2016（H28）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$（60点）

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする．

(1)　点 P が C_1 上を動くとき，P と点 Q $\left(2a\ ,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ．

(2)　Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする．P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ．

＜解答＞

(1)

点 P を $(x_p\ ,\ y_p)=(x_p\ ,\ x_p{}^2/4)$とする。

$x_p>0$として，y 軸に関して点 P と対称な C_1 上の点 P'$(-x_p\ ,\ x_p{}^2/4)$を考えると，

Q の x 座標 $2a$ は正だから，PとQ の距離 ＜ P'とQ の距離

したがって，PとQ の距離 の最小値となる点P の x 座標は正として考えれば良い。

$(\mathrm{PQ})^2=(x_p-2a)^2+\dfrac{1}{16}(x_p{}^2-a^2+8)^2=f(x_p)$として，

$f'(x_p)=2(x_p-2a)+\dfrac{1}{4}x_p(x_p{}^2-a^2+8)=\dfrac{1}{4}(x_p-a)(x_p{}^2+ax_p+16)$

$f(x_p)$は図１のように変化する。

したがって$f(x_p)$ の最小値は$f(a)=a^2+4$，$\therefore$ PQの最小値は$\sqrt{a^2+4}$

x_p	0		a	
$f'(x_p)$		$-$		$+$
$f(x_p)$		↘		↗

図１

(2)

図２を参照する。 線分 PQ と円 C_2 の交点を R' とする。

PQ＝PR'＋R'Q≦PR＋RQ

R'Q＝RQ＝円 C_2 の半径＝$\sqrt{2}\,a$，$\therefore$ PR'≦PR

したがって，点 PとQ が定まったときR がR' に一致するときPR の距離が最小となり，

PR の距離の最小値＝PR'＝PQ－R'Q＝$\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}\,a>0$，$(0<a<2)$

ただし，円C_2 の半径＝$\sqrt{2}\,a$ が PQ の最小値より大きくなると，円C_2 はC_1 と交わるから，

PR の距離の最小値＝0，$(2\leqq a)$

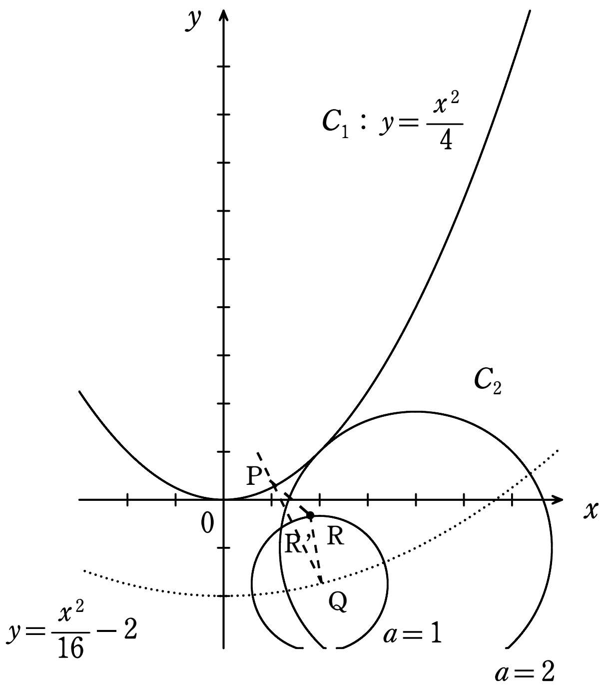

図２

＜解説＞

(1)

ここでは C_1 が y 軸に関して対称であること，点Q の x 座標が正であることを利用して，PQ が最小の距離となる点 P は $x>0$ にあるとして，解答を進めた。このことにより計算は非常に容易になる。

もし、このような気づき，着想がなかった場合，丁寧に $f(x_p)$ の変化を考えなければならない。

$$f'(x_p)=2(x_p-2a)+\frac{1}{4}x_p(x_p{}^2-a^2+8)=\frac{1}{4}(x_p-a)(x_p{}^2+ax_p+16)$$

$$=\frac{1}{4}(x_p-a)\left\{\left(x_p+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+16\right\}$$

