2017（H29)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）　200点満点，150分

$\boxed{1}$ (30点)

wを0でない複素数，x，yを$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$を満たす実数とする．

(1) 実数Rは$R>1$を満たす定数とする．wが絶対値Rの複素数全体を動くとき，
xy平面上の点(x,y)の軌跡を求めよ。

(2) 実数αは$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とする．wが偏角αの複素数全体を動くとき，
xy平面上の点(x,y)の軌跡を求めよ．

＜解答＞

(1)

$w=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$0\leqq\alpha<2\pi$　とおくことができる。

$$w+\frac{1}{w}=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{1}{R(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$
$$=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{R(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$
$$=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{R(\cos^2\alpha-i^2\sin^2\alpha)}=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{R(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}$$
$$=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\alpha+\left(R-\frac{1}{R}\right)(\sin\alpha)i=x+yi$$

したがって，$x=\left(R+\dfrac{1}{R}\right)\cos\alpha$，$y=\left(R-\dfrac{1}{R}\right)\sin\alpha$

$$\left(\frac{x}{R+\frac{1}{R}}\right)^2+\left(\frac{y}{R-\frac{1}{R}}\right)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

したがって，点(x,y)の軌跡は，楕円$\dfrac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$　（答）

(2)

$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=x+yi$とおく。

すると(1)と同様の計算から，$x=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha$，$y=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$

したがって，$\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}=2r$，$\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{r}$

したがって，$\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)=\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)^2=4$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に対し，$0<\cos\alpha<1$，$r+\dfrac{1}{r}=\left(\sqrt{r}-\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right)^2+2\geqq 2$ だから，$0<x=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に対し，$0<\sin\alpha<1$，したがって $\lim\limits_{r\to 0}y=-\infty$，$\lim\limits_{r\to\infty}y=\infty$ だから，y は全実数

点 (x, y) の軌跡は，双曲線 $\dfrac{x^2}{(2\cos\alpha)^2}-\dfrac{y^2}{(2\sin\alpha)^2}=1$ の $x>0$ の部分（答）

＜解説＞

(1)

数学Ⅲの教科書に記載の複素数の極形式表現 $w=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$0\leqq\alpha<2\pi$ を使えばよい。あってはならないことだが，うっかり忘れたときはどうするか。少し違う方法を紹介しよう。

$w=u+vi$ とする。ただし，u，v は実数である。

w が絶対値 R の複素数とすれば，$|w|=\sqrt{u^2+v^2}=R$

$$w+\frac{1}{w}=u+vi+\frac{1}{u+vi}=u+vi+\frac{u-vi}{(u+vi)(u-vi)}=u+vi+\frac{u-vi}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}u+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2}vi=x+yi$$

したがって，$x=\dfrac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2}u=\dfrac{R^2+1}{R^2}u$，$y=\dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2}v=\dfrac{R^2-1}{R^2}v$

したがって，$u=\dfrac{R^2}{R^2+1}x$，$v=\dfrac{R^2}{R^2-1}y$，$u^2+v^2=R^2$ だから，

点 (x, y) の軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$ （答）

(2)

(1)と基本的には同じ問題だが，r を消去して x，y の関係を求める。

$\boxed{2}$ (30点)

四面体 OABC を考える．点D，E，F，G，H，I は，それぞれ辺OA，AB，BC，CO，OB，AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば AE : EB = CF : FB であることを示せ．

(2) D，E，F，G，H，I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

＜解答＞

(1)

線分ACと線分DGが平行でないとする。すると，ACとDGは同じ平面上にあるのだから，両者の延長線は交わる。また，線分DGと平行な線分EFは線分ACとは平行でないから，線分EFと線分ACの延長線は交わる。

同じ直線と交わる同一平面上にない２つの直線は平行ではない。すなわち，DG $\nparallel$ EF

これはDG∥EFに矛盾する。これは，線分ACと線分DGが平行でないとした前提が誤りであることを意味する。

AC∥DGであれば，AC∥EFであるから，AE：EB＝CF：FBである。

したがって $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば，AC∥EFとなり，AE：EB＝CF：FBである

(2)

DG∥ACだから，AD：DO＝CG：GOである。DEFGHIは正八面体なので，
EF＝DGだから，AE：EB＝CF：FB＝AD：DO＝CG：GO　①

GH＝EIかつGH∥EIだから，(1)の考え方を適用すれば，
CG：GO＝BH：HO＝BE：EA＝CI：IA　②

①，②からAE：EB＝CG：GO＝BE：EA＝EB：AE，∴ AE：EB=1：1

したがって，①，②は1：1に等しい。

したがって，D，E，F，G，H，IはOABCの各辺の中点である。

2HE=2HD=2DEだから，OA=AB=BO，同様にOB=BC=CO，．．．となって，

三角形OAB，OBC，OAC，ABCは正三角形だから，OABCは正四面体である。

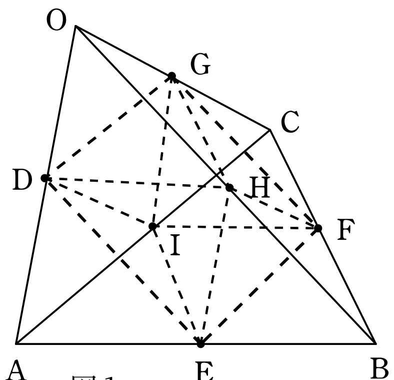

図１

＜解説＞

図１のような略図を描いて考える。ややこしそうだが四面体，正八面体の立体図形を頭に描こう。

(1)

