b}$ とおく。

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RS}$ の両辺に $\vec{b}$ を乗じると，$\vec{b}$ と $\overrightarrow{RS}$ は直交しているので，

$k\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{OR}+\vec{b}\cdot\overrightarrow{RS}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{OR}=\dfrac{t^2}{1-t+t^2}\vec{b}\cdot\vec{a}+\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\vec{b}\cdot\vec{b}$

$36k=\dfrac{t^2}{1-t+t^2}\times 6+\dfrac{1-t}{1-t+t^2}\times 36$，$\therefore k=\dfrac{1}{1-t+t^2}\left\{\dfrac{t^2}{6}+(1-t)\right\}$

したがって，$\overrightarrow{OS}=\dfrac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\vec{b}$　（答）

(4)

$|\overrightarrow{OS}|=\dfrac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}|\vec{b}|=\dfrac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\times 6=\dfrac{6-6t+t^2}{1-t+t^2}=4$，$\therefore 3t^2+2t-2=0$，

したがって $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$，しかるに $0<t<1$ だから，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$　（答）

＜解説＞

ベクトルによる図形の取り扱いの問題。ベクトルを利用すると図形問題が見通し良く，容易に解けるから嬉しい。数学Ｂの教科書の該当箇所を反復して学ぶことにより，ベクトル利用の方法を良く理解しよう。まずは図形を描いて問題の設定と解法を考えるのは当然である。

(1) では三角形の１辺のベクトルは他の２辺のベクトルの和（もしくは差）によって表されることを理解しておこう。基本的な知識である。

(2) メネラウスの定理を活用する。図を描けば，メネラウスの定理を活用したい，と直ちに思うだろう。もし，その気づきがない場合はどうするか。

(3) $\overrightarrow{OS}=k\overrightarrow{OB}=k\vec{b}$ とおいて考えるのがポイントだ。

(4) $\overrightarrow{OS}=\dfrac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\vec{b}$ から，$\left|\overrightarrow{OS}\right|=\dfrac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\left|\vec{b}\right|$ とすることがポイントだ。

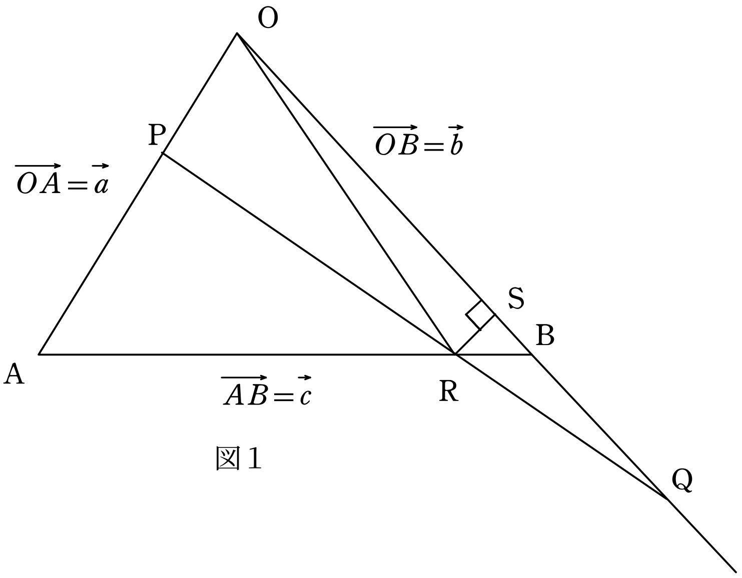

図 1

$\boxed{3}$ 3 が書かれたカードが10 枚，5 が書かれたカードが10 枚，10 が書かれたカードが10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず3，5，10 のいずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が12 以上である確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

最初に取り出したカードが10 の場合である。30 枚中，10 のカードが10 枚あるのだから，

操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が1回である確率は $\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$ （答）

(2)

