2016（H28)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

eを自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$とする。すべての正の実数$x$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

＜解答＞

$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=x(\log(x+1)-\log x)$とおく。

$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$，したがって $f'(x)$ は $x>0$ において単調減少

$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ だから，$x>0$ において$f'(x)>0$

したがって $f(x)$ は$x>0$において単調増加，したがって$x<t$ なる t に対して $f(x)<f(t)$

すなわち $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

対数関数は単調増加関数だから，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{t}\right)^t<\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

$g(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}=\left(x+\frac{1}{2}\right)(\log(x+1)-\log x)$とおく。

$g'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x}$

$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$

したがって$g'(x)$は$x>0$において単調増加，$\lim_{x\to\infty}g'(x)=0$だから，$x>0$ において$g'(x)<0$

したがって $g(x)$は $x>0$ において単調減少，したがって$x<t$ なるt に対して $g(x)>g(t)$

すなわち $\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}<\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

対数関数は単調増加関数だから，$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}<\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}>\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$，したがって$e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

<解説>

簡単そうな命題の証明だが，的確な論理展開はなかなか難しい。解答方針を考える。

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ を見つめると，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ が単調増加関数ならば，容易に証明できることが解る。そこで，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ の導関数を評価したいのだが，これが解らない。そこで，この関数の対数とその導関数を用いることを考える。幸い，対数関数は単調増加関数である。導関数を求めることも容易である。

$g'(x)$ は $x>0$ において単調増加，$\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=0$ だから，$x>0$ において $g'(x)<0$ としたが，仮に $g'(x)\geqq 0$ になることがあると，$\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=0$ のためには，単調増加にならないから矛盾である。

$e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ についても同様に考えれば良い。

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}>\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$ だから，

$e<\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ を証明すれば良いのだから，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ が単調減少関数であることを証明すれば良い。

第 2 問

A，B，C の３つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目でAとB が対戦する。

(b) 2 試合目で，1試合目の勝者と，1 試合目で待機していたC が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここでは k は2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目でA が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下でA が優勝したとき，A の最後の対戦相手がB である条件付き確率を求めよ。

<解答>

(1)

A が優勝する場合，勝チームの経過は以下の通りである。

① A C B A C B . . . A C B A A（ACB を繰り返し，B に勝った後，勝ち残りでC に勝って優勝）

② B C A B C A . . . B C A A （BCA を繰り返し，C に勝った後，勝ち残りでB に勝って優勝）

①では，$j=1,2,...$　として，A が優勝する確率 p_1は，$n=3j-1$のときのみA が優勝である。
各試合の勝つ確率は1/2だから，

$n=3j$ のとき，　$p_1=0$

$n=3j-1$のとき，$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=3j+1$のとき，$p_1=0$

②では，$j=1,2,...$　として，A が優勝する確率 p_2は，$n=3j+1$のときのみA が優勝だから

$n=3j$ のとき，　$p_2=0$

$n=3j-1$のとき，$p_2=0$

$n=3j+1$のとき，$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

以上をまとめると，$j=1,2,...$ に対して，A が優勝する確率 $p=p_1+p_2$ は

$$\left.\begin{array}{ll} n=3j \text{ のとき，} & p=0 \\ n=3j-1\text{のとき，} & p=\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ n=3j+1\text{のとき，} & p=\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array}\right\} \quad \text{（答）}$$

(2)

総試合数が$3m$ 回 以下でA が優勝する確率をP，A が最後の対戦相手B に勝って優勝する確率を P_B とすれば，A が優勝したとき最後の対戦相手がBである条件付き確率は $P_{BA}=\frac{P_B}{P}$

A が最後の対戦相手C に勝って優勝する確率をP_Cとすれば $P=P_B+P_C$

A が最後の対戦相手B に勝って優勝する場合は(1)において②である。

すなわち，$n=3j-2$　($j=2,3,...,m$)として，

$P_B=\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-2}$，これは初項 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$，公比 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$の等比数列の $m-1$項の和だから，

$$P_B=\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1-(1/2)^{3(m-1)}}{1-(1/2)^3}$$

最後の対戦相手C に勝って優勝する場合は(1)において①である。

$P_C=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-1}$，これは初項 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$，公比 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$の等比数列の$m$ 項の和だから，

$$P_C=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1-(1/2)^{3m}}{1-(1/2)^3}$$

$$P_{BA}=\frac{P_B}{P}=\frac{P_B}{P_B+P_C}=\frac{2(8^{m-1}-1)}{10\cdot 8^{m-1}-3} \quad \text{（答）}$$

＜解説＞

確率の問題は解答方針を着想する必要がある。求められる場合が具体的にどのように出現するかを考えると，スムーズに着想できることが多い。A が優勝する場合は，1試合目にA が勝つとすると，その後A が連勝して優勝するまで，勝ちチームの経過はACB を繰り返すことがわかる。

1試合目でBが勝つとすれば，その後Aが連勝して優勝するまでの勝ちチームの経過はBCAを繰り返すことがわかる。この２つの勝チームの経過を観察すれば，Aが優勝することのできる試合数，できない試合数のあることがわかる。