図１から，何となくDG∥AC∥EFではないかと思う。

この命題AE：EB＝CF：FBはAC∥EFと等価だから，AC∥EFを証明する問題ととらえる。

この証明のために背理法を用いた。

別解を示そう。

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}=p\,\overrightarrow{AO}+q\,\overrightarrow{OC}=p\,\overrightarrow{AO}+q\,(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})=(p-q)\,\overrightarrow{AO}+q\,\overrightarrow{AC}=k_1\overrightarrow{AQ_1}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=r\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{BC}=r\,\overrightarrow{AB}+s\,(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(r-s)\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AC}=k_2\overrightarrow{AQ_2}$

ただし p, q, r, s は，$0 \leqq p$, q, r, $s \leqq 1$を満たす実数である。

また Q_1は直線 OC上の点，Q_2は直線 BC 上の点，k_1，k_2 は正の実数である。

したがって $\overrightarrow{DG} /\!/ \overrightarrow{EF}$ であれば $\overrightarrow{AQ_1} /\!/ \overrightarrow{AQ_2}$，したがって$Q_1$と$Q_2$は点C に一致する。

したがって DG//EF//AC

(2)

一見当たり前の結論を導く問題である。しかし，記号が錯綜するので，落ち着いて考えよう。まずは，正八面体の立体図形を描かねばならない。図１のような略図を描けば，正八面体を思い浮かべることができよう。正三角形８面からなる立体である。

$\boxed{3}$ (35点)

p，qを自然数，α，βを

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\ \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha+2\beta)=2$$

を満たすp，qの組$(p\,,\,q)$をすべて求めよ.

<解答>

正接の加法定理から,

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta},\ \tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{\frac{2}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}=\frac{2q}{q^2-1},\ \text{ただし}q\fallingdotseq 1,$$

なぜなら$q=1$とすれば，$\tan\beta=1$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p\fallingdotseq 2$

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}}{1-\frac{2q}{p(q^2-1)}}=\frac{(q^2-1)+2pq}{p(q^2-1)-2q}=2$$

整理すると，$(2p-1)q^2-(4+2p)q-(2p-1)=0$，したがって，$q^2-\frac{2p+4}{2p-1}q-1=0$ ①

2次方程式①の解をq_1，q_2とすれば，解と係数の関係から,

$q_1+q_2=\frac{2p+4}{2p-1}=1+\frac{5}{2p-1}$ ②，$q_1q_2=-1$ ③

②は$p=1$のとき最大値6だから，$q_1+q_2=\frac{2p+4}{2p-1}=1+\frac{5}{2p-1}\leqq 6$ ②'

q_1とq_2のうち少なくも１つは自然数だから，q_1を自然数として,

②'，③から，$(q_1\,,\,q_2)$は$\left(2\,,\,-\frac{1}{2}\right)$，$\left(3\,,\,-\frac{1}{3}\right)$，$\left(4\,,\,-\frac{1}{4}\right)$，$\left(5\,,\,-\frac{1}{5}\right)$，$\left(6\,,\,-\frac{1}{6}\right)$

これらに対応して $q_1+q_2=\dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{15}{4}, \dfrac{24}{5}, \dfrac{35}{6}$

このうち②を満たす自然数pが存在するのは，$p=2$ に対して，$q_1=3$

したがって，与えられた条件を満たす(p, q)は$(2, 3)$　（答）

＜解説＞

解答方針の着想は容易であろう。α，β によって与えられた条件をp，q による条件に変換して，条件を満たすp，q を求めるということである。

条件を満たすp，q を求める手法には，いろいろなものがあるだろう。上記では，もっとも単純と思われる手法を示したつもりである。結果，q に関する2次方程式が得られた。どのような自然数であれば解になり，そのときp はどのような自然数であるかを考える。この種の問題を考えるとき，解と係数の関係を用いると良い，ことを知っておこう。自然数の単純な関係が得られる場合が多い。

解と係数の関係を使わなくても容易に解ける。

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{2q}{q^2-1}}{1-\dfrac{2q}{p(q^2-1)}}=\frac{(q^2-1)+2pq}{p(q^2-1)-2q}=2, \quad \therefore\ p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$$

$p=1$のとき

$q^2-6q-1=0$，これを満たす自然数解はない。したがって，$p\fallingdotseq 1$

$p\geqq 2$のとき

$$\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 2, \quad \therefore\ q^2-\frac{8}{3}q-1\leqq 0, \quad \therefore\left(q+\frac{1}{3}\right)(q-3)\leqq 0, \quad \therefore\ 1\leqq q\leqq 3$$

自然数 $q=1, 2, 3$ に対応して，自然数p の存在を調べると，$q=3$のとき$p=2$

$\boxed{4}$　(35点)

△ABC は鋭角三角形であり，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$であるとする．また△ABC の外接円の半径は1であるとする．

(1) △ABCの内心をPとするとき，∠BPCを求めよ．

(2) △ABCの内接円の半径rの取りうる値の範囲を求めよ．

＜解答＞

(1)

$$\angle\mathrm{BPC}=\pi-(\angle\mathrm{PBC}+\angle\mathrm{PCB})=\pi-\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})=\pi-\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})$$