2 回で操作が終了するには,

1 回めが3 のとき2 回目が10

確率は $\dfrac{10}{30}\times\dfrac{10}{29}$

1 回目が5 のとき2 回目が5 または10

確率は $\dfrac{10}{30}\left(\dfrac{9}{29}+\dfrac{10}{29}\right)$

したがって，操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が2 回である確率は，これらの和

$\dfrac{10}{30}\times\dfrac{10}{29}+\dfrac{10}{30}\left(\dfrac{9}{29}+\dfrac{10}{29}\right)=\dfrac{1}{3}$ （答）

(3)

操作が終了したとき，カードの数の合計が12以上になる場合について

- 操作が1 回で終了する場合はない。
- 操作が2 回で終了する場合は，1 回目が3 または5，2 回目が10 のときだから，その確率は

$$\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}+\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}=\frac{20}{87}$$

- 操作が3 回で終了する場合は

2 回の和が10 未満で，3 回目で12 以上となる場合だから

2 回の和が10 未満の場合は (1 回目の数，2 回目の数)として，(3, 3)，(3, 5)，(5, 3)

(3, 3)となる確率は$\frac{10}{30}\times\frac{9}{29}$，3 回目は10 だから，$\frac{10}{30}\times\frac{9}{29}\times\frac{10}{28}$

(3, 5)となる確率は$\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}$，3 回目は5 または10 だから，$\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}\times\frac{9}{28}+\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}\times\frac{10}{28}$

(5, 3) となる確率は$\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}$，3 回目は5 または10 だから，$\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}\times\frac{9}{28}+\frac{10}{30}\times\frac{10}{29}\times\frac{10}{28}$

これらの和は $\frac{235}{42\times29}$

- 操作が４回で終了する場合は

3 回の和が10 未満なので (3, 3, 3)，4 回目は3，5，10 いずれでも良いから，その確率は

$$\frac{10}{30}\times\frac{9}{29}\times\frac{8}{28}\times1=\frac{6}{7\times29}$$

- 操作が５回以上で終了する場合はない。

カードの数の合計が12 以上で終わる確率は，これらの確率の和として

$$\frac{20}{87}+\frac{235}{42\times29}+\frac{6}{7\times29}=\frac{551}{42\times29}=\frac{19}{42}$$ （答）

＜解説＞

考え方は容易な確率の問題。場合分けと計算をていねいに行えば正答できるだろう。

(1)

1 回目で10 のカードを取り出す確率である。

(2)

2 枚のカードの和が10 以上になる場合を考える。

(3)

2，3，4 回で操作が終了する場合について，カードの数字の和が12 以上の場合を考える。

$\boxed{4}$ aを $0<a<1$を満たす実数としてx の関数 $f(x)=ax-\log(1+e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし必要があれば

$$\lim_{x\to+0}x\log x=0$$

が成り立つことを用いてよい。

(1) $M(a)$ をaを用いて表せ。

(2) a の関数 $y=M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) a の関数 $y=M(a)$ のグラフをかけ。

＜解答＞

(1)

$$f'(x) = a-\frac{e^x}{1+e^x}=0$$ とすれば，$x=x_P=\log\dfrac{a}{1-a}$，$f(x)$ は図１のように変化する。

x		x_P	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

図１

したがって，最大値は，$f(x_P)=a\log\dfrac{a}{1-a}-\log\dfrac{1}{1-a}=M(a)$

$M(a)=a\log a+(1-a)\log(1-a)$　（答）

(2)

$y=M(a)$，$y'=M'(a)=\log a+1-\log(1-a)-1=\log a-\log(1-a)=0$ とすれば $a=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{a\to+0} M(a)=\lim_{a\to+0} a\log a-\lim_{a\to+0}(1-a)\log(1-a)=0-0=0$$

$$\lim_{a\to1-0} M(a)=\lim_{a\to1-0} a\log a-\lim_{a\to1-0}(1-a)\log(1-a)=0-0=0$$

したがって $M(a)$ は図２のように変化し，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $M\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log 2$　（答）

(3)

図２のように $M(a)=a\log a+(1-a)\log(1-a)$ は変化するから，図３のグラフとなる。

a	0		$\frac{1}{2}$		1
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M(a)$	0	$\searrow$	$*$	$\nearrow$	0