(2)では，ここでいう条件付き確率の定義を理解しておくことが必要である。Aが優勝したとき，Bが最後の対戦相手であるような優勝の確率ということだから，

（求める条件付き確率）＝（Bが最後の対戦相手である優勝の確率）／（Aが優勝する確率）

である。やや，煩瑣な等比数列の和の計算をミスしないこと。

第　3　問

aを$1<a<3$を満たす実数とし，座標空間内の4 点$P_1(1,0,1)$，$P_2(1,1,1)$，$P_3(1,0,3)$，$Q(0,0,a)$を考える。直線P_1Q，P_2Q，P_3Qとxy平面の交点をそれぞれR_1，R_2，R_3として，三角形$R_1R_2R_3$の面積を$S(a)$とする。$S(a)$を最小にするaと，そのときの$S(a)$の値を求めよ。

＜解答＞

点R_1, R_2, R_3を$R_1(x_1, y_1, 0)$，$R_2(x_2, y_2, 0)$，$R_3(x_3, y_3, 0)$とする。

$\overrightarrow{P_1Q}=(-1, 0, a-1)$，$\overrightarrow{R_1Q}=(-x_1, -y_1, a)$，$\overrightarrow{R_1Q}=k_1\overrightarrow{P_1Q}$ だから，$x_1=\dfrac{a}{a-1}$，$y_1=0$

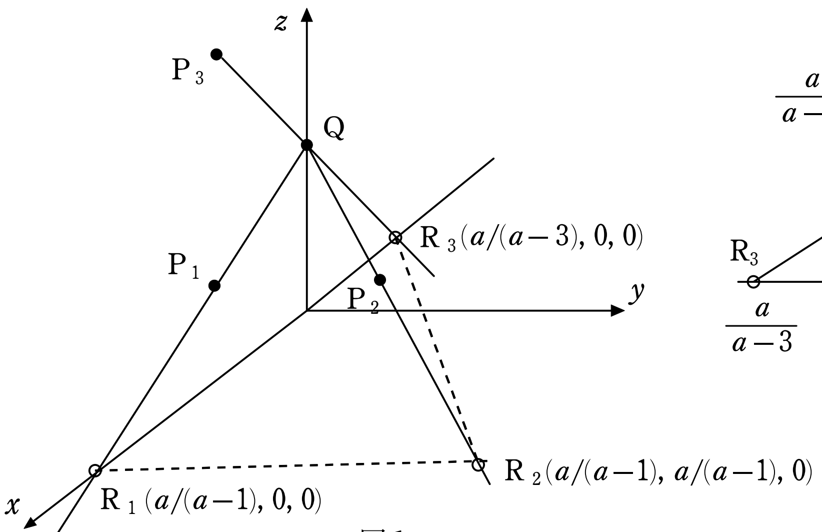
したがって $R_1(a/(a-1), 0, 0)$

$\overrightarrow{P_2Q}=(-1, -1, a-1)$，$\overrightarrow{R_2Q}=(-x_2, -y_2, a)$，$\overrightarrow{R_2Q}=k_2\overrightarrow{P_2Q}$ だから，$x_2=y_2=\dfrac{a}{a-1}$

したがって $R_2(a/(a-1), a/(a-1), 0)$

$\overrightarrow{P_3Q}=(-1, 0, a-3)$，$\overrightarrow{R_3Q}=(-x_3, -y_3, a)$，$\overrightarrow{R_3Q}=k_3\overrightarrow{P_3Q}$ だから，$x_3=\dfrac{a}{a-3}$，$y_3=0$

したがって $R_3(a/(a-3), 0, 0)$



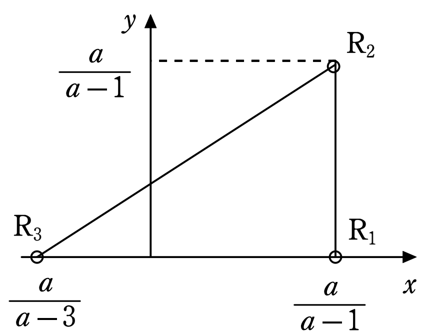


図１

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\frac{a}{a-1}\times\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-3}\right)=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

$S'(a)=\dfrac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)(3-a)^2}$，図２のように$S(a)$は変化するから，$a=2$ のとき最小値 $S(2)=4$　（答）

a	1		2		3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

図２

＜解説＞

まずは点R_1, R_2, R_3の座標を求める必要がある。
ベクトルによって扱えば容易に求めることができる。

R_1は直線P_1Q上にあるのだから，$\overrightarrow{R_1Q}=k_1\overrightarrow{P_1Q}$ と表すことがポイントである。すると，

$-x_1=-k_1$，$y_1=0$，$a=k_1(a-1)$から，$x_1=\dfrac{a}{a-1}$となる。

R_2, R_3についても同様である。

$S(a)$は容易に求まるので，導関数算出の計算ミスさえなければ，正答に至る。

第　４　問

zを複素数とする。複素平面上の３点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすようなzの範囲を求め，図示せよ。