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\therefore\ \angle\mathrm{BPC}=\dfrac{2}{3}\pi$　（答）

(2)

図１，図２を参照する。

$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$ ということは，外接円の円周角が $\dfrac{\pi}{3}$ となる弧 BC 上に A があるということである。

$\angle BPC = \dfrac{2}{3}\pi$ ということは，三角形 BPC の外接円の円周角が $\dfrac{2}{3}\pi$となる弧 BC 上に P があるということである。

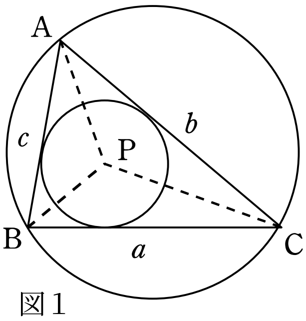

図１

図２で，頂点A が実線の円弧上をA1 からA2 へ動くに従い，内心P は破線の円弧上をP1 からP2 へ と動く。内心P が移動する円弧は頂点A が移動する円弧と弦BC を共有し，円周角が2倍の$\dfrac{2}{3}\pi$ だから，△ABC の外接円の中心を通り，中心間隔が半径１に等しい円の弧である。

内接円の半径 r は内心P と辺 BC との距離だから $r = \cos\theta - \dfrac{1}{2}$

内接円の半径はP がP_1 にあるときが最も大きく，P が破線の円弧上を左右に移動するにつれ，小さくなる。△ABC は鋭角三角形だから，$\dfrac{\pi}{6} < \angle B$，$\angle C < \dfrac{\pi}{2}$，したがって $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$

したがって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leqq 1$，$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < r = \cos\theta - \dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$　（答）

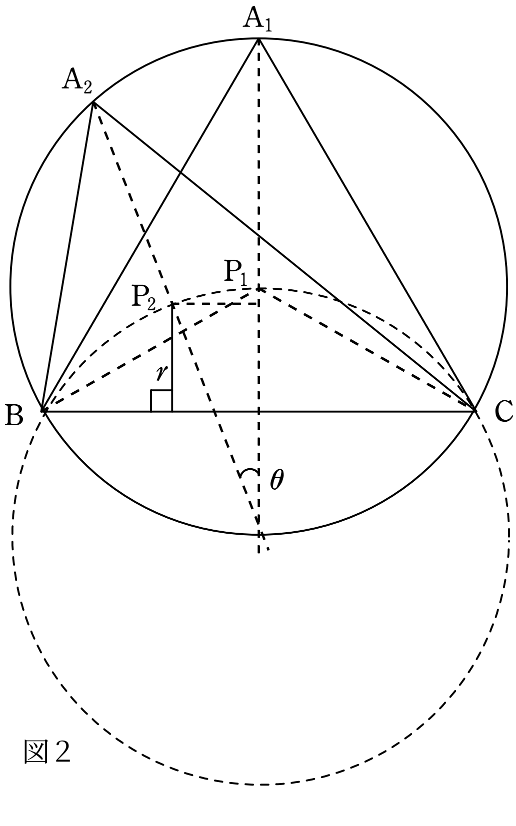

図２

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて，考えれば容易だろう。

(2)

解答方針を着想しなければならない。こういう場合は，(1)の結果がヒントになっていると推測し，その活用を考える。(1)の結果は，頂点Aが$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$を満足するように動いたとき，$\angle \mathrm{BPC}=\dfrac{2}{3}\pi$となるように内心Pが動くということである。２つの角は辺BCを共有するから，Aは円周角$\dfrac{\pi}{3}$の円弧BC上を動き，Pは円周角$\dfrac{2\pi}{3}$の円弧BC上を動くことに気づく。

すると，図２のような図を描くことができ，内接円の半径rの簡単な表式を求めることができる。rが点Pと辺BCとの距離であることに気づくことも必要である。

以上のような解答方針を着想できない場合はどうするか。別解を紹介する。(1)のような誘導問題がない場合，以下のような考え方をすることになるだろう。(1)の誘導がある場合には良い方法ではない。

∠A，∠B，∠Cの大きさをA，B，C，それぞれの対辺をa，b，cとする。

正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$

$A=\dfrac{\pi}{3}$から，$a=\sqrt{3}$，△ABCの面積$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$

内接円の半径によって△ABCの面積を表現すると $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}r(\sqrt{3}+b+c)$,

$\therefore\ r=\dfrac{2S}{\sqrt{3}+b+c}=\dfrac{bc\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+b+c)}$

余弦の定理により，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，したがって $3=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,

$\therefore\ bc=\dfrac{1}{3}\{(b+c)^2-3\}$

$$r=\frac{bc\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+b+c)}=\frac{(b+c)^2-3}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+b+c)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(b+c-\sqrt{3})$$

$b+c=2(\sin B+\sin C)$，$\sin C=\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-B\right)$

$$\begin{aligned}\sin B+\sin C&=\sin B+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-B\right)\\&=\sin B+\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cos B-\sin B\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\\&=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

△ABCは鋭角三角形だから，$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，したがって$\dfrac{3}{2}<\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\sqrt{3}$

$3<b+c=2(\sin B+\sin C)\leqq 2\sqrt{3}$だから，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\dfrac{1}{2}$　（答）

$\boxed{5}$ (35点)

