

2016 (H28) 年度 東北大学 前期入学試験 数学解説

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）
 ・歯学部・薬学部・工学部・農学部

試験時間 150分

- 1 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。
 これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。
- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
 - (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

< 解答 >

(1)

$\triangle BCE$ が内接する円を考える。線分 AB と円との交点を F' とすれば，弧 BC に立つ円周角は等しいので， $\angle BF'C = \angle BEC = \angle R = \angle BFC$ ，したがって F' は F に一致する。すなわち，四角形 $BCEF$ は円に内接する。

$\angle AEH = \angle R = \angle AFH$ だから，同様の考え方で，四角形 $AFHE$ も円に内接する。

(2)

弧 FE 上に立つ円周角として $\angle FBE = \angle ECF$ ，
 四角形 $AFDC$ も円に内接するので，弧 AF 上に立つ円周角として $\angle ADF = \angle ACF = \angle ECF$
 四角形 $ABDE$ も円に内接するので，弧 AE 上に立つ円周角として $\angle ADE = \angle ABE = \angle FBE$
 $\therefore \angle ADE = \angle ADF$

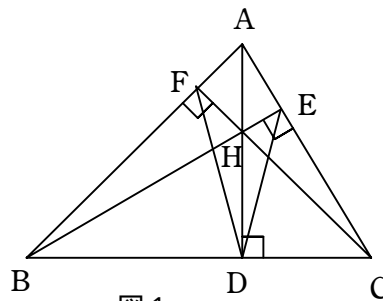
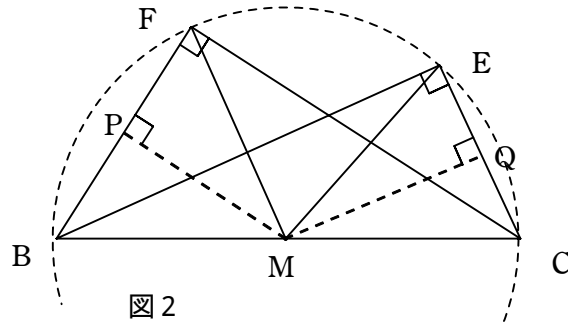


図 1

< 解説 >

斜辺を共有する直角三角形の4つの頂点は同一円周上にある。すなわち円に内接することを示す。
 図2において，直角三角形の斜辺 BC の中点を M とする。 M から BF, CE に垂線 MP, MQ を下ろす。

$MP \parallel CF$ だから P は BE の中点，したがって直角三角形 $BPM \cong$ 直角三角形 FPM
 $\therefore MB = MF$ ，同様に Q は CE の中点になるから， $ME = MC$ ，以上によって
 $MB = MC = MF = ME$ ，したがって4点 B, C, E, F は M を中心とする同一円周上にある。
 このことにより図1において，四角形 $BCEF, ACDF, ABDE, AFHE, BDHF, CDHE$ はそれぞれ円に内接する。



2 以下の問いに答えよ。

(1) 6以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 (p, q) をすべて求めよ。

< 解答 >

(1)

$n=6$ では、 $2^6=64$, $6^2+7=43$, $\therefore 2^6 > 6^2+7$, したがって成立する。

$n=k$ で、 $2^k > k^2+7$ が成立するものとする。

$n=k+1$ では、 $2^n = 2^{k+1} > 2(k^2+7)$

$2(k^2+7) - \{(k+1)^2+7\} = k^2 - 2k + 6 = (k-1)^2 + 5 > 0$, したがって $2^{k+1} > 2(k^2+7) > (k+1)^2+7$
すなわち、 $n=k$ で $2^n > n^2+7$ が成立すれば、 $n=k+1$ でも $2^n > n^2+7$ が成立する。

$n=6$ で $2^n > n^2+7$ が成立するので、数学的帰納法により、

6以上の整数 n に対して、 $2^n > n^2+7$ であることが証明された。

(2)

$$p^q = q^p + 7$$

$p=2$ のとき、 $2^q = q^2+7$ となる。(1)により、 $q \leq 5$ である。 $(2, 5)$ が を満たす。

$p \geq 3$ のとき、 p は素数で奇数だから、 p^q は奇数。 の右辺の7は奇数だから、 q^p は偶数。
したがって、 q は素数で偶数でなければならない。素数で偶数は2のみである。

したがって、 $q=2$ 。 は $p^2 = 2^p + 7$

$x \geq 3$ なる実数 x に対して、 $f(x) = x^2 - 2^x$ とおく。 $f'(x) = 2x - 2^x \log x < 2x - 2^x < 0$