＜解答＞

$z=x+iy$とする。

A が原点になるよう平行移動するとB は $z-1$ へ，C は z^2-1 へ移動し，

$\angle\mathrm{BAC}=\left|arg\left(\dfrac{z^2+1}{z-1}\right)\right|=|arg(z+1)|$，これが鋭角だから $0<|arg(z+1)|<\dfrac{\pi}{2}$,

したがって $z+1$の実部が正だから$x+1>0$，$\therefore\ x>-1$　①

B が原点になるよう平行移動するとC は z^2-z へ，A は $1-z$ へ移動し，

$\angle\mathrm{CBA}=\left|arg\left(\dfrac{z^2-z}{1-z}\right)\right|=|arg(-z)|$，これが鋭角だから $0<|arg(-z)|<\dfrac{\pi}{2}$,

したがって $-z$の実部が正だから$-x>0$，$\therefore\ x<0$　②

C が原点になるよう平行移動するとA は$1-z^2$へ，B は$z-z^2$へ移動し，

$\angle\mathrm{ACB}=\left|arg\left(\dfrac{1-z^2}{z-z^2}\right)\right|=\left|arg\left(\dfrac{1+z}{z}\right)\right|$，これが鋭角だから $0<\left|arg\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\right|<\dfrac{\pi}{2}$,

したがって $1+\dfrac{1}{z}=1+\dfrac{1}{x+iy}=1+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ の実部が正だから $x^2+x+y^2>0$,

$\therefore\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　③

①，②，③を満たす$z=x+iy$ は図２の打点部になる。ただし，境界線は含まれない。

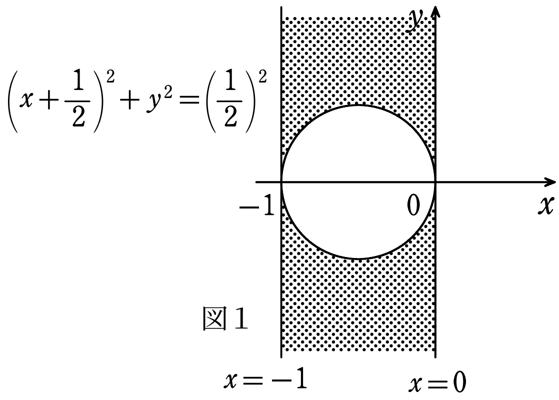


図1

＜解説＞

新課程で復活した複素数平面に関する問題。

まずは鋭角三角形の条件を明確にする必要がある。三角形の３つの内角がすべて90°未満であることが鋭角三角形の条件である。

複素数平面上で三角形の内角を求める方法は数学Ⅲの教科書に記載されている。内角をはさむ両辺の頂点を表す複素数の比の偏角（argument）である。

複素数の偏角が $0<$偏角$<\frac{\pi}{2}$ あるいは $-\frac{\pi}{2}<$偏角<0であるということは複素数の実数部が正であることを意味する。

偏角の考え方に自信のない生徒のために別解を示そう。

$z=x+iy$とする。三角形ABC が鋭角三角形である条件は

$\angle$ABCが鋭角であるためには $(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{BC})^2>(\mathrm{CA})^2$

$\angle$BCAが鋭角であるためには $(\mathrm{BC})^2+(\mathrm{CA})^2>(\mathrm{AB})^2$

$\angle$CABが鋭角であるためには $(\mathrm{CA})^2+(\mathrm{AB})^2>(\mathrm{BC})^2$

$\mathrm{AB}=|z-1|$，$\mathrm{BC}=|z^2-z|$，$\mathrm{CA}=|1-z^2|$

$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{BC})^2-(\mathrm{CA})^2=|z-1|^2+|z^2-z|^2-|1-z^2|^2=|z-1|^2(1+z\overline{z}-|z+1|^2)>0$

$1+z\overline{z}-|z+1|^2=1+(x^2+y^2)-(1+x)^2-y^2=-2x>0$，$\therefore\ x<0$　④

$(\mathrm{BC})^2+(\mathrm{CA})^2-(\mathrm{AB})^2=|z^2-z|^2+|1-z^2|^2-|z-1|^2>0$,

$\therefore\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$　⑤

$(\mathrm{CA})^2+(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{BC})^2=|1-z^2|^2+|z-1|^2-|z^2-z|^2>0$,

$\therefore\ x>-1$　⑥

④，⑤，⑥を満たす$z=x+iy$は①，②，③と同じである。

複素数の計算はむしろこちらの方が容易である。

第　5　問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を１つとる。ここで$a_1, a_2, \cdots, a_k$ は0 から9 までの整数で，$a_k\fallingdotseq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を$[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数s は存在しないことを示せ。

＜解答＞

(1)

$$0.a_1a_2\cdots a_k+10^k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}+10^k$$

$(0.a_1a_2\cdots a_k+10^k)^2=2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k)+10^{2k}+O(10^0)$

ただし $O(10^0)<10^0=1$

$$0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}+10^k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k+1}{10^k}+10^k$$

$(0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}+10^k)^2=2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k+1)+10^{2k}+O'(10^0)$，$O'(10^0)<1$

したがって

$2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k)+10^{2k}+O(10^0)$

$\leqq n<2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k+1)+10^{2k}+O'(10^0)$　①