$a \geqq 0$とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$の範囲で曲線$y=xe^{-x}$，直線$y=ax$，直線$x=\sqrt{2}$によって囲まれた部分の面積を$S(a)$とする．このとき，$S(a)$の最小値を求めよ．

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち２つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．）

＜解答＞

$y=xe^{-x}$ ①，　$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$y=ax$ ②，$x=\sqrt{2}$ ③

①，② の交点は，$xe^{-x}=ax$，$\therefore\ x(e^{-x}-a)=0$，$\therefore\ x=0$，$-\log_e a$

a の値によって，①，②，③ によって囲まれた部分は異なる。

①，②，③が１点で交わる a は $a=e^{-\sqrt{2}}$

図１に①，②，③ のグラフを示す。この図からわかるように，a が$e^{-\sqrt{2}}$ に向かって大きくなるにしたがい，①，②，③ によって囲まれた部分は小さくなる。

さらにa が増大し$a=1$ になると，② は ① に$x=0$ で接し，その後はS は単調に増大する。

したがって$S(a)$の最小値を与える a を $e^{-\sqrt{2}} \leqq a < 1$ において考えればよい。

①と② の 交点のx 座標を $p=-\log_e a$，$a=e^{-p}$として

$$S(a)=\int_0^p (xe^{-x}-ax)dx+\int_p^{\sqrt{2}} (ax-xe^{-x})dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^p+\left[xe^{-x}+e^{-x}+\frac{a}{2}x^2\right]_p^{\sqrt{2}}$$

$$=-2pe^{-p}-2e^{-p}-ap^2+1+\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{2}}+a$$

$$=-2ap-a-ap^2+1+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}=-a(p+1)^2+1+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

$S'(a)=1-p^2=(1+\log_e a)(1-\log_e a)$，$S'(a)=0$とすれば$a=e^{-1}$，$S(a)$は図２のように変化する。

したがって$a=e^{-1}$ のとき $p=1$で，S は最小値 $S(a=e^{-1})=-4e^{-1}+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}+1$ （答）

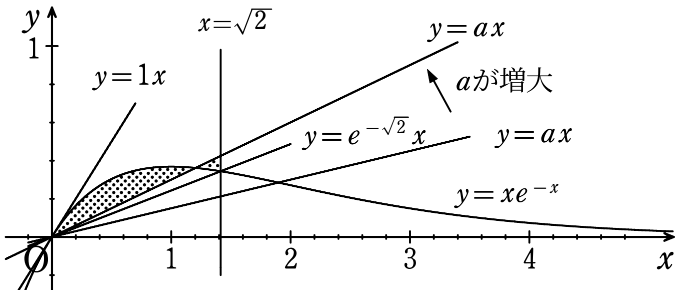

図１

a	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

図２

<解説>

指数関数の微分，積分を含む問題。解答方針に特段の着想を必要とするものではないので，扱い易いであろう。図１のような略図を描いて，題意を的確に把握するようにする（ここでは，グラフ作成ツールによって描いたので，正確な図になっている。日頃から，数学の問題ではグラフや図形を手書きで描くことを心がけておきたい。その場合，当然，略図になるが，グラフの極値の位置，他のグラフとの交点の位置，グラフの凹凸などの特徴はできるだけ正確にしたい）。

図１から，３つのグラフが１点で交わるようなaの値によって，Sの求め方が変わることがわかるであろう。また，aの値が十分大きくなると，①と②が$x=0$以外では交わらなくなり，Sが単調に増大することもわかるだろう。すると，考えるaの値の範囲が限定されるので，扱いが容易になる。

積分計算では，不定積分$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+Const.$を用いた。

$\boxed{6}$ (35点)

nを自然数とする．n個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$の５種類のカードがそれぞれ１枚ずつ計５枚入っている．各々の箱から１枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べてn桁の数Xを作る．このとき，Xが3で割り切れる確率を求めよ．

<解答>

i番目の箱から取り出したカードの数をa_iとする。XをX_nで表し，$X_n=a_1a_2...a_{n-1}a_n$とする。

$Y_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$とすれば，X_nが3で割り切れることと，Y_nが3で割り切れることは同値。

$n\geqq 2$，mを自然数として，Y_nは$3m-1$，$3m$，$3m+1$のいずれかによって表される。

Y_nが$3m-1$，$3m$，$3m+1$のいずれかになる確率をP_n，Q_n，R_nとする。

pを5種類のカードのいずれか取り出す確率とし，それらはすべて等しいので$p=\dfrac{1}{5}$である。

$$Q_n=P_{n-1}\{p(a_n=1)+p(a_n=4)\}+Q_{n-1}p(a_n=3)+R_{n-1}\{p(a_n=2)+p(a_n=5)\}$$

$$=\frac{1}{5}(2P_{n-1}+Q_{n-1}+2R_{n-1})=\frac{1}{5}(2-Q_{n-1})\quad ①$$

ここで$P_{n-1}+Q_{n-1}+R_{n-1}=1$であることを用いた。

①を変形すると，$Q_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{5}\left(Q_{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$,

$$\therefore\ Q_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(Q_1-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\frac{2}{3}$$

$n=1$のとき，$Q_1=-\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$となって，$a_1=3$となる確率だから，正しい。