図２

$*=-\log 2$

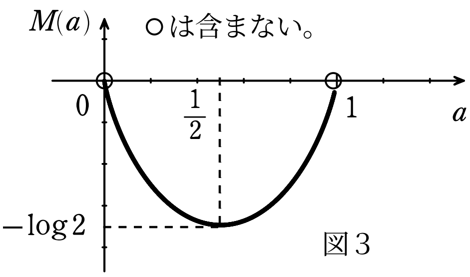

図３

＜解説＞

(1)

最大値を求める常套的方法，すなわち導関数から極値の振る舞いを調べれば良い。

$a=\dfrac{e^x}{1+e^x}$，$e^x=\dfrac{a}{1-a}$，$\therefore\ x=\log\dfrac{a}{1-a}$

(2)

(1)と同様の方法による。$\log a-\log(1-a)=\log\dfrac{a}{1-a}=0$，$\therefore\ \dfrac{a}{1-a}=1$，$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

(3)

$$M''(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{1}{a(1-a)}>0,\ \lim_{a\to+0}M'(a)=-\infty,\ \lim_{a\to1-0}M'(a)=\infty$$

したがって $M(a)$ の傾きは単調増加で$-\infty$ から∞ まで変化する。図３のようなグラフとなる。

$\boxed{5}$ 一般項が $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

＜解答＞

(1)

$n>0$であれば，当然に$0<a_n$

$$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{3}{n}\frac{2}{n}\frac{1}{n}=\left(\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{3}{n}\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$$

$\therefore\ 0<\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (答)$$

(3)

$$\frac{a_{kn}}{a_n}=\frac{a_{kn}}{a_{kn-1}}\frac{a_{kn-1}}{a_{kn-2}}\frac{a_{kn-2}}{a_{kn-3}}\cdots\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (*)$$

(2)によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-i}}{a_{n-(i+1)}}=\frac{1}{e}$だから，$\varepsilon_i$ を$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varepsilon_i=0$ となるような微小な正の実数とすれば，

$\dfrac{a_{kn-i}}{a_{kn-(i+1)}}=\dfrac{1}{e-\varepsilon_i}$とおくことができる。ただし $\{i=0,1,2,\ldots,n(k-1)-2,n(k-1)-1\}$

$$\frac{a_{kn}}{a_n}=\frac{a_{kn}}{a_{kn-1}}\frac{a_{kn-1}}{a_{kn-2}}\frac{a_{kn-2}}{a_{kn-3}}\cdots\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e-\varepsilon_0}\frac{1}{e-\varepsilon_1}\frac{1}{e-\varepsilon_2}\cdots\frac{1}{e-\varepsilon_{n(k-1)-2}}\frac{1}{e-\varepsilon_{n(k-1)-1}}$$

このような ε_i の中で最も大きいものをε_M，最も小さいものをε_m とすれば，

$$\left(\frac{1}{e-\varepsilon_m}\right)^{n(k-1)}\leqq\frac{a_{kn}}{a_n}=\frac{a_{kn}}{a_{kn-1}}\frac{a_{kn-1}}{a_{kn-2}}\frac{a_{kn-2}}{a_{kn-3}}\cdots\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\left(\frac{1}{e-\varepsilon_M}\right)^{n(k-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{e-\varepsilon_m}\right)^{n(k-1)}\right\}^{\frac{1}{n}}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_{kn-1}}\frac{a_{kn-1}}{a_{kn-2}}\cdots\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leqq\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{e-\varepsilon_M}\right)^{n(k-1)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e-\varepsilon_m}\right)^{(k-1)} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e-\varepsilon_M}\right)^{(k-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e-\varepsilon_m}\right)^{(k-1)}=e^{-(k-1)}$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e-\varepsilon_M}\right)^{(k-1)}=e^{-(k-1)}$だから，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{-(k-1)}$　（答）

＜解説＞

$a_n=\frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ の特性に関する問題。単純な美しい表現の数列だから，面白い問題になりそうな予感がする。