ⅰ) $|a|<8$ のとき

$\left\{\left(x_p+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+16\right\}>0$ だから，$f(x_p)$ は図１のように変化する。

したがって $f(x_p)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$，$\therefore$ PQ の最小値は $\sqrt{a^2+4}$

ⅱ) $|a|\geqq 8$ のとき

$\left\{\left(x_p+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+16\right\}=0$ の解を $\alpha=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-64}}{2}$，$\beta=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-64}}{2}$ とすれば,

$\alpha<\beta<0<a$ であり，$f(x_p)$ は図３のように変化する。

したがって，最小値は $f(\alpha)$ か $f(a)$ のいずれかである。しかるに，C_1 は偶関数曲線で，Q の x 座標は正だから，$f(a)\leqq f(-\alpha)<f(\alpha)$ が成立する。したがって $f(x_p)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$

$\therefore$ PQの最小値は $\sqrt{a^2+4}$

x_p		α		β		a	
$f'(x_p)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x_p)$	↘		↗		↘		↗

図２

(2)

(1)の結果を利用して，上手に解答を求める。図２のような図を描いて考える。PQ とC_2 の交点R'にR が一致したとき，PR の距離が最小になることに気づくことが重要である。点Q は図２に示すように放物線 $\dfrac{x^2}{16}-2$ 上を動き，そそれに伴い，円C_2 は半径$\sqrt{2}\,a$ を拡大していく。$a=2$ のときC_1 とC_2 は接する。a がさらに大きくなると交わるようになる。したがって，PR の距離の最小値が0 になることがある，と気づかなければならない。

$\boxed{2}$ （60点）

△ABC を一辺の長さ6 の正三角形とする．サイコロを3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする．出た目に応じて，点P，Q，R をそれぞれ線分 BC，CA，AB 上に

$$\overrightarrow{BP}=\frac{X}{6}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CQ}=\frac{Y}{6}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AR}=\frac{Z}{6}\overrightarrow{AB}$$

をみたすように取る．

(1)　△PQR が正三角形になる確率を求めよ．

(2)　点 B，P，R を互いに線分で結んでできる図形をT_1，点 C，Q，P を互いに線分で結んでできる図形をT_2，点A，R，Q を互いに線分で結んでできる図形をT_3 とする．T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど２つが正三角形になる確率を求めよ．

(3)　△PQR の面積をS とし，S のとりうる値の最小値をm とする．m の値および $S=m$ となる確率を求めよ．

＜解答＞

(1)

△PQR が正三角形になるためには，$X=Y=Z$ が必要である。最初に出た目X に等しい目Y を出す確率は $\dfrac{1}{6}$，さらに $X=Y$ に等しい目Z を出す確率は $\dfrac{1}{6}$ だから，

△PQR が正三角形になる確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$　（答）

(2)

T_1 とT_2 が正三角形でT_3 が正三角形でないとする。

すると$X=6-Z$，$6-X=Y$，$6-Y\fallingdotseq Z$ が必要となる。

これを満たす(X, Y, Z)は$(1, 5, 5)$，$(2, 4, 4)$，$(4, 2, 2)$，$(5, 1, 1)$の４通り。

この確率は $\dfrac{4}{6^3}$ 。

T_1，T_2 が正三角形ではない場合も同様であるから，

T_1，T_2，T_3 のうち，　ちょうど２つが正三角形になる確率は $\dfrac{4}{6^3}\times 3=\dfrac{1}{18}$　（答）

(3)

△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

T_1 の面積 $S_1=\dfrac{1}{2}\times X\times(6-Z)\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}X(6-Z)$

T_2 の面積 $S_2=\dfrac{1}{2}\times Y\times(6-X)\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}Y(6-X)$

T_3 の面積 $S_3=\dfrac{1}{2}\times Z\times(6-Y)\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}Z(6-Y)$

$S=$ △ABC の面積 $-$ T_1 の面積 S_1 $-$ T_2 の面積 S_2 $-$ T_3 の面積 S_3

$=9\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}X(6-Z)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}Y(6-X)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}Z(6-Y)$