したがって，$Q_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n}$ （答）

<解説>

確率の問題は個別に解答方針の着想が必要になるので，どうしても時間がかかる。この問題も，頭を捻って方針を考える。だが，自然数は必ず(3の倍数−1)，(3の倍数)，(3の倍数+1)の3 種類からなっており，したがって，ある範囲で連続する自然数の中には，ほぼ同じ割合，すなわちほぼ$\dfrac{1}{3}$の確率で3 の倍数が含まれているはずである。などということから考えると，容易に方針に辿りつくかも知れない。

まず解答方針を着想しなければならない。$(n-1)$ 桁の数 $X_{n-1}=a_1a_2...a_{n-2}a_{n-1}$ は上記のように，(3 の倍数−1)，(3 の倍数)，(3 の倍数+1) のいずれかである。

$X_n=a_1a_2...a_{n-1}a_n=10X_{n-1}+a_n$は

$10\times$(3の倍数-1)$+a_n=10\times$3の倍数$-10+a_n=10\times$3の倍数$-9-1+a_n=$(3の倍数-1)$+a_n$

$10\times$(3の倍数)$+a_n=10\times$3の倍数$+a_n=$(3の倍数)$+a_n$

$10\times$(3の倍数$+1$)$+a_n=10\times$3の倍数$+10+a_n=10\times$3の倍数$+9+1+a_n=$(3の倍数$+1$)$+a_n$

したがって，X_nが3 の倍数になるのは,

$X_{n-1}=$(3の倍数-1) のときに，(3 の倍数-1)$+a_n$が3 の倍数，すなわち$a_n=1$，4

$X_{n-1}=$(3の倍数) のときに，(3 の倍数)$+a_n$が3 の倍数，すなわち$a_n=3$

$X_{n-1}=$(3の倍数$+1$) のときに，(3 の倍数$+1$)$+a_n$が3 の倍数，すなわち$a_n=2$，5

したがって，X_{n-1}が$3m-1$，$3m$，$3m+1$のいずれかになる確率をP_{n-1}，Q_{n-1}，R_{n-1}とすれば，$Q_n=P_{n-1}\{p(a_n=1)+p(a_n=4)\}+Q_{n-1}p(a_n=3)+R_{n-1}\{p(a_n=2)+p(a_n=5)\}$なる確率漸化式が得られる。

上記のような10倍した後の数がどうなるかの説明を省くために,

<解答>では，X_nが3で割り切れることと，Y_nが3 で割り切れることは同値，として説明した。

この同値であることを説明する。

$$
\begin{aligned}
X_n=a_1a_2...a_{n-1}a_n&=a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+...+a_{n-1}10^1+a_n 10^0=\\
&=a_1(10^{n-1}-1)+a_2(10^{n-2}-1)+...+a_{n-1}(10^1-1)+(a_1+a_2...+a_{n-1}+a_n)\\
&=(3\text{ の倍数})+(a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n)=(3\text{ の倍数})+Y_n
\end{aligned}
$$

$(10^{n-1}-1),(10^{n-2}-1),...,(10^1-1)$は9 の倍数，すなわち3 の倍数である。

したがって，X_nが(3 の倍数)であればY_nは(3 の倍数)，逆にY_nが(3 の倍数)であればX_nは(3 の倍数)である。したがって，X_nが3で割り切れることと，Y_nが3 で割り切れることは同値である。

<理系総評>

京大の数学といえば，難問揃いという印象もあるが，今年に関しては，難問！と感じられた問題はなかった。

$\boxed{1}$

複素数空間の問題で，題意は簡明で解答方針に紛れがないので，扱いやすい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

正四面体に関連した問題は頻出する。当たり前とも思われる命題の証明だから，解答方針と論理の着想が必要で，時間がかかりそうだ。ポイントはEF∥ACを導くことで，これにはいろいろな方法が

ある。難易度はB。

$\boxed{3}$

着想の必要な整数問題かと思うと，そうでもない。問題を一読して，比較的容易な問題かどうかを見抜く力も受験数学においては重要である。p，q に関する条件式から，自然数p，q を求めることに，難しさはない。三角関数の加法定理，倍角の公式を速やかに使えることが必要だ。難易度はB。

$\boxed{4}$

三角形の外心，内心，三角関数，円周角，等々の図形の基礎的な知識に基づく問題で，解答方針にも着想が必要な良問と思う。誘導問題 (1) が設定されているので，難易度は緩和されたが，これがなければ，やや難しいだろう。難易度B＋。

$\boxed{5}$

指数関数の微分，積分と極値が関わる問題。題意は簡明だから，解答方針に迷うことはないだろう。aの値によって，３つのグラフの関係と求める面積の対象図形が異なるので，aの値の範囲を上手に限定することがポイントである。難易度B。

$\boxed{6}$

確率の問題なので解答方針の着想が必要だが，素直に考えれば，容易に思いつきそうである。確率漸化式を得るのだが，例年に比べると容易である。難易度B。

171008

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$

(30点)

曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする．直線 l は C の接線であり，点$\mathrm{P}(3\,,\,0)$を通るものとする．また，l の傾きは負であるとする．このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

<解答>

C と l の接点を$\mathrm{Q}\,(a\,,\,b)$とする。$y=x^3-4x+1$の導関数は $y'=3x^2-4$，$y'=0$とすれば $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