⑴では$a_n=\frac{n!}{n^n}$の表現変更により，0に収束する数列であることを容易に示すことができる。

⑵ では自然対数の底に収束する表現となる。数学IIIの教科書に記載の知識だから記憶していなければならない。教科書には$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$が収束し，値が$e=2.718\cdots$ となるという知識のみが記載されている。

⑶ はやや難しい。⑴，⑵を活用して解く，と考えるのが近道だろう。すると（＊）の表式から，下記のような解答が見えてくる。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_{kn-1}}\frac{a_{kn-1}}{a_{kn-2}}\cdots\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}e^{-1}\cdots e^{-1}e^{-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n(k-1)}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}\qquad\text{（答）}$$

これで，答えは合っている。しかし証明の過程に難点があることに読者は気づくだろう。

$n\to\infty$ の結果としてe^{-1}に収束するのに，まだ $(\ )^{\frac{1}{n}}$ が残っているではないか。

そこで解答のような方法を記載したのだが，限られた時間の中で，考案することはかなり難しい。

この解説に記載した方法で満点という評価になるか，採点方針はわからない。しかし高い部分点を得ることは可能だろう。これなら，（＊）の表式を思いつけば短時間で答えに至る。⑵を出題したのだから，このような解答を出題者は想定したものと思われる。

＜総評＞

例年のような５問の問題構成である。第１問が3，４次の整式関数の問題で昨年に類似である。
昨年よりは易化したように思う。１，２，４は完答し，３，５は⑴，⑵を完答して，全体として80点以上を確保したい。

$\boxed{1}$

３次，４次の整式の関数に関する問題。数学の新課程に入って，新潟大学としては初めて，変数が虚数の関数値を求める問題である。特段に難しいところのない，基本的な問題である。難易度はC。的確に解いて，落ち着きたいところだ。

$\boxed{2}$

ベクトルによって図形の諸量を求める問題。紛れの少ない素直な問題だから，扱い易い。確実に得点したい。難易度はB。

$\boxed{3}$

簡明な確率の問題。(1)，(2)は確実に得点したい。(3) はやや煩瑣なので、ていねいに場合分けする。難易度は全体としてB－。

$\boxed{4}$

導関数により関数の変化を調べ，最大値，最小値を求める問題。特段，煩瑣な計算を必要とするものでなく，扱い易い。難易度はB。

$\boxed{5}$

自然対数の底e を扱う数学的な思考力が問われる良い問題だと思う。(1)，(2) は確実に得点したい。(3) は答えは導出できても，その過程を正しく表現することが難しいと思う。難易度はA－。

＜人文，教育，経済，農学部＞ (90分)

$\boxed{1}$ 理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{2}$ に同じ。

$\boxed{3}$ 理系の $\boxed{3}$ に同じ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=|x^2-4|-3$ について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフとx 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

$x^2-4\geqq0$のとき （$x\geqq 2$ または $x\leqq -2$）

$f(x)=x^2-4-3=x^2-7=0$，$\therefore\ x=\pm\sqrt{7}$

$x^2-4<0$のとき （$-2<x<2$）

$f(x)=-x^2+4-3=-x^2+1=0$，$\therefore\ x=\pm1$

以上によって，$x=\pm1$，$\pm\sqrt{7}$ （答）

(2)

図１に示す。

(3)

図１はy 軸に関して対称だから，$x\geqq0$ の部分の面積を2 倍すれば良い。

$$\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(-1+x^2)dx+\int_2^{\sqrt{7}}(-x^2+7)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+7x\right]_2^{\sqrt{7}}=\frac{14}{3}(\sqrt{7}-2)$$

したがって，求める面積は $\frac{28}{3}(\sqrt{7}-2)$ （答）

<総評>

$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ は理系の問題と同じ。理系の総評でも書いたように，これらの問題は扱い易いので，文系といえど高得点を期待したい。$\boxed{4}$ は2 次関数のグラフと積分の問題。昨年の問題４も同じ分野であるが，今年の方が容易である。

160805