すなわち $x \geq 3$ において、 $f(x)$ は単調減少。したがって $p^2 - 2^p$ は p の増加とともに減少する。

$f(3) = 9 - 8 = 1$ だから、 $f(p) \leq 1$, $\therefore p^2 - 2^p \leq 1$, \therefore を満たす $p \geq 3$ の素数は存在しない。

以上の結果、 を満たす素数の組 (p, q) は $(2, 5)$ (答)

< 解説 >

(1)

数学的帰納法で証明するように指示されているので、楽である。

(2)

一見難しそうな問題なので、具体的な数字を当てはめて考えてみるのが良い。(1)を上手に利用することを考えると、まず $p=2$ の場合を考える。すると、(1)を直ちに利用できることがわかる。

続いて、 $p \geq 3$ の場合を考える。このとき、着想が必要である。式を見つめると、 q に対してある条件(素数かつ偶数)が課せられることがわかる。この着想は難しいものではない。単純な閃きがあれば良い。だが入試という緊張した状況下では、閃かない場合があるかも知れない。そのときは、どうするか。

3 サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする。以下の問いに答よ。

(1) a, b, c がある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) a, b, c がある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

< 解答 >

(1)

直角三角形の条件は $c^2 = a^2 + b^2$, ただし a, b, c は入れ替わっても成立する。

$c^2 = a^2 + b^2$ を満たすサイコロの目は3, 4, 5である。1回目にこれら3つの目のいずれかが出る確率は $\frac{3}{6}$, 2回目に残った2つの目からいずれかが出る確率は $\frac{2}{6}$, 最後に残った1つの目が出る確率は $\frac{1}{6}$,

したがって、 a, b, c がある直角三角形の3辺の長さとなる確率は $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (答)

(2)

鈍角三角形の条件は c を最長辺として、

$$c^2 > a^2 + b^2$$

また三角形の条件は、

$$c < a + b$$

(a, b, c) として

$c=3$ は、 $(2, 2, 3)$ が , を満たす。

$c=4$ は、 $(2, 3, 4)$ が , を満たす。

$c=5$ は、 $(2, 4, 5)$, $(3, 3, 5)$ が , を満たす。

$c=6$ は、 $(2, 5, 6)$, $(3, 4, 6)$, $(3, 5, 6)$, $(4, 4, 6)$ が , を満たす。

以上の8つの (a, b, c) がある。そして、 a, b, c は入れ替わっても良い。

$(2, 2, 3)$, $(3, 3, 5)$, $(4, 4, 6)$ の確率は、 (a, b, c) を入れ替えた組合せは

それぞれ3通りあるから、 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 3 \times 3 = \frac{1}{24}$

$(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6)$ の確率は, (a, b, c) を入れ替えた組合せはそれぞれ 3! 通りあるから, $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 5 \times 3! = \frac{5}{36}$

したがって, a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率は $\frac{1}{24} + \frac{5}{36} = \frac{13}{72}$ (答)

< 解説 >

(1)

少し違った考え方で説明しよう。直角三角形の 3 辺となる a, b, c の条件を明らかにし, そのような (a, b, c) の組合せを求める。それは $(3, 4, 5)$ と $3, 4, 5$ の順序を入れ替えたものである。

(a, b, c) の組合せは 6^3 通り。順序を問わない $3, 4, 5$ の組合せは 3! 通りだから, 確率は $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$ 。

(2)

同様に, 鈍角三角形となる a, b, c の条件を明らかにし, そのような (a, b, c) の組合せを求める。条件を満たす (a, b, c) を洩れなく抽出する必要がある。まずは c を最長辺として考えよう。 $c=1, 2$ はない。 $c=3, 4, 5, 6$ と考え, それぞれについて条件を満たす a, b を求める。 $a=b$ となる場合も忘れない。

すべての (a, b, c) を求めたら, 確率を求める。 a, b, c の順序を入れ替えたものも条件を満たすことは(1)と同じである。 a, b, c がすべて異なる場合は, 順序の入れ替えによる組合せは 3! 通りになるが, $a=b$ となる場合は 3 通りであることに注意する。

4 多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし, i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき,

係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ をすべて求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して,

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\cos^7 \theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて, 多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。

$\theta = \frac{\pi}{7}$ として, $k=1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき, $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し, $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$(x+i)^7 = \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} i^k, (x-i)^7 = \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} (-i)^k$$

$$P(x) = \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^{7-k} (i^k - (-i)^k) \right\} = a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7$$