$=9\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{6(X+Y+Z)-(XY+YZ+ZX)\}$

$f(X,Y,Z)=6(X+Y+Z)-(XY+YZ+ZX)=(6-Y-Z)X+6(Y+Z)-YZ$　①　とおく。

$f(X,Y,Z)$ が最大値になるときに，S が最小値になる。

ｉ) $(6-Y-Z)>0$ のとき，①は $X=6$ で最大値 $36-YZ=36-1\times 1=35$

　(X,Y,Z) は $(6,1,1)$

ii) $(6-Y-Z)=0$ のとき，① は $6(Y+Z)-YZ=36-5\times 1=31$ が最大値となる。

iii) $(6-Y-Z)<0$ のとき，① は $X=1$ で最大値 $6+5(Y+Z)-YZ=6+(5-Z)Y+5Z$

　$5-Z>0$ のとき，$Y=6$ で最大値 $6+30-Z=36-1=35$

　$5-Z=0$ のとき，最大値 $6+5Z=6+5\times 5=31$

　$5-Z<0$ のとき，最大値 $6+5+4Z=6+5+4\times 6=35$

以上によって $f(X,Y,Z)$ の最大値は 35，したがって S の最小値 $m=9\sqrt{3}-\dfrac{35\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　（答）

$S=m$ となる場合の (X,Y,Z) は，

ｉ)で $(6,1,1)$，iii)で $(1,6,1)$，$(1,1,6)$ の３通り

したがって，$S=m$ となる確率は $\dfrac{3}{6^3}=\dfrac{1}{72}$　（答）

＜解説＞

図形のベクトル表示に確率を絡ませた面白い問題である。

(1)

△PQR が正三角形になるための，(X,Y,Z) の条件を明らかにする。

図１において，△PQR が正三角形とする。

$\angle\mathrm{ARQ}+\angle\mathrm{AQR}=180^\circ-\angle\mathrm{QAR}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\angle AQR + \angle CQP = 180^\circ - \angle RQP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

したがって，$\angle ARQ = \angle CQP$，したがって$\angle AQR = \angle CPQ$，$QR = PQ$ だから

$\triangle AQR \equiv \triangle CPQ$，同様にして $\triangle AQR \equiv \triangle BRP$，$\therefore\ X = Y = Z$

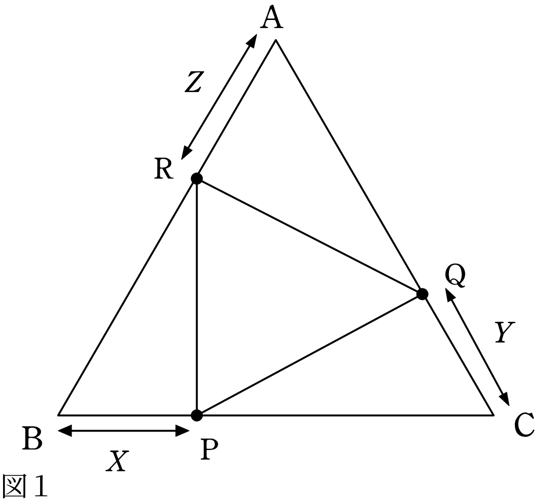

図１

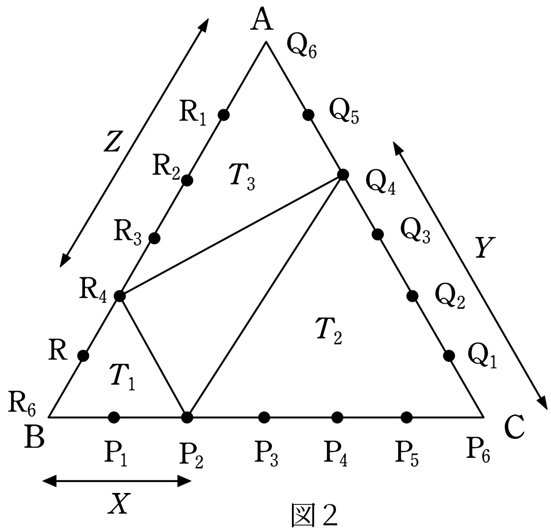

図２

(2)