①を満たす整数n は次の２つ。

$2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k)+10^{2k}+1$

$2(a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k)+10^{2k}+2$　　（答）

(2)

$$0.a_1a_2\cdots a_k+p=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}+p$$

$(0.a_1a_2\cdots a_k+p)^2=2(a_110^{-1}+a_210^{-2}+\cdots+a_k10^{-k})p+p^{2k}+O(10^0)$

$\geqq2(a_110^{-1}+a_210^{-2}+\cdots+a_k10^{-k})\times5\cdot10^{k-1}+2.5\times10^{2k-1}+O(10^0)$

$=a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k+2.5\times10^{2k-1}+O(10^0)$

$(0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}+p)^2=2(a_110^{-1}+a_210^{-2}+\cdots+a_k10^{-k}+10^{-k})p+p^{2k}+O'(10^0)$

$\geqq a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k+1+2.5\times10^{2k-1}+O'(10^0)$

したがって，

$a_110^{k-1}+a_210^{k-2}+\cdots+a_k+2.5\times10^{2k-1}+O(10^0)$

$\leqq m < a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \cdots + a_k + 1 + 2.5 \times 10^{2k-1} + O'(10^0)$

$2k-1 \geqq 1$だから，$10^{2k-1} \geqq 10$，$\therefore 2.5 \times 10^{2k-1}$は整数

したがってm は整数 $a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \cdots + a_k + 1 + 2.5 \times 10^{2k-1}$ をとることができる。

(3)

$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0.a_1 a_2 \cdots a_k$　②

$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] + 0.a_1 a_2 \cdots a_k =$（整数）＋（有限小数）は有理数だから，

$\sqrt{s} = \dfrac{q}{p}$，ただしp，q は互いに素な整数，とおくことができる。

$s = \left(\dfrac{q}{p}\right)^2$，$\therefore sp^2 = q^2$，$s$ が整数とすれば，p^2，q^2 は互いに素だから，$s = q^2$，$p^2 = 1$。

$p \geqq 2$ だから，これは矛盾である。したがって，②をみたす正の整数s は存在しない。

＜解説＞

整数，実数，有理数，無理数等の問題。一見，着想と複雑な論理が必要そうな問題に見えるが，素直に考えていけば良い。

(1)

与式から$(\sqrt{n})^2$の範囲を考察すれば良い。式の表現を少々工夫すれば，容易に正の整数nを求めることができる。

(2)

(1)と同様の考え方で良い。

(3)

当たり前の結論を証明する問題だから，実数，有理数，無理数などの教科書の記載を読んで理解しておかないと，かえって難しいかも知れない。(1)，(2)をヒントにした証明問題などと考えると，混乱する。証明には背理法を用いる。

教科書には$\sqrt{2}$は無理数であることを背理法によって証明する記載がある。これを理解していれば，良い参考になる。

本問は「$\sqrt{s}$ が有限小数ならs は整数ではない」という命題を主張する。これの対偶は「s が整数なら$\sqrt{s}$ は有限小数ではない」という命題である。つまり，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\cdots$ は整数または循環小数または無理数である。整数となるのは$s = n^2$（nは整数）のとき，循環小数となることはない。

第　6　問

座標空間内を，長さ2 の線分AB が次の2条件 (a)，(b) を満たしながら動く。

(a) 点A は平面$z=0$ 上にある。

(b) 点 C (0, 0, 1) が線分 AB 上にある。

このとき，線分AB が通過することのできる範囲をKとする。Kと不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

＜解答＞

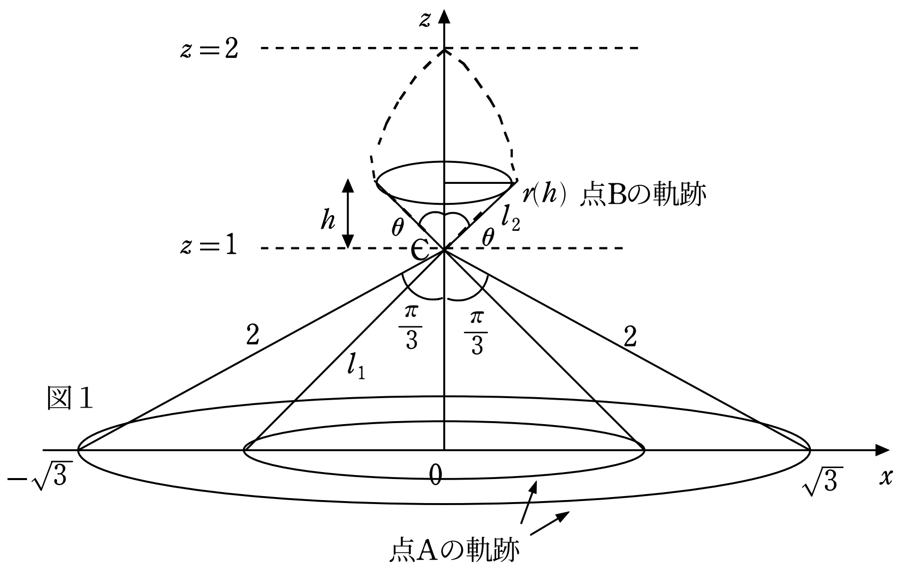


図１

点A が条件(a)，(b)を満たしながら動くということは，図１のように点A は点C を中心に平面$z=0$上で円を描き，その半径が$\sqrt{3}$から次第に0 になる動きとみなすことができる。点B は点C を中心として円軌道を描く。