両辺の対応する x の次数の項の係数を等しいとおく。

k が偶数のとき $i^k - (-i)^k = 0$, $\therefore a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ (答)

k が奇数のとき $i^k - (-i)^k = 2i^k$, $\therefore a_i = (i)^{k-1} {}_7C_i$

$a_1 = {}_7C_1 = 7$, $a_3 = (i)^2 {}_7C_3 = -{}_7C_3 = -35$, $a_5 = (i)^4 {}_7C_5 = {}_7C_5 = 21$, $a_7 = (i)^6 {}_7C_7 = -{}_7C_7 = -1$ (答)

(2)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) &= \frac{1}{2i} \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + i\right)^7 - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - i\right)^7 \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\sin \theta}\right)^7 - \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta}\right)^7 \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}{\sin^7 \theta} - \frac{\cos 7\theta - i \sin 7\theta}{\sin^7 \theta} \right\} = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta} \end{aligned}$$

ここで、ド・モアブルの定理 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を用いた。

(3)

$$Q(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1$$

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i} = 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 7X^3 - 35X^2 + 21X - 1 = Q(X)$$

ここで、 $X = x^2$ とおいた。

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta} = \left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)^2 \text{ であるから,}$$

$$Q(x_k) = P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) = \frac{\sin 7k\theta}{\sin^7 k\theta} = \frac{\sin k\pi}{\sin^7 k\theta}, k=1, 2, 3 \text{ に対して } \sin k\pi = 0 \text{ だから, } Q(x_k) = 0$$

$$x_1 = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/7)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\tan(\pi/7)}\right)^2, x_2 = \left(\frac{1}{\tan(2\pi/7)}\right)^2, x_3 = \left(\frac{1}{\tan(3\pi/7)}\right)^2$$

$$0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \text{ だから } \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \tan\left(\frac{3\pi}{7}\right), \therefore x_3 < x_2 < x_1$$

したがって x_1, x_2, x_3 は 3 次方程式 $Q(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ の異なる実数解である。

したがって,

$$x^3 - 5x^2 + 3x - \frac{1}{7} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \text{ とおける。}$$

同じ x の次数項の係数を比較して、 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ (答)

< 解説 >

(1)

$P(x)$ を x の多項式に直接に展開したいところだが、簡単ではない。ちょっとした着想が必要だ。

ここは数学の冒頭の二項定理による式の展開を直ちに思い出すところだ。 $(x+i)^7, (x-i)^7$ を展開す

れば、これらの和の係数は簡単になりそうな予感がする。

(2)

$P(x)$ の表式に $x = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ を代入すれば、ド・モアブルの定理を使う、ということが閃くだらう。

(3)

$P(x)$ と $Q(x)$ の表式を見つめると、 $x^2 = X$ として $P(x) = Q(X)$ となることに気づく。 x_1, x_2, x_3 が 3 次方程式 $Q(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ の解であることから、解と係数の関係を使う、と閃きたいところだ。

5 空間内に、直線 l で交わる 2 平面 α, β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n をどちらも点 O を通り l に垂直にとる。 m, n 上にそれぞれ点 P, Q があり

$$OP = \sqrt{3}, OQ = 2, PQ = 1$$

であるとする。線分 PQ 上の動点 T について、 $PT = t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。

T が線分 PQ 上を動くとき、 $f(t)$ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

< 解答 >

(1)

まず三角形 OPQ の平面と平面 α, β は垂直に交わることを説明する。

$l \perp m, l \perp n$ だから、三角形 OPQ の平面と l は垂直に交わる。 P を通り直線 m に垂直かつ平面 α 内の直線は直線 l に平行だから、三角形 OPQ の平面と垂直に交わる。したがって、三角形 OPQ の平面と平面 α とは垂直に交わる。同様に、三角形 OPQ の平面と平面 β は垂直に交わる。

球 S の平面 α による切り口は円となる。その半径を求める。

$OP = \sqrt{3}, OQ = 2, QP = 1$ から三角形 OPQ は直角三角形で、 $\angle OPQ = \angle R$

したがって切り口の円の中心は P であり、直線 m は円の中心を通る。

直線 m と球 S の表面の交点を A とすれば、求める円の半径は AP 。 $(AP)^2 = (AT)^2 - (PT)^2 = 2 - t^2$

したがって、切り口の面積は $\pi(2 - t^2)$ (答)

(2)

直線 n が球 S の表面と交わる点を B とし、点 T から直線 n に下した垂線の足を C とする。

球 S の平面 β による切り口は点 C を中心とする半径 CB の円である。

$$TC = \frac{\sqrt{3}}{2} TQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t), (BC)^2 = (BT)^2 - (CT)^2 = 2 - \frac{3}{4}(1-t)^2$$