図２を参照して，T_1，T_2 が正三角形でT_3 が正三角形ではない条件を考える。

T_1 が正三角形であることから $X = 6 - Z$

T_2 が正三角形であることから $6 - X = Y$

T_3 が正三角形でないことから $6 - Y \neq Z$

これを満たす (X, Y, Z) を求める。

(3)

$f(X, Y, Z) = 6(X+Y+Z) - (XY+YZ+ZX)$ の最大値を求める問題に帰着する。3 変数の関数なので，着想が必要だ。Xの一次関数と考えて，最大値を与える条件を考えることが着想だ。すると解答で示したように，大きな困難なく最大値とその条件を求めることができる。しかし，このことに気づくことができずに，考えあぐねて時間を費やすおそれもある。

こういうときは，図を描いて△PQR の面積が最小になるのはどのような場合なのか，考えてみることだ。図３を参照する。$\triangle P_iQ_jR_k$ の面積が最小になるのは，$\triangle P_1Q_1R_6$，$\triangle P_6Q_1R_1$，$\triangle P_1Q_6R_1$，の３つであることがわかる。すなわち三角形の底辺が最小になるのは P_1R_6，Q_1P_6，R_1Q_6 である。そして高さが最小になるのは，それぞれの頂点が Q_1，R_1，P_1 の場合である。

その面積は $\dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。このような解答であれば，短時間ですむであろう。

難しいと感じたら，視点を変えて考えてみることだ。

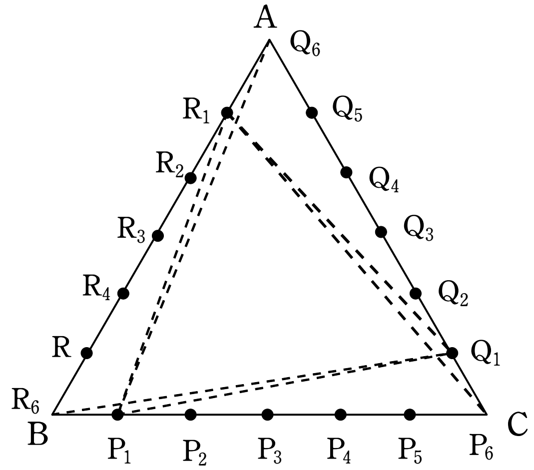

図３

$\boxed{3}$ (60点)

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1とS_2 は外接している．

(1) S_1，S_2 が αと接する点をそれぞれP_1，P_2 とする．線分 P_1P_2 の長さを求めよ．

(2) α の上に乗っており，S_1 とS_2 の両方に外接している球すべてを考える．それらの球とα の接点は，１つの円の上または１つの直線の上にあることを示せ．

＜解答＞

(1)

XYZ 三次元座標空間において，α をXY 平面とし，P_1 を原点$(0,0,0)$，P_2 を$(x_2,0,0)$とする。図１に$Y=0$ 平面における球の断面を示す。

$P_1P_2=x_2$，$x_2{}^2=(r_1+r_2)^2-(r_2+r_1)^2=4r_1r_2$，$\therefore P_1P_2=x_2=2\sqrt{r_1r_2}$ （答）

(2)

S_1 とS_2 の両方に外接している球の平面 αとの接点Pの座標を(x,y)とする。

P_1，P を含みXY 平面に垂直な平面における球 S_1，S の断面を図２に示す。

$P_1P=x^2+y^2=(r_1+r)^2-(r_1-r)^2=4r_1r$ ①

P，P_2 を含みXY 平面に垂直な平面における球 S，S_2 の断面を考えると，同様の考え方により，

$PP_2=(x-x_2)^2+y^2=(r_2+r)^2-(r_2-r)^2=4r_2r$ ②

①，②からrを消去して，$\dfrac{x^2+y^2}{r_1}=\dfrac{(x-x_2)^2+y^2}{r_2}$ ③

図３のように S が S_1，S_2 の間にはない場合も①，②式が成立する。

$r_1=r_2$ のとき，③は$x=\dfrac{x_2}{2}=r_2=r_1$ となり，y は任意の値をとることができる。したがって，S_1 とS_2 の両方に外接している球と α との接点は $x=r_2=r_1$ の直線上にある。これは点 P_1，P_2 の垂直２等分線である。