半径$\sqrt{3}$の円を描くときは，AC=2 だから，点B は点Cと一致する。半径が$\sqrt{3}$より小さくなるにつれ，点B はC から離れ，C を中心とした円を描く。

AC=l_1，CB=l_2とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲とは，l_2 が通過する範囲である。

$l_1+l_2=2$，直線AB とz軸がなす角をθとする。$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$である。

$l_1\cos\theta=1$，$l_2=2-l_1=2-\dfrac{1}{\cos\theta}$

点B が描く円軌道の半径は $r=l_2\sin\theta=\dfrac{h\sin\theta}{\cos\theta}$，

ここでhは点C から円の平面までの距離で点B が点C と一致するとき$h=0$である。

θより小さい角度のl_2 は必ず半径r の円内を通過するから，$h=0$から$h=1$まで変化したとき（すなわち点B が$z=1$から$z=2$ まで変化したとき）の点B が描く円軌道 $r(h)$内がl_2 の通過する範囲である。

$h=l_2\cos\theta=\left(2-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta=2\cos\theta-1$，$\cos\theta=\dfrac{1+h}{2}$

求める体積は $V=\pi\int_o^1 r^2(h)dh$

$$r^2(h)=\frac{h^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{h^2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{h^2}{\cos^2\theta}-h^2=\left(\frac{2h}{1+h}\right)^2-h^2$$

$$\int_o^1 r^2(h)dh=\int_0^1\left\{\left(\frac{2h}{1+h}\right)^2-h^2\right\}dh=4\int_0^1\left\{\left(\frac{h}{1+h}\right)^2\right\}dh-\frac{1}{3}\left[h^3\right]_0^1=4\int_0^1\left\{\left(\frac{h}{1+h}\right)^2\right\}dh-\frac{1}{3}$$

$t=\dfrac{1}{1+h}$ とおけば，$\dfrac{dt}{dh}=\dfrac{-1}{(1+h)^2}$，$dh=-(1+h)^2 dt$

$$\int\left(\frac{h}{1+h}\right)^2 dh=-\int h^2 dt=-\int\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 dt=-\int\frac{1}{t^2}dt+2\int\frac{1}{t}dt-\int dt=\frac{1}{t}+2\log t-\mathrm{t}$$

$$\int_0^1\left\{\left(\frac{h}{1+h}\right)^2\right\}dh=\left[\frac{1}{t}+2\log t-t\right]_1^{\frac{1}{2}}=2-2\log 2-\frac{1}{2}-1+1=\frac{3}{2}-2\log 2$$

$$\int_o^1 r^2(h)dh=4\left(\frac{3}{2}-2\log 2\right)-\frac{1}{3}=\frac{17}{3}-8\log 2,\ V=\pi\int_o^1 r^2(h)dh=\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)$$ （答）

＜解説＞

まずは条件 (a)，(b) のもとで，線分AB がどのような動きをするのかを理解することが必要である。点C (0, 0, 1) を必ず通りながら，点A が$z=0$の平面上を動くのだから，A がz軸を回る円運動をすると考えると，線分ACB が円錐の母線を構成する。点A の円運動の最大半径はB がC に一致するときであり，AB がz軸と一致したとき半径 が最小の 0となる。

このように，線分AB の動きとその範囲を把握できたら，K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲の共通部分を把握する。B のz 座標は1 以上だから，それは線分CB が動く範囲である。すなわち線分CB の動く範囲の体積を求める問題となる。

点Aの円運動の半径が小さくなるにつれ，線分CB は長くなり， CB がつくる円錐の円錐角は小さくなる。したがって，Aが円を描くとき点B が描く円内をそのときのABとz 軸がなす角より小さい角をなす線分CB は通過する。したがって求める体積はB が描く円の面積をz軸方向に加算していけば良いということになる。こうして求める体積の表式（積分式）を得る。

$\displaystyle\int\left(\frac{h}{1+h}\right)^2 dh$の不定積分がポイントである。単純な形なので，不定積分が容易に求まりそうだが，そうでもない。部分積分法か置換積分法を用いるのであろうと推定する。同じ不定積分の経験を覚えていれば良いが，そうでない場合は短時間で導くことは難しい。まずは置換積分からトライする。

一見 $\dfrac{h}{1+h}=t$とおけば良さそうだが，うまくいかない。ここで諦めない。$\dfrac{1}{1+h}=t$ とすれば，うまくいく。もしだめなら，部分積分法をトライする。

＜総評＞

昨年の卒業生から適用の新課程で登場した複素数の問題が今年の入試で出題された。例年同様，骨のある問題が揃っているので，難易や習熟に応じて解答順序の選択が重要である。私は３，１，４，５，２，６の順序で扱いたいと感じた。