したがって点Q における接線 l の傾きは $3a^2-4$で，

直線 l の方程式は $y=(3a^2-4)(x-a)+b=(3a^2-4)(x-a)+a^3-4a+1$　①

直線 l が点 $\mathrm{P}(3\,,\,0)$ を通ることから，$0=(3a^2-4)(3-a)+a^3-4a+1$

$(3a^2-4)(3-a)+a^3-4a+1=(a+1)(2a^2-11a+11)=0$　②

②の解は$a=-1$，$\dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$　③

接線 l の傾きは負だから，$3a^2-4<0$，$\therefore\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　④

③の a で④を満足するのは，$a=-1$，l の式は$y=-x+3$

C：$y=x^3-4x+1$とl：$y=-x+3$ を連立すると$(x+1)^2(x-2)=0$

yは図１のように変化するから，C，lのグラフは図２のようになる。

したがって $S=\int_{-1}^{2}\{-(x-3)-(x^3-4x+1)\}dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$　（答）

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		∞
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	∞

図１

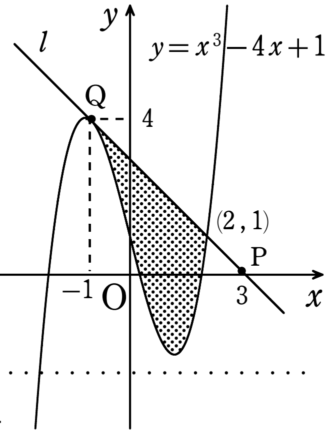

図２

＜解説＞

与えられた条件から，接点の条件を満たす座標を求める。接線を求め，Cとlのおよそのグラフを描いて，計算対象の図形を明らかにする。面積を求める積分は難しくはない。

$\boxed{2}$　（30点）

次の問に答えよ．ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$であることは用いてよい．

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

(2) 100 桁の自然数で，2 と5 以外の素因数を持たないものの個数を求めよ．

＜解答＞

(1)

100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たない数 m は

$m=2^p<10^{100}$　①　と表される。$2^0=1$ もm に含み，p は非負の整数

したがって，（p の最大値＋1）が2 以外の素因数を持たない自然数の個数となる。

①の常用対数をとると，$p\log_{10}2<100$，$\therefore\ p<\frac{100}{\log_{10}2}$　②

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$であるから，$\frac{100}{0.3011}<\frac{100}{\log_{10}2}<\frac{100}{0.3010}$

$332.1<\frac{100}{0.3011}$，$\frac{100}{0.3010}<332.3$であるから，$332.11<\frac{100}{\log_{10}2}<332.23$

したがって，②は $p\leqq 332<\frac{100}{\log_{10}2}<333$ となり，p の最大値は 332

したがって100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数を持たないものの個数は 332＋1＝ 333 個（答）

(2)

100 桁の自然数で，2と5 以外の素因数を持たない数 n は

$10^{99}\leqq n=2^p5^q<10^{100}$　③　と表される。

p，q は 非負の整数であるが，同時に0 にはならない。$(p,q)\neq(0,0)$

$p \geqq q$ の場合は，$2^p 5^q = 2^{p-q}(2{\cdot}5)^q = 2^{p-q}10^q$ と表現される。

③は，$10^{99-q} \leqq 2^{p-q} < 10^{100-q}$，$q = 0, 1, 2, ..., 99$ だから，$2^{p-q}10^q$ と表現される n の数は $2^p < 10^{100}$ と表される m の数，すなわち(1)と同じ333 個

$p \leqq q$ の場合は，$2^p 5^q = 5^{q-p}(2{\cdot}5)^p = 5^{q-p}10^p$ と表現される。

③は，$10^{99-p} \leqq 5^{q-p} < 10^{100-p}$，$p=0, 1, 2, ..., 99$ だから，$5^{q-p}10^p$ と表現される n の数は $5^q < 10^{100}$ と表される5 以外の素因数を持たない数 m' の数である。

(1)と同様の考え方で m' の数を求める。

$m' = 5^q < 10^{100}$，両辺の常用対数をとると，$q\log_{10}5 < 100$，$\therefore q < \dfrac{100}{\log_{10}5}$

$\log_{10}5 = \log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right) = 1 - \log_{10}2$，$\therefore 0.6989 < \log_{10}5 < 0.6990$

$143.06 < \dfrac{100}{\log_{10}5} < 143.08$，したがって $q \leqq 143 < \dfrac{100}{\log_{10}5} < 144$，$\therefore q$ の最大値は 143

したがって，m' の数は 144 個

以上から100 桁の自然数で，2と5 以外の素因数を持たない数 n は，$(p, q)=(0, 0)$ の 場合を除き，$333+144-1=476$ 個　(答)

＜解説＞

(1)

求める数が（ $m = 2^p < 10^{100}$ と表される自然数 ）の数であることを示すことが出発点である。

(2)

求める数が（ $10^{99} \leqq n = 2^p 5^q < 10^{100}$ と表される自然数 ）の数であることを示すことが出発点である。次に，$2^p 5^q = 2^{p-q}(2{\cdot}5)^q = 2^{p-q}10^q$ と表現して，$q = 0, 1, 2, ..., 99$ まで変化したとき，$2^{p-q}10^q$ と表現される自然数の数は(1)と同じであることを着想することがポイントとなる。私には，この着想はなかなか難しかったが，読者はどう思われただろう。