$r_1\neq r_2$のとき，③式から

$$r_2x^2-r_1(x-x_2)^2+(r_2-r_1)y^2=(r_2-r_1)\left\{\left(x+\frac{r_1x_2}{r_2-r_1}\right)^2\right\}-\frac{{r_1}^2{x_2}^2}{r_2-r_1}-r_1{x_2}^2+(r_2-r_1)y^2=0$$

したがって，$\left(x+\frac{r_1x_2}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{{r_1}^2{x_2}^2}{r_2-r_1}-r_1{x_2}^2=\frac{r_1r_2}{(r_2-r_1)^2}{x_2}^2$　④

④式は$\left(-\frac{r_1x_2}{r_2-r_1},0\right)=\left(-\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},0\right)$を中心とし，半径$\frac{x_2}{|r_2-r_1|}\sqrt{r_1r_2}=\frac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$の円を示す。したがって，$S_1$と$S_2$の両方に外接している球と$\alpha$との接点の座標$(x, y)$は円周上にある。

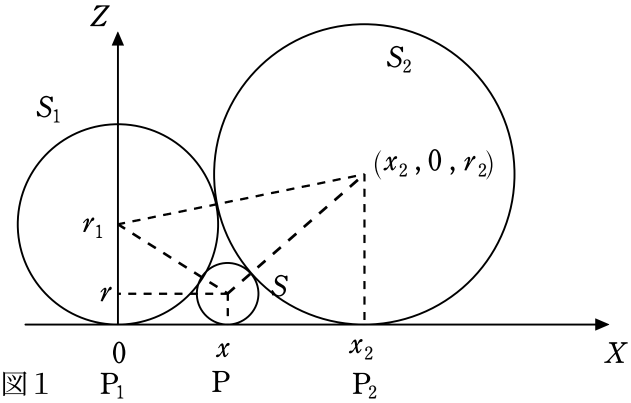

図1

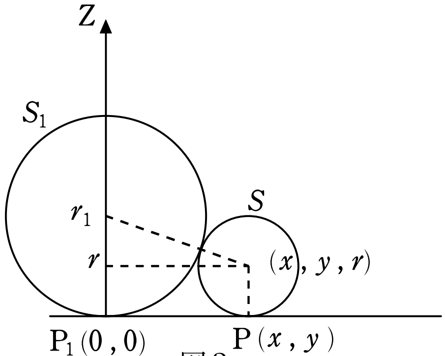

図2

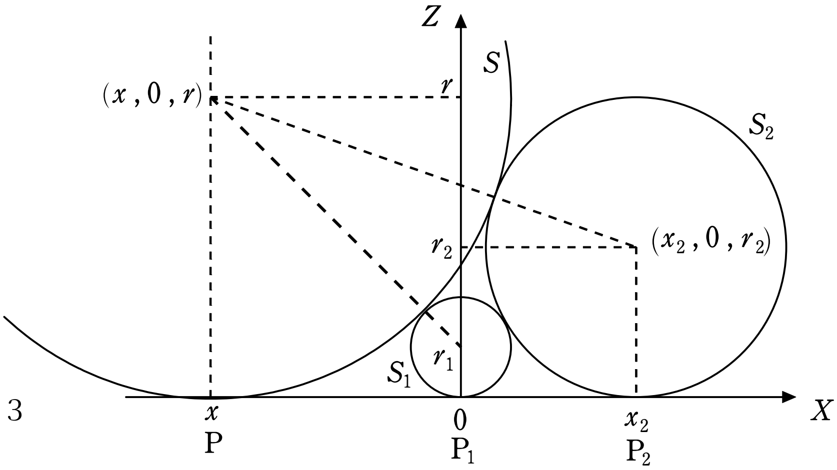

図3

＜解説＞

(1)