第１問

関数の不等式の証明問題。2 階微分まで考慮した関数変化の検討が必要で，粘り強い思考が求められるが，解答方針の着想は難しくはない。難易度Ｂ。

第２問

例年の確率の問題に比して，容易である。解答方針は求める場合の出現を具体的に考えると，見えてくる。難易度Ｂ。

第３問

空間ベクトルの取り扱いの問題。題意は簡明だから，ベクトルの取り扱いをきちんと行えば，容易に正答できるだろう。難易度はＢ－。

第４問

昨年の卒業生から適用された新課程の数学Ⅲにおいて復活した複素数平面の問題が28 年度入試で登場した。難易度Ｂ。

第５問

数の基礎的な理解と取扱いに関する問題。教科書の整数，実数，有理数，無理数などとその処理に関わる記載を理解しておくことが必要である。(1)，(2) は素直に扱えば良い。(3)は(1)，(2) の誘導問題ではなく，関連問題である。基本的な事項に関わるだけに，かえって難しいかも知れない。難易度はＡ－。

第６問

空間図形の積分問題。対象図形がどのようなものか，まずは把握する必要がある。略図を描いて，線分ABの動きとそれが作る空間図形を理解する。その上で体積の求め方を考える。対象図形の理解，体積の求め方，積分の実行方法等に難しさがあり，難易度はＡ。

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

座標平面上の3点P(x,y)，Q$(-x,-y)$，R$(1,0)$が鋭角三角形をなすための(x,y)について条件を求めよ。また，その条件をみたす点P(x,y)の範囲を図示せよ。

＜解答＞

∠QPRが鋭角であるためには $(\mathrm{PQ})^2+(\mathrm{PR})^2>(\mathrm{QR})^2$　①

∠PQRが鋭角であるためには $(\mathrm{QR})^2+(\mathrm{PQ})^2>(\mathrm{PR})^2$　②

∠QRPが鋭角であるためには $(\mathrm{PR})^2+(\mathrm{QR})^2>(\mathrm{PQ})^2$　③

$(\mathrm{PQ})^2=4(x^2+y^2)$，$(\mathrm{PR})^2=(x-1)^2+y^2$，$(\mathrm{QR})^2=(1+x)^2+y^2$

①式は $4(x^2+y^2)+(x-1)^2+y^2>(1+x)^2+y^2$，$\therefore \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　④

②式は $(1+x)^2+y^2+4(x^2+y^2)>(x-1)^2+y^2$，$\therefore \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　⑤

③式は $(x-1)^2+y^2+(1+x)^2+y^2>4(x^2+y^2)$，$\therefore x^2+y^2<1$　⑥

3点P，Q，Rが鋭角三角形をなすための(x,y)の条件は④，⑤，⑥を同時に満足することである。

この条件を満たす点P(x,y)の範囲は図１の打点部である。ただし境界線は含まない。

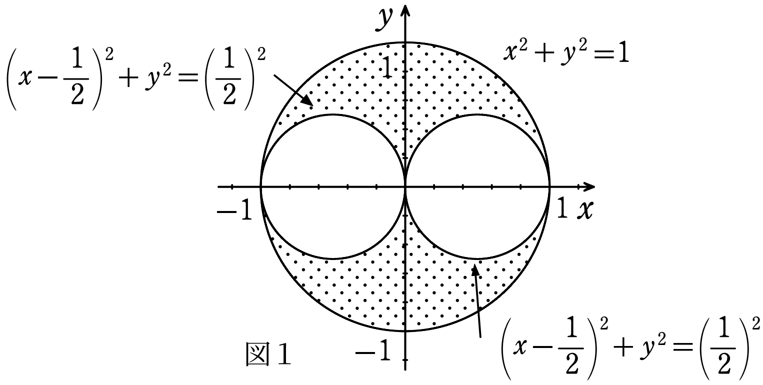


図１

＜解説＞

鋭角三角形の条件を明確にすること。

その条件は，（角をはさむ各辺の長さの2 乗の和）＞（対辺の長さの2 乗）である。

頂点の座標が与えられているのだから，辺の長さを求めることは容易である。

第２問

Ａ，Ｂ，Ｃの３つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目でＡとＢが対戦する。

(b) 2 試合目で，1試合目の勝者と，1 試合目で待機していたＣが対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者とk 試合目で待機していたチームが$k+1$試合目で対戦する。ここではk は2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) ちょうど5 試合目でＡ が優勝する確率を求めよ。

(2) n を2 以上の整数とする。ちょうどn 試合目でＡ が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が$3m$ 回以下でＡ が優勝する確率を求めよ。

＜解答＞

理科の第２問と同じ問題設定で，(1)が追加されている。理科の(1)が文科の(2)に相当し，理科の(2)が部分的に(3)に相当する。

(1)

1試合目でＡ が勝ちとすれば，5 試合目でＡ が優勝するためには各回の勝者は以下のようになる。

Ａ Ｃ Ｂ Ａ Ａ

この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

1試合目でＢが勝ちとすれば，5 試合目でＡ が優勝するためには，4 試合目でＡ が勝ちにならなければならないが，3 試合目でＡ が勝ちとなっているので，4 試合目でＡ の優勝となる。したがって，1試合目でＢが勝ちとして，5 試合目でＡ が優勝することはない。

したがって，5 試合目でA が優勝する確率は $\dfrac{1}{32}$　（答）

(2)