したがって、切り口の円の面積は $\pi\left\{2 - \frac{3}{4}(1-t)^2\right\}$

$$f(t) = \pi(2 - t^2) + \pi\left\{2 - \frac{3}{4}(1-t)^2\right\} = \pi\left(-\frac{7}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{13}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}(7t-13)(t+1)$$

$g(t)$ は図1のように変化する。

	t	0	$\frac{x+\pi}{3}$	π
	$\sin \frac{t+x}{2}$	+	+	+
	$\cos \frac{3t-x}{2}$	+	0	-
図1	$g(t)$	-	0	+

すなわち, $0 \leq t \leq \frac{x+\pi}{3}$ のとき $g(t) \leq 0$, $\frac{x+\pi}{3} < t \leq \pi$ のとき $g(t) > 0$, したがって

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^\pi |\sin(t-x) - \sin 2t| dt = \int_0^{\frac{x+\pi}{3}} \{\sin 2t - \sin(t-x)\} dt + \int_{\frac{x+\pi}{3}}^\pi \{\sin(t-x) - \sin 2t\} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \cos(t-x) \right]_0^{\frac{x+\pi}{3}} + \left[-\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{x+\pi}{3}}^\pi \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2a + \cos(a-x) + \frac{1}{2} - \cos x - \cos(\pi-x) + \frac{1}{2} + \cos(a-x) - \frac{1}{2} \cos 2a \\
 &= 2\cos(a-x) - \cos 2a + 1 = 2\cos\left(\frac{\pi-2x}{3}\right) - \cos\left\{\frac{2}{3}(x+\pi)\right\} + 1 \\
 &= \cos \frac{2}{3}x + \sqrt{3} \sin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \cos \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2}{3}x + 1 = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{2}{3}x + \sqrt{3} \sin \frac{2}{3}x \right) + 1 \\
 &= \frac{3}{2} \times 2 \left(\frac{1}{2} \cos \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2}{3}x \right) + 1 = 3 \sin\left(\frac{4x+\pi}{6}\right) + 1, \text{ ここで } a = \frac{x+\pi}{3} \text{ とおいた。}
 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ において, $\frac{1}{6}\pi \leq \frac{4x+\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ だから

$$\frac{4x+\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最大値 } 3 \times 1 + 1 = 4 \quad (\text{答})$$

$$\frac{4x+\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, 最小値 } 3 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

絶対値関数の定積分問題。これまでも大学入試数学での類題は多い。まずは、絶対値内の関数の正負に応じて、絶対値を開かねばならない。そこで絶対値内の関数の正負を調べる。加法定理を応用して、三角関数の差を三角関数の積に変換する。この方法は数学 に掲載されている。

すると、容易に関数の正負の変化がわかる。幸いにも、2つの三角関数の交点となる t を境界として正負が反転する関数であることがわかる。このことは、図2を見るとわかる。ここでは、グラフ作成ソフトによって、正確なグラフを描いたのだが、手書きの大雑把なグラフで把握することでもよい。

太線の $\sin 2t$ のグラフは周期 π である。一方細線で、 $x=0, 0.35\pi, 0.75\pi$ の場合の $\sin(t-x)$ のグラフが描かれている。周期は 2π である。確かに t が交点の座標より小さい場合は、絶対値記号の中

の関数は負であり、大きい場合は正となることがわかる。

積分計算では、

$$\left(\cos \frac{2}{3}x + \sqrt{3} \sin \frac{2}{3}x\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \frac{2}{3}x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{6}\cos \frac{2}{3}x + \cos \frac{\pi}{6}\sin \frac{2}{3}x\right)$$