図1のような図を描けば，線分P_1P_2の長さを求めることは容易であろう。この図は単にP_1P_2の長さを求めるためだけでなく，重要な事実を示している。P_1，P_2，外接する2つの球の中心およびそれらの接点の5点が同一平面上にあるということである。

球S_1において球の中心とP_1を結ぶ直線は面αに垂直，同様に球S_2において球の中心とP_2を結ぶ直線は面αに垂直，したがってP_1，P_2，と2つの球の中心は同一平面上にある。球S_1，S_2の接点は球の中心を結ぶ線上にある。なぜなら，接点を通り両球に接する面を考えると，一方の球の中心と接点を結ぶ直線は平面に垂直，他方の球の中心と接点を結ぶ直線も平面に垂直，したがって，一方の球の

中心と接点を結ぶ直線と接点と他方の球の中心を結ぶ直線は180° の交角をなす。すなわち１本の直線をなす。

したがって，水平面 α 上に乗っていて外接する２つの球を，P_1 ，P_2 ，２つの球の中心を含む平面で切った断面は図１のようになる。

(2)

まずは問題文を読んで，設定される状況を理解する。すると図１に示すような，外接する２つの球 S_1，S_2 と平面 α との間にできる空間に球が入って，２つの球と平面 α に接するという状況のことと理解できる。そして，立体図形だから，この球が２つの球 S_1，S_2 に接しながら，図１の紙面から奥や手前に位置することも想像できる。

すると，問題はこの球 S が平面 α と接する点の座標がどのように変化するかを明らかにすれば良い，ということになる。直線であれば直線の方程式，円であれば円の方程式を満たすように座標が変化することを示すことになる。

図２のように２つの球 S_1，S が外接している図を描くと，(1)を利用して，球 S が平面 α と接する点の座標 $(x\,,\,y)$ が満たすべき関係が表現できる。同様に２つの球 S ，S_2 が外接している図を描くと座標 $(x\,,\,y)$ が満たすべきもう一つの関係が表現できる。この２つの関係から，$(x\,,\,y)$ が満たす表式を求めると，２つの球の半径が同じ場合には直線，異なる場合には円となる。

図３のように，S_1，S_2 の外側に S が存在する（言い換えると，S と S_2 の間に S_1 が存在する）場合もあることに気づく。この場合でも，外接する球どうしの関係①式，②式が成立するので，同じ結果が得られる。ただし，図からわかるように，$r_1 \fallingdotseq r_2$ である。

(1) が(2) の誘導問題となっていることがわかる。

$\boxed{4}$ (60点)

n を2 以上の自然数とする.

(1)　n が素数または4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ.

(2)　n が素数でなくかつ4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ.

＜解答＞

(1)

$n=4$ のとき，$\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{3!}{4}=\dfrac{3}{2}$ となり割り切れない。

n が素数であれば1 と n 以外に約数をもたない。

したがって $(n-k)$ は n とは１以外の共通の約数をもたない。

ただし，$k=1\,,2\,,\,.\,.\,.\,,\,n-2$ ，したがって $(n-1)!$ は n で割り切れない。

(2)

n が素数でなくかつ4 でもないとき，$n = pq \geqq 6$ とおくことができる。

ただし，p ，q は自然数であって $2 \leqq p \leqq q \leqq n-1$ を満たす。

$p < q$ のとき，p ，$q \in \{2\,,3\,,\cdots,(n-2)\,,(n-1)\}$ だから，p ，q は $(n-1)!$ の約数となる。

したがって，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

$p=q$ のとき，$n=p^2$，$p=\sqrt{n}$，$(n-1)^2-(2p)^2=n^2-2n+1-4n=(n-3)^2-8$

$n \geqq 6$ のとき，$(n-1)^2-(2p)^2>0$ だから，$2p<n-1$，$\therefore\ p$，$2p \in \{2, 3, \cdots, (n-2), (n-1)\}$