理科の解答(1)と同じである。

A が優勝する場合は，以下のような勝チームの経過である。

① A C B A C B . . . A C B A A（ACB を繰り返し，B に勝った後，勝ち残りでC に勝って優勝）

② B C A B C A . . . B C A A（BCA を繰り返し，C に勝った後，勝ち残りでB に勝って優勝）

①では，$j=1, 2, ...$ として，A が優勝する確率 p_1は，$n=3j-1$のときのみA が優勝である。

各試合の勝つ確率は1/2だから，

$n=3j$ のとき，　$p_1=0$

$n=3j-1$のとき，$p_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n=3j+1$のとき，$p_1=0$

②では，$j=1, 2, ...$ として，A が優勝する確率 p_2は，$n=3j+1$のときのみA が優勝だから

$n=3j$ のとき，　$p_2=0$

$n=3j-1$のとき，$p_2=0$

$n=3j+1$のとき，$p_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

以上をまとめると，$j=1, 2, ...$ に対して，A が優勝する確率 $p=p_1+p_2$ は

$$\left.\begin{array}{l} n=3j \text{ のとき，} p=0 \\ n=3j-1 \text{ のとき，} p=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ n=3j+1 \text{ のとき，} p=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{array}\right\} \quad \text{（答）}$$

(3)

理科の(2)の解答を参照し，考える。

総試合数が$3m$ 回 以下でA が優勝する確率をP，A が最後の対戦相手B に勝って優勝する確率を P_B，A が最後の対戦相手C に勝って優勝する確率をP_Cとすれば $P=P_B+P_C$

A が最後の対戦相手B に勝って優勝する場合は(2)において②である。

すなわち，$n=3j-2$ $(j=2, 3, ..., m)$として，

$P_B=\sum_{j=2}^{m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3j-2}$，これは初項$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$，公比$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$の等比数列の $m-1$項の和だから，

$$P_B=\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1-(1/2)^{3(m-1)}}{1-(1/2)^3}$$

最後の対戦相手C に勝って優勝する場合は(2)において①である。

$P_C=\sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3j-1}$，これは初項$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，公比$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$の等比数列の$m$ 項の和だから，

$$P_C=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3j-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1-(1/2)^{3m}}{1-(1/2)^3}$$

$$P=P_B+P_C=\frac{2}{7}\left\{\frac{5}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\quad（答）$$

＜解説＞

理科の解説を参照する。

第　3　問

座標平面上の２つの放物線

$$A:\quad y=x^2$$
$$B:\quad y=-x^2+px+q$$

が点$(-1,1)$で接している。ここで，pとqは実数である。さらに，tを正の実数とし，放物線Bをx軸の正の向きに$2t$，y軸の正の向きにtだけ平行移動して得られる放物線をCとする。

(1) pとqの値を求めよ。

(2) 放物線AとCが囲む領域の面積を$S(t)$とする。ただし，AとCが領域を囲まないときは$S(t)=0$と定める。$S(t)$を求めよ。

(3) $t>0$における$S(t)$の最大値を求めよ。

＜解答＞

(1)

A，Bを連立させた二次方程式 $x^2=-x^2+px+q$ は$x=-1$の重解をもつ。

すなわち，$2x^2-px-q=2(x+1)^2$，$\therefore\ p=-4$，$q=-2$　（答）

(2)

放物線Bは$y=-(x+2)^2+2$だから，

放物線Cは$y=-(x+2-2t)^2+2+t=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$

放物線A，Cの交点のx座標をα，βとすれば，α，β　$(\alpha<\beta)$は放物線A，Cの方程式を連立させた2次方程式 $2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0$　① の2つの解である。

①が２つの実数解をもつ条件は解の判別式 $D=\{-2(t-1)\}^2-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t>0$

したがって，$0<t<\dfrac{5}{2}$

$$S(t)=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2)-x^2\}dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta=-2\left[\frac{1}{3}x\left\{x^2-\frac{3(\alpha+\beta)}{2}x+3\alpha\beta\right\}\right]_\alpha^\beta$$

$$=-2\left[\frac{1}{3}x\left\{-\frac{(\alpha+\beta)}{2}x+2\alpha\beta\right\}\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{8}{3}\left(\frac{5}{2}t-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\quad\left(0<t<\frac{5}{2}\right)\ （答）$$

$0<t<\dfrac{5}{2}$以外のtでは，放物線A，Cは領域を囲まないので

$S(t)=0 \quad \left(t \geqq \dfrac{5}{2}\right)$ （答）

⑶

$S'(t)=2(5-4t)\left(\dfrac{5}{2}t-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$S(t)$ は図１のように変化する。

したがって$S(t)$ の最大値は$t=\dfrac{5}{4}$のときで，$S\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{125}{24}$ （答）

t	0		5/4		5/2
$S'(t)$		＋	0	−	
$S(t)$		↗		↘	

図１

＜解説＞

⑴

２つの放物線が接しているということは，両放物線の2次関数を等しいとして得る2次方程式が重解をもつということに気づかねばならない。

⑵

図２のようなグラフを描いて，問題を理解する。2次関数が囲む領域の面積を求める問題は，頻出するので，扱ったことのある読者は多いだろう。解の一般的な表示α，β によって定積分を実行することが容易である。