ここで指摘しておきたいのが，「100桁の自然数 . . . 」という問題文を「100桁以下の自然数 . . . 」と読み間違えないということである。(1)の流れで「100桁以下の自然数 . . . 」が頭に残っていて，間違えてしまうと，難問に頭をかかえてしまう。実は，私がそうだった。難しすぎるな，と思ったら問題文を読み返し，誤読誤解がないかをチェックすることが大事だ。

$\boxed{3}$ (30点)

座標空間において原点Oと点A $(0, -1, 1)$を通る直線をl とし，点B $(0, 2, 1)$と点C $(-2, 2, -3)$を通る直線をm とする．l 上の2点P，Q と，m 上の点R を△PQR が正三角形になるようにとる．このとき，△PQR の面積が最小となるようなP，Q，R の座標を求めよ．

＜解答＞

$l : \overrightarrow{OA} = (0, -1, 1)$ だから，$\overrightarrow{OP} = p\,\overrightarrow{OA} = (0, -p, p)$，$\overrightarrow{OQ} = q\,\overrightarrow{OA} = (0, -q, q)$ とおく。

m 上の点 R を $\overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OC}=t\,(0,2,1)+(1-t)\,(-2,2,-3)=(2t-2,2,4t-3)$とおく。

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(0,-q+p,q-p)$，$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(2t-2,2+p,4t-3-p)$

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=(2t-2,2+q,4t-3-q)$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=2(p-q)^2$ ①

$|\overrightarrow{PR}|^2=(2t-2)^2+(2+p)^2+(4t-3-p)^2$ ②

$|\overrightarrow{QR}|^2=(2t-2)^2+(2+q)^2+(4t-3-q)^2$ ③

△PQR は正三角形だから，①，②，③は等しい。②，③を等しいとして，$p+q=4t-5$

①，②を等しいとして，

$2(p-q)^2=(2t-2)^2+(2+p)^2+(4t-3-p)^2=(2t-2)^2+(2+p)^2+(2+q)^2$，$\therefore 2pq=4t^2-16t+11$

$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(4t-5)^2-2(4t^2-16t+11)=8t^2-8t+3$

$=8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$，したがって $(p-q)^2$ は $t=\frac{1}{2}$ のとき最小となる。

$2(p-q)^2=|\overrightarrow{PQ}|^2$だから，正三角形の辺長が最小なので，面積も最小である。

$t=\frac{1}{2}$のとき，$p+q=4t-5=-3$，$p-q=\pm1$

したがって $p=-1$，$q=-2$ または $p=-2$，$q=-1$

したがって点P は $(0,-p,p)=(0,1,-1)$，点Q は $(0,-q,q)=(0,2,-2)$ （答）

ただし，P，Q は逆でもよい。

$\overrightarrow{OR}=(2t-2,2,4t-3)=(-1,2,-1)$，$\therefore$ 点R は $(-1,2,-1)$ （答）

＜解説＞

空間図形の問題。ベクトルによって扱うと判断すること。m 上の点 R を $\overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OC}$ のように表現して扱えることは，教科書に掲載されている。正三角形の面積が最小ということは，辺長が最小ということと同値である。

最小面積を求める問題ではないので，辺長が最小になる条件を求めることでよい。その方が扱いが易しくなると思う。やや計算が煩瑣なので，ミスをしないこと。

$\boxed{4}$ (30点)

p，q を自然数，α，β を

$$\tan\alpha=\frac{1}{p},\ \tan\beta=\frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 次の条件

(A) $\tan(\alpha+2\beta)=2$

を満たすp，q の組 (p,q) のうち，$q\leqq3$ であるものすべて求めよ．

(2) 条件 (A) を満たすp，q の組 (p,q) で $q>3$ であるものは存在しないことを示せ．

<解答>

(1)

正接の加法定理から,

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{2q}{q^2-1}}{1-\dfrac{2q}{p(q^2-1)}}=\frac{(q^2-1)+2pq}{p(q^2-1)-2q}=2 \quad ①$$

$q=1$ のとき $\tan\beta=1$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p\fallingdotseq 2$となるので矛盾。

$q=2$ のとき ① から $2p=11$ となって，自然数pが存在しない。$\therefore q\fallingdotseq 2$

$q=3$ のとき ① から $10p=20$ となって，$p=2$， $\therefore q\leqq 3$ なる (p, q) は $(2, 3)$ （答）

(2)

$q>3$であれば，$\tan\beta=\frac{1}{q}<\frac{1}{3}$，$\tan 2\beta=\frac{2q}{q^2-1}<\frac{3}{4}$

$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=2$ から,

$\frac{1}{p}=\tan\alpha=\frac{2-\tan 2\beta}{1+2\tan 2\beta}>\frac{2-3/4}{1+6/4}=\frac{1}{2}$，$\therefore p<2$，$\therefore p=1$

$p=1$のとき，① から $q^2-6q-1=0$，$q=3\pm\sqrt{10}$ となって， q は自然数にならない。

したがって， 条件(A)を満たすp，q の組 (p, q) で$q>3$であるものは存在しない。

<解説>

$q\leqq 3$ だから，$q=1$，2，3 として，p がどうなるか調べることが速い。

理系の $\boxed{3}$ とほぼ同じ問題。その解答，解説も参考にする。

$\boxed{5}$ (30点)

n を2 以上の自然数とする．さいころをn 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ をX とする．

(1) $X=1$ である確率を求めよ．

(2) $X=5$ である確率を求めよ．

<解答>

(1)