したがって，p，$2p$ は$(n-1)!$ の約数となる。したがって，$n=p^2$ は$(n-1)!$ の約数となるので，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

以上によって，n が素数でなくかつ4でもないとき，$(n-1)!$ はn で割り切れる。

＜解説＞

整数の問題。一見難しく感じるが，当たり前の事実を証明せよ，との問題であることに気づく。こうした問題は、当たり前の結論をどのようにして導くかという数学の論理展開力を問うことになる。

(1)

素数の定義を使って説明する。

(2)

当たり前に見える命題なのだが，どのようにして証明するか，着想が必要である。
n の約数が $(n-1)!$ を構成する自然数に含まれることを示せば良い。$(n-1)!$ を構成する自然数は $(n-1)$ 以下のすべての自然数を含むから，n の約数が $(n-1)$ 以下であることを示せば良いということになる。

まず，n が素数でなくかつ4でもないとき，$n=pq \geqq 6$ とおいて考え始めることがポイントである。このようにおくことができる理由はn が素数でないので 1とn 以外に約数をもつからだ。そして，$2 \leqq p \leqq q \leqq n-1$であることは自明として良い。この段階で，半ば解答できたといえよう。

このような着想に基づいて，論理を展開してゆけば良いのだが，$n=p^2$ の場合には工夫が必要である。p が $(n-1)!$ の約数であることは自明だが，さらにp が $(n-1)(n-2)\cdots(p+1)(p-1)\cdots 2$ の約数であることを示す必要がある。そのためにはp の倍数が $(n-1)(n-2)\cdots(p+1)(p-1)\cdots 2$ の中に含まれていれば良い。p の倍数で最も小さいものは$2p$ だから，$2p$ が $(n-1)$ より小さければ良い，ということになる。

$\boxed{5}$ (60点)

次のように媒介変数表示されたxy 平面上の曲線をC とする：

$$x=3\cos t-\cos 3t$$
$$y=3\sin t-\sin 3t$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ.

(2) C とx 軸とy 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

＜解答＞

(1)

$$\frac{dx}{dt}=-3\sin t+3\sin 3t=6\sin t\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt}=3\cos t-3\cos 3t=6\sin t\sin 2t$$

x は図１のように変化する。$\dfrac{dy}{dt}\geqq 0$ だから，y は単調増加である。

$\dfrac{dy}{dx}=\tan 2t$，$t=0$ で $\dfrac{dy}{dx}=0$，$t=\dfrac{\pi}{4}$ で $\dfrac{dy}{dx}=\infty$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{dy}{dx}=0$

$t=0$ で $x=2$，$y=0$，$t=\dfrac{\pi}{6}$ で $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{\pi}{4}$ で $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$，

$t=\dfrac{\pi}{3}$ で $x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$t=\dfrac{\pi}{2}$ で $x=0$，$y=4$

以上から，C の概形を図２に示す。

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x		↗	$2\sqrt{2}$	↘	

図１

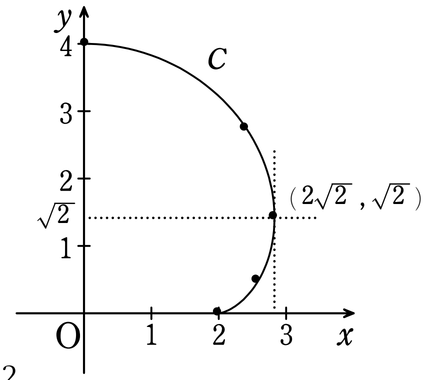

図２

(2)

図２を参照する。C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積

$$S=\int_0^4 x(y(t))dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\frac{dy}{dt}dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos t-\cos 3t)(\cos t-\cos 3t)dt$$

$$\begin{aligned}(3\cos t-\cos 3t)(\cos t-\cos 3t)&=3\cos^2 t-4\cos t\cos 3t+\cos^2 3t\\&=\frac{3}{2}(\cos 2t+1)-2\cos 4t-2\cos 2t+\frac{1}{2}(\cos 6t+1)\\&=-\frac{1}{2}\cos 2t-2\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 6t+2\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos t-\cos 3t)(\cos t-\cos 3t)dt=\left[-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{12}\sin 6t+2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