と変形することがポイントになる。

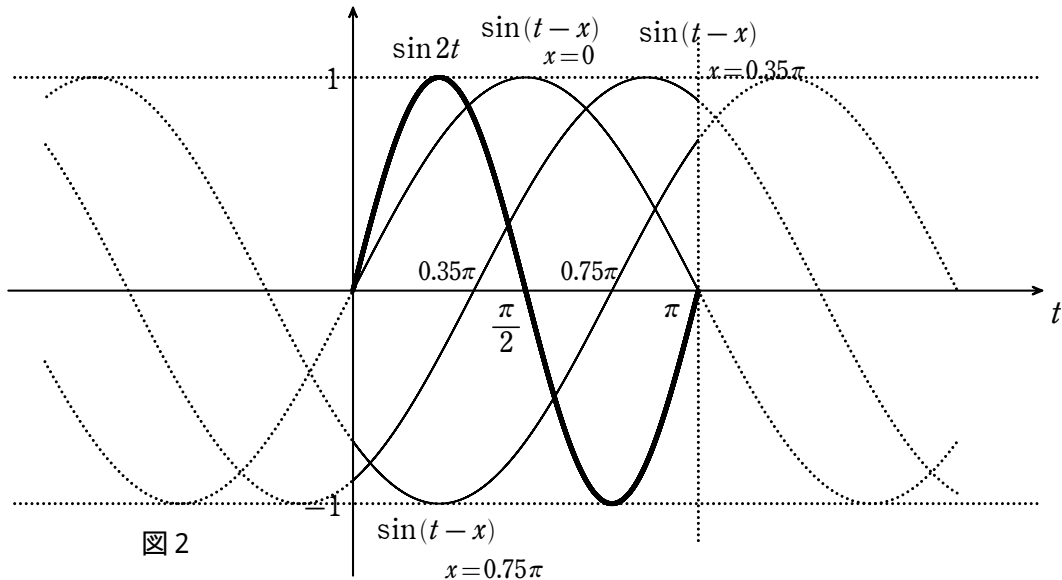


図 2

< 総評 >

150分で6問の出題である。配点は示されていない。全問を速読して、容易なもの、得意分野と思われるものから着手したい。私は、**[1]**、**[2]**、**[6]**、**[4]**、**[3]**、**[5]**の順で着手したいと思った。

[1]

円周角を利用する図形の問題。一読して、扱い易い問題であることを認識しよう。図を描いて題意を把握すれば、困難なく解ける問題である。難易度C。

[2]

整数問題である。数学的帰納法による証明は、難しいものではない。(1)は(2)の誘導問題になっているので、上手に活用する。(2)は簡単な着想が必要である。難易度はB+。

[3]

確率の問題。図形の条件を定める変数が確率的に定まる。このような問題は昨年と今年の東工大にも見られる。三角形の3辺をサイコロの出目に対応させて、直角三角形、鈍角三角形となる確率を求める問題である。条件が難しくないから、難しい問題ではない。ただ、うっかりすると、条件を満足する組合せを見落とす可能性があるため、ていねいに考えよう。難易度B+。

[4]

複素数の問題である。一見、難しそうな問題だが、二項定理、ド・モアブルの定理、解と係数の関係など、基本事項を使えば、正答を得る。教科書をしっかり理解しているか、確かな数学思考力を有しているか、などを問う良問と思う。難易度A-。

5

立体図形の問題。立体図形問題は複雑に思えて、敬遠したくなる。しかし、問題文を読みながら図形を脳裏に描いていくと、恐れるほど難しい問題ではないことに気づく。

幸い、直線 m, n がつくる平面と平面 α および β が垂直に交わるように問題が構成されているので、容易になっている。難易度 B+。

6

題意は簡明であり、解答方針は考え易い。問題は被積分関数の絶対値を開く場合分けの方法である。ここでは、三角関数の加法定理を応用して、三角関数の差を三角関数の積に変換し、被積分関数の正負の場合分けを容易にした。計算ミスのないように、ていねいに計算する。難易度は B。

161102

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

1 平面上で原点 O と 3 点 $A(3, 1), B(1, 2), C(-1, 1)$ を考える。実数 s, t に対し、点 P を

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s, t が条件

$$-1 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 1, -1 \leq s+t \leq 1,$$

を満たすとき、点 $P(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき、内積 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ の最大値を求め、そのときの P の座標を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ s+2t \end{pmatrix}$$

$$x=3s+t, y=s+2t, \therefore s=\frac{2x-y}{5}, t=\frac{3y-x}{5}$$

$$-1 \leq s \leq 1 \text{ によって, } -1 \leq \frac{2x-y}{5} \leq 1, \therefore 2x-5 \leq y \leq 2x+5$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ によって, } -1 \leq \frac{3y-x}{5} \leq 1, \therefore \frac{x-5}{3} \leq y \leq \frac{x+5}{3}$$

$$-1 \leq s+t \leq 1 \text{ によって, } -1 \leq \frac{x+2y}{5} \leq 1 \therefore \frac{-x-5}{2} \leq y \leq \frac{5-x}{2}$$

(2)

$$\vec{OP} \cdot \vec{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -x+y = L \text{ とおく。 } y=L+x$$