$X=1$ということは連続する 2 つの数の目しか出ないということである。

あり得る目の組み合わせ (M, L)：(2, 1)，(3, 2)，(4, 3)，(5, 4)，(6, 5) の 5 組である。

n 回の試行で上記 1 組の目のみが出る事象の数は，$\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k-{}_nC_0-{}_nC_n=2^n-1-1=2^n-2$

n 回の試行で出る目の事象の数は 6^n，したがって$X=1$である確率は $\frac{5(2^n-2)}{6^n}$ （答）

(2)

$X=5$ となる目の組み合わせは $(M, L):(6, 1)$ の１組である。

n 回の試行で6 の目が1 回以上，1 の目が1 回以上出るような事象V において $X=5$ となる。

これは，6 の目と1の目が共に出ることがない事象V_C の余事象である。

すなわち，V の発生確率を$P(V)$ とすれば，$P(V)=1-P(V_C)$

6 の目が出ることがない事象をU_6，1 の目が出ることがない事象をU_1 とすれば,

$V_C=U_6\cup U_1-U_6\cap U_1$

U_6の事象の数＝（1 , 2 , 3 , 4 , 5 の目だけが出る事象の数）$=5^n$

U_1の事象の数＝（2 , 3 , 4 , 5 , 6 の目だけが出る事象の数）$=5^n$

$U_6\cap U_1$の事象の数＝（2 , 3 , 4 , 5 の目だけが出る事象の数）$=4^n$

したがって，V_Cの事象の数 $=5^n+5^n-4^n$

$P(V_C)=\dfrac{2\cdot 5^n-4^n}{6^n}$，$P(V)=1-P(V_C)=1-2\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　（答）

<解説>

(1)

$X=1$ということは連続する２つの数の目しか出ないこと，に気づくこと。３つの数の目が出れば，決して $M-L=1$ にはならない。

$(2, 1)$の目だけが出る事象の数は，2 の目が $1, 2, ..., n-2$，$n-1$ 回出て，1 の目が $n-1, n-2, ..., 2$，1 回出る場合の数だから，2 と1 の目の組合せの数 $\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k$ となる。

二項定理から，$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(1)^k(1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k$によって，$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k=2^n$

(2)

$X=5$ となる目の組み合わせは $(M, L):(6, 1)$ の１組である。したがってn 回の目が出る試行において，6 の目が1 回以上，1 の目が1 回以上出る事象が$X=5$となる事象であることに気づくこと。

そして，この事象は6 の目と1の目が共に出ることがない事象の余事象であることを利用すると，事象の数を計算しやすくなることに気づくことが重要だ。図１のような関係となる。

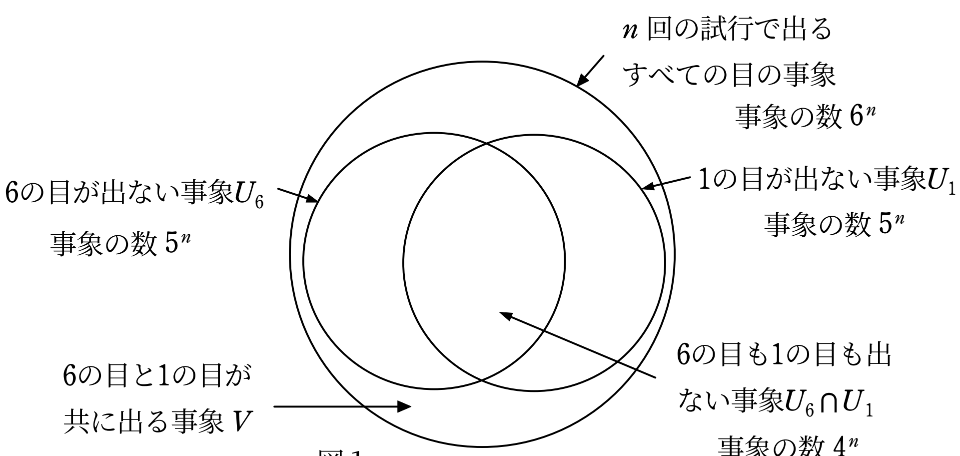

図１

＜文系総評＞

例年通り問題数５問で120 分150点満点の数学入試である。文系の問題としては骨の折れる問題が揃っている。$\boxed{2}$，$\boxed{5}$，$\boxed{3}$ などは理系の問題としても十分な歯ごたえがある。

$\boxed{1}$

3 次関数のグラフの接線と面積の問題。微分，積分の標準的な問題で，難易度Ｂ。

$\boxed{2}$

(1)は解答方針の着想は容易だろう。(2)は(1)の活用が必要で，着想が難しい。文系の問題としては難しく，正答率は低いのではないか。難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

空間図形の問題をベクトルによって扱う。P，Q，R の3 点を原点からのベクトルによって表現する。解答方針にやや着想が必要で難易度はＢ＋。

$\boxed{4}$

理系の $\boxed{3}$ とほぼ同じ問題を，少々解答し易く変えている。三角関数の加法定理等をきちんと使えること。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

集合や確率の基礎的な問題なのだが，文系の問題としてはそれぞれの事象（場合）の記述，その数，それらの関係を具体化するのが難しいと思う。正答率はどのくらいなのか，京大に入学する文系学生の数学的，論理的思考力を推察する上で，知りたいところだ。文系の問題としては難易度A。

171005