したがって，$S=3\pi$（答）

＜解説＞

(1)

媒介変数によって決まる x，y 変数の曲線 (x, y) を描く問題。一見，どのような曲線になるのか，わからないので，具体的な数値を t に与えて，座標点 (x, y) を求めてみよう。この際 $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ に注目すると $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt}=0$ になるので，x が極値をもつことに気づく。実際に x の変化を調べ，$t=\dfrac{\pi}{4}$ において極値 $2\sqrt{2}$ をもつことを明らかにする。

一方，$\dfrac{dy}{dt} \geqq 0$ だから，y は単調増加であることにも気づく必要がある。

図３のように，簡単に計算できる $t=0$，$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$ での座標点 (x, y) を滑らかに結んで曲線 C を描く。$t=0$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$ での傾きも考慮する。概形だから，これで十分である。

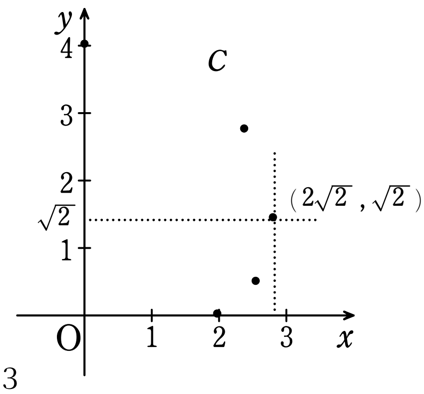

図３

(2)

C の概形から，面積をどのように計算するかを考える。曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた図形を

　x 軸に平行な線分で分割して，微小矩形の面積 $x(y)\Delta y$ を加算していく　①

　y 軸に平行な線分で分割して，微小矩形の面積 $y(x)\Delta x$ を加算していく　②

ことによって面積を求める方法がある。②では，$y(x)$ が $2 < x < 2\sqrt{2}$ で2 値関数だから，①によって求める。

＜総評＞

多くの国立大学の理系の数学試験は６問150分，200点満点であるのに対して，東工大は５問で180分，300点満点である。そのせいだろうか，どの問題も難易のレベルが高く，解答方針の着想や思考の過程に骨がある。数学好きな生徒には面白いと感じる問題も多い。

今年の問題は，極端な難問はないが，容易と思われる問題もない。私は $\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$ の順で扱いたいと思った。

$\boxed{1}$

関数によって与えられる図形の２点間の距離の最小値を求める問題。与えられた関数や点の位置などから，問題を簡易に解く方法に気づく必要がある。計算は難しくない。難易度Ｂ。

$\boxed{2}$

図形の点の位置を確率的に定め，図形の面積が最小になる確率とその値を求める問題である。類題が少ないので戸惑うかも知れないが，それほど難しい問題ではない。３変数関数の最大値を求めるために着想が必要となるが，図を描いて考えれば，より簡明に求めることができる。難易度Ｂ＋。

$\boxed{3}$

立体図形の問題を苦手とする受験生がいるかも知れない。問題文を一読しただけでは，直ちに問題の設定状況を把握することが難しい。水平面上にある外接する２つの球に外接する球の図を描いて考えるのだが，まずは断面図によって２次元図形として考え，これを３次元にすることを考える。
問題設定を把握できれば計算は意外に簡単だから，難易度はＡ。

$\boxed{4}$

当たり前とも思われる命題を証明する整数問題。着想が必要だが，難しい論理展開を必要する問題ではない。素数，素数でない数，約数倍数等の定義や関係などの基礎的事項について理解していること。難易度はＢ＋。

$\boxed{5}$

媒介変数の三角関数によって表現されたxy座標の曲線に関する問題。三角関数の加法定理，微分，積分，などを的確に扱うことが必要である。Ｂ。

161014