図 1 を参照すると、 L は範囲 D の第 2 象限における頂点 $(-2, 1)$ を通るときに最大値 3 をとることがわかる。最大値は 3、そのときの P の座標は $(-2, 1)$ (答)

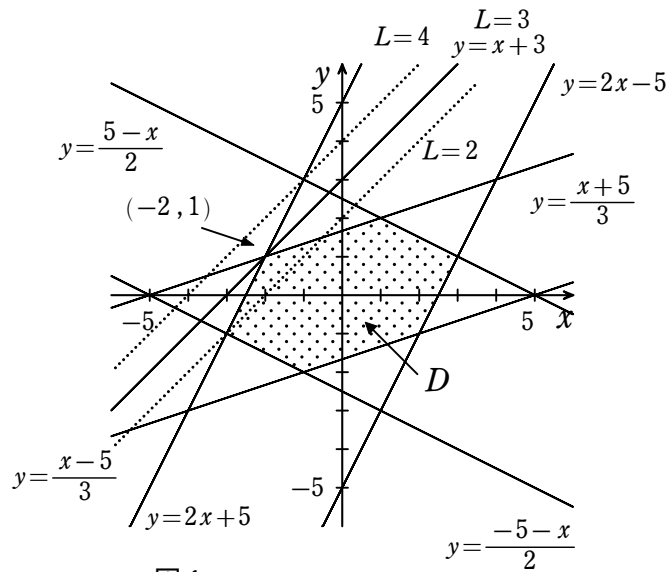


図 1

< 解説 >

(1)

s, t が満たす条件から得られる x, y が満たす条件が範囲 D である。与えられたベクトルの和から x, y と s, t の関係を求める。

(2)

(1)で描いた図を利用する。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ から定まる x, y の式を最大値にする D の点を求める。

2 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答よ。

(1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2) a, b を実数とする。関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 D の面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$, 関数 $y = -2|x| + k$

と を連立させると, $-\frac{1}{2}x^2 = -2|x| + k$, したがって $-\frac{1}{2}x^2 + 2|x| = k$

, のグラフが共有点をもつことは

の左辺のグラフ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x|$

の右辺のグラフ $y = k$ が共有点をもつこと。

$$x < 0 \text{ のとき, } \text{は } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x| = -\frac{1}{2}x^2 - 2x = -\frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4\}$$

$$x \geq 0 \text{ のとき, } \text{は } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x| = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}\{(x-2)^2 - 4\}$$

したがって は図2のようなグラフになるから,

と $y=k$ が共有点をもつ, すなわち と が共有点をもつような実数 k の範囲は $k \leq 2$ (答)

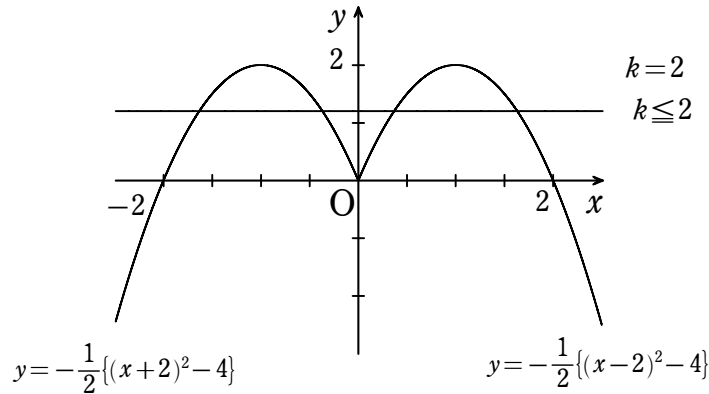


図1

(2)

$$\text{関数 } y = -2|x - a| + b$$

$$\text{と } \text{を連立させると, } -\frac{1}{2}x^2 = -2|x - a| + b, \therefore -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| = b$$

と が4個の共有点をもつことは $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a|$ と $y = b$ のグラフが4点で交わること。

$x < a$ のとき

$$\text{の左辺は } -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2a = -\frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4 - 4a\}$$

$x \geq a$ のとき

$$\text{の左辺は } -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2a = -\frac{1}{2}\{(x-2)^2 - 4 + 4a\}$$

$a \geq 0$ のときは, のグラフは図2-1のようになる。

したがって $y = b$ のグラフと4点で交わるためには, $-\frac{a^2}{2} < b < 2 - 2a$

$a < 0$ のときは, のグラフは図2-2のようになる。

したがって $y = b$ のグラフと4点で交わるためには, $-\frac{a^2}{2} < b < 2 + 2a$

4個の共有点をもつような範囲 D は, を満たす (a, b) で, 図3の打点部である。ただし境界線は含まない。

(3)