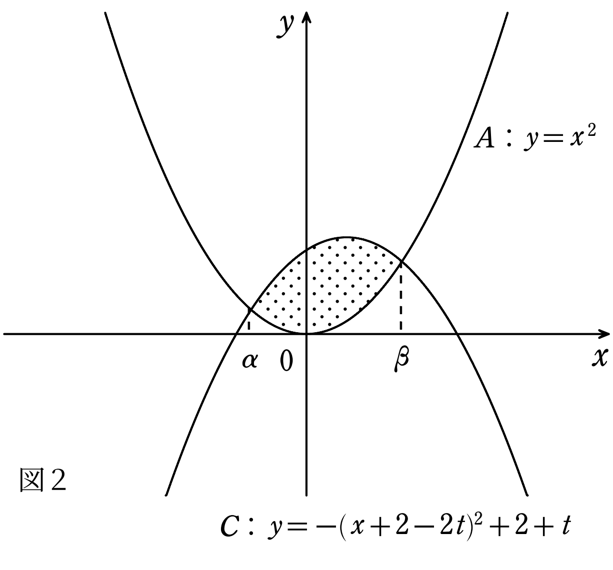


図２

第　4　問

以下の問いに答えよ。ただし，⑴ については，結論のみを書けばよい。

⑴ n を正の整数とし，3^n を10で割った余りをa_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を4 で割った余りをb_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\ \ x_{n+1}=3^{x_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$x_{10}=10$で割った余りを求めよ。

＜解答＞

(1)

$m=0,1,2,3,\cdots$ に対して，

$n=4m+1$ のとき$a_n=3$

$n=4m+2$ のとき$a_n=9$

$n=4m+3$ のとき$a_n=7$

$n=4(m+1)$ のとき$a_n=1$

(2)

$3^2=9=4\times2+1$，したがって $(3^2)^m=3^{2m}\equiv 1 \pmod 4$

$3^2\times3=(4\times2+1)\times3$，したがって $(3^2)^m\times3=3^{2m+1}\equiv 3 \pmod 4$

したがって $m=0,1,2,3,\cdots$ に対して，

$n=2m+1$（奇数）のとき$b_n=3$

$n=2(m+1)$（偶数） のとき$b_n=1$

(3)

$n\geqq2$ において，$x_n=3^{x_{n-1}}$ は奇数，(2)の結果により $x_{n+1}=3^{x_n}\equiv 3 \pmod 4$

したがって，$x_{n+1}=4m+3\quad (m=0,1,2,3,\cdots)$ であるから，$3^{x_{n+1}}=3^{4m+3}$となる。

すると(1)の結果から $3^{4m+3}\equiv 7 \pmod{10}$，したがって$x_{10}=3^{x_9}\equiv 7 \pmod{10}$　（答）

＜解説＞

(1)

10 で割った余りとは3^n の 1 の位の数字である。$n=1,2,3,\cdots$ に対して，簡単な計算により，それは $3,9,7,1,3,9,\cdots$ と4 を周期として繰り返すことがわかる。

(2)

$3^2=9=4\times2+1$ のように表される。

3 を乗じるごとに，4で割った余りが1，3 を繰り返すことがわかる。

合同式等の概念を忘れた場合の別の考え方を示す。

$b_n=3^n-4p_n$ と表される。 ただしp_n は0 以上の整数

b_n は $0,1,2,3$ のいずれかである。しかるに3^n は奇数，$4p_n$ は偶数だから，b_n は奇数で1または3

$b_{n+1}-b_n=3^n(3-1)-4(p_{n+1}-p_n)=2\cdot3^n-4(p_{n+1}-p_n)=$偶数$\fallingdotseq0$

したがってb_n は1と3 を交互に繰り返す。

したがって $m=0,1,2,3,\cdots$ に対して，

$n=2m+1$のとき$b_n=3$

$n=2(m+1)$のとき$b_n=1$

(3)

(1)，(2)の結果を利用する。(1)の結果は3^nを10で割った余りが4を周期として繰り返すことを示している。(2)では3^nを4で割った余りがnの奇数，偶数によって3，1を繰り返すことがわかった。そこで，3^{x_n}のx_nがどのように表されるかを考えてみる。

x_nは明らかに奇数である。すると，(2)の結果により，3^{x_n}を4で割った余りは3ということになる。すると，$x_{n+1}=3^{x_n}=4m+3$と表されることになる。$x_{n+1}=3^{x_n}$のように数列が構成されることがポイントである。このような思考の流れを考え出すためには，少々の着想が必要である。

＜総評＞

第１問

鋭角三角形であるための条件を明確にすること。難易度はＣ＋。

第２問

確率の問題。A が優勝する場合と過程を具体的に考える。(1)は難易度Ｃ＋。(2)，(3)は文系にとってやや難しい。難易度Ａ－。

第３問

2次関数の微分，積分の問題。２つの放物線が囲む領域の面積を求める。難易度は(1)はＣ，(2)はＢ，(3)はＣ。

第４問

整数の問題で，数学的な着想力が必要だ。難易度(1)，(2)はＢ－，(3)はＡ－。

160417