D は図3の打点部で, y 軸に関して対称だから,

$$D \text{ の面積} = 2 \int_0^2 \left\{ (-2x + 2) - \left(\frac{-x^2}{2} \right) \right\} dx = 2 \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{8}{3} \quad (\text{答})$$

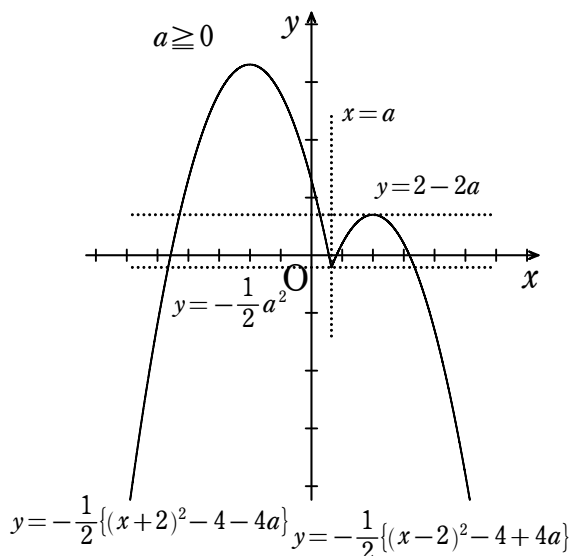


図 2-1

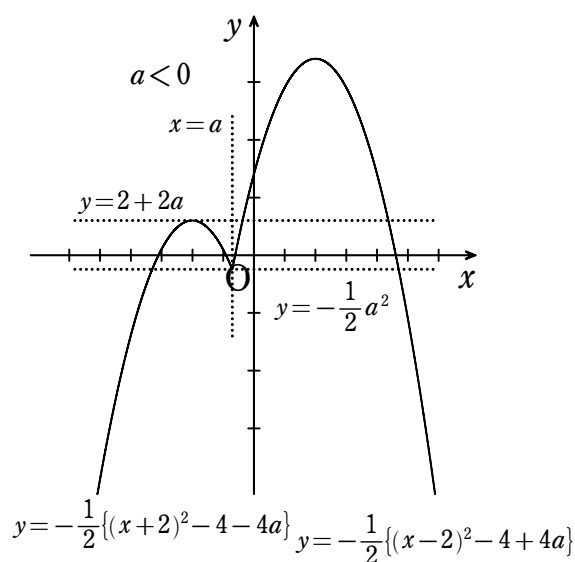


図 2-2

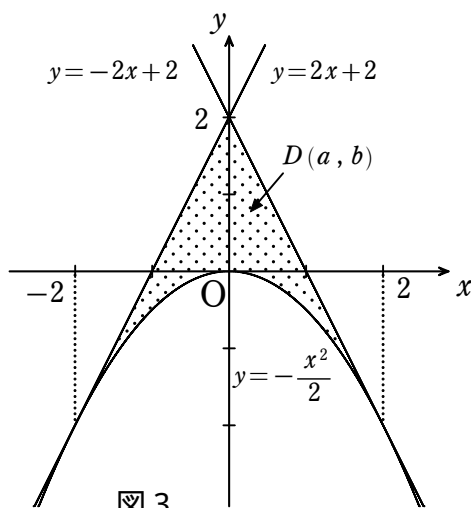


図 3

< 解説 >

(1)

2, 3 次関数のグラフと 1 次関数のグラフが共有点をもつ条件を求める問題はよく出題される。両者を連立させて 1 次関数の x の項を移項して、 $(2, 3$ 次関数) = (k) として、左辺のグラフの形状を考慮して、共有点をもつ実数 k の範囲を求める方法が常套的である。

ここでもそのような方法をとった。

お薦めではないが、以下のような方法もある。共有点をもつことは実数解をもつことと考える。

関数 $y = -2|x| + k$

放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$

と を連立させると、 $-\frac{1}{2}x^2 = -2|x| + k$ 、したがって $-\frac{1}{2}x^2 + 2|x| - k = 0$

$x < 0$ のとき

$$\text{は } x^2 + 4x + 2k = 0, \text{ 解は } x = -2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{k}{2}}$$

したがって $1 - \frac{k}{2} \geq 0$ ならば $x < 0$ なる実数解をもつ。すなわち $k \leq 2$ ならば と は共有点をもつ。

$x \geq 0$ のとき

$$\text{は } x^2 - 4x + 2k = 0, \text{ 解は } x = 2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{k}{2}}$$

したがって、 $1 - \frac{k}{2} \geq 0$ ならば $x \geq 0$ なる実数解をもつ。すなわち $k \leq 2$ ならば と は共有点をもつ。

以上、まとめて $k \leq 2$ (答)

(2)

(1)は(2)で $a=0$ とした場合である。したがって、(1)で腕を馴らして、(2)をじっくり解きたい。同様に (2次関数) = (k) という形式にして、 $y =$ (2次関数) のグラフと $y=k$ のグラフが4点で交わるような実数 k の範囲を求める。

まずは $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a|$ のおよそのグラフを描いて考える。

$$x < a \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2a = -\frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4 - 4a\}, \text{ 放物線の頂点の座標は } (-2, 2+2a)$$

$$x \geq a \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2a = -\frac{1}{2}\{(x-2)^2 - 4 + 4a\}, \text{ 放物線の頂点の座標は } (2, 2-2a)$$

$(2+2a)$ と $(2-2a)$ の大小関係によって、場合分けして考えねばならないことがわかる。

(1)と同様にお薦めではないが、以下のような方法もある。4個の共有点をもつということは4個の実数解をもつことと考える。

$$\text{関数 } y = -2|x - a| + b$$

$$\text{と } \text{を連立させると, } -\frac{1}{2}x^2 = -2|x - a| + b, \therefore -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| - b = 0$$

$x < a$ のとき

$$\text{式は } -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| - b = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2a - b = 0, \therefore x^2 + 4x - 4a + 2b = 0$$

$$x = -2 \pm 2\sqrt{1 + (a - b/2)}, \therefore b < 2a + 2 \text{ なら 2 個の実数解をもつ。}$$

$$\text{また, } -2 \pm 2\sqrt{1 + (a - b/2)} < a \text{ だから, } b > -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{以上まとめて, } -\frac{a^2}{2} < b < 2a + 2$$

$x \geq a$ のとき

$$\text{式は } -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| - b = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2a - b = 0, \therefore x^2 - 4x + 4a + 2b = 0$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{1 - (a + b/2)}, \therefore b < -2a + 2 \text{ なら 2 個の実数解をもつ。}$$

$$\text{また, } 2 \pm 2\sqrt{1 - (a + b/2)} \geq a \text{ だから, } b \geq -\frac{a^2}{2}, \text{ ただし } x = a \text{ では と とは同じ解をもつので,}$$

$2 \pm 2\sqrt{1 - (a+b/2)} > a$ でなければならない。したがって $b > -\frac{a^2}{2}$

以上まとめて、 $-\frac{a^2}{2} < b < -2a+2$

以上によって、 x と y の共通領域が関数 $y = -2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D である。

- 3 ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ、ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として、可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ。

< 解答 >

条件から $7l + 9m + 12n = 54$, ただし l, m, n は 0 以上の整数である。

を変形して、 $7l = 54 - 9m - 12n = 3(18 - 3m - 4n)$

3 と 7 は互いに素だから、 l は 0 または 3 の倍数、

$l=0$ とすれば、 $0 = 18 - 3m - 4n$, $3m + 4n = 18$

$4n = 3(6 - m)$, n は 0 または 3 の倍数、 $n=0$ なら $m=6$, $n=3$ なら $m=2$

$n \geq 6$ では該当する m は存在しない。

$l=3$ とすれば、 $7 = 18 - 3m - 4n$, $3m + 4n = 11$, $\therefore m=1$, $n=2$

$m \geq 2$ では該当する n は存在しない。

$l=6$ とすれば、 $14 = 18 - 3m - 4n$, $3m + 4n = 4$, $\therefore m=0$, $n=1$

$m \geq 1$ では該当する n は存在しない。

$l \geq 9$ では、 $7l > 54$ だから、 $l \leq 6$ である。

以上をまとめると、 $(l, m, n) = (0, 6, 0)$, $(0, 2, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(6, 0, 1)$ (答)

< 解説 >

整数変数の関係式から変数値を求める問題。互いに素の関係等を利用して、変数のとりえる範囲を限定して、関係式を満たす整数値の組を求める。

- 4 理系の問題 1 に同じ。

< 総評 >

1

ベクトルの和、内積などベクトルの基礎を理解していることが必要である。難易度 B。

2

絶対値関数を含む 2 次関数のグラフの問題。この種の問題の解法として常套的な方法に通じていな

いと、骨のおれる問題である。文系の問題としては手強い。B+。

3

題意は簡明な3変数整数の一次方程式の問題。確実に正答したい。難易度はC

4

理系の問題1に同じ。難易度はB。

161118