2017（H29）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$　式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1) $(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2) $(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3) 次の条件 $(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

＜解答＞

(1)

x^2y^3 は$1^1x^2y^3$だから，$(1+x+y)$の中の 1を1個，xを2 個，y を3 個選択する場合の数が x^2y^3 の項の係数，したがって，${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=6\times10\times1=60$　（答）

(2)

x^5y^3 は$1^3x^2(xy)^3$だから，$(1+x+xy)$の中の1を3個，xを2 個，xy を3 個選択する場合の数が x^5y^3の項の係数，したがって${}_8C_3\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3=56\times10\times1=560$　（答）

(3)

$(1+x+xy+xy^2)^{10}=\{1+(1+y+y^2)x\}^{10}$ において，x^8y^{13} の項は $1^2\{(1+y+y^2)x\}^8$ の項に含まれる。この項の係数は,

$\{1+(1+y+y^2)x\}$ の中の1を2 個，$\{(1+y+y^2)x\}$ を8 個選択する場合の数だから，${}_{10}C_2\cdot{}_8C_8=45$

$y^{13}=1^1y^1(y^2)^6=1^0y^3(y^2)^5$ だから，$\{(1+y+y^2)x\}^8=(1+y+y^2)^8x^8$ において，

$1^1y^1(y^2)^6$ の項の係数は1を1 個，yを1 個，y^2を2 個選択する場合の数 ${}_8C_1\cdot{}_7C_1\cdot{}_6C_6=8\times7\times1=56$

$1^0y^3(y^2)^5$ の項の係数はy を3 個，y^2を5 個選択する場合の数 ${}_8C_3\cdot{}_5C_5=56\times1=56$

したがって，x^8y^{13} の項の係数は 45 (56+56) ＝5040　（答）

＜解説＞

簡単そうな問題だが，限られた時間では，多項式のべき乗の展開の考え方を的確に理解していないと難しい。これは数学Ⅱに二項定理，あるいは研究 $(a+b+c)^n$ の展開，として記載されている。

$(a+b+c)^n$ を展開すると，$Q_{ijk}a^ib^jc^k$ のように表される項の和となる。

ここで，$0\leqq i,\ j,\ k\leqq n$，$i+j+k=n$，Q_{ijk}は係数である。

$a^ib^jc^k$ の意味するところは，$(a+b+c)^n=(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)$ において，a をi 個，b をj 個，c をk 個選択してかけ合せるということである。Q_{ijk} はそのような選択の場合の数を示すことになる。

(1)では $x^2y^3=1^1x^2y^3$として，べき数の和 1+2+3=6 になるように，$(1+x+y)$の中の項1 , x , y を選択する個数を定めて考える。

(2)では $x^5y^3=1^3x^2(xy)^3$として，べき数の和 3+2+3=8 になるように，$(1+x+xy)$ の中の項 1 , x , xy を選択する個数を定めて考える。

(3)では，x^8y^{13}を$(1+x+xy+xy^2)$の中の項1，x，xy，xy^2のべき乗の積として，項の個数を一意に定めることができないので，一工夫が必要だ。$(1+x+xy+xy^2)^{10}=\{1+(1+y+y^2)x\}^{10}$ とすれば，1の項を2個，$(1+y+y^2)x$ の項を8個選択することがわかる。次に $(1+y+y^2)^8$ においてy^{13} の項を1，y，y^2のべき乗の積として表現する方法を考える。それには，$y^{13}=1^1y^1(y^2)^6=1^0y^3(y^2)^5$ の2つの方法があることがわかる。

次に別解とまではいかないが，二項定理$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i a^i b^{j=n-i}$ や

$(a+b+c)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i\left(\sum_{j=0}^{n-i}{}_{n-i}C_j a^i b^j c^{k=n-i-j}\right)$ の展開式を用いる方法を示す。

(1)

$(1+x+y)^6=\sum_{i=0}^{6}{}_6C_i\left(\sum_{j=0}^{6-i}{}_{6-i}C_j 1^i x^j y^{k=6-i-j}\right)$

$x^2y^3=1^1x^2y^3$だから，x^2y^3 を含む項は$i=1$，$j=2$，$k=3$，${}_6C_3\cdot{}_3C_2=20\times3=60$

したがって，$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は 60　（答）

(2)

$(1+x+xy)^8=\sum_{i=0}^{8}{}_6C_i\left(\sum_{j=0}^{6-i}{}_{6-i}C_j 1^i x^j (xy)^{k=6-i-j}\right)$

$x^5y^3=1^3x^2(xy)^3$だから，x^5y^3 を含む項は$i=3$，$j=2$，$k=3$，${}_8C_3\cdot{}_5C_2=56\times10=560$　（答）

(3)

$(1+x+xy+xy^2)^{10}=\{1+(1+y+y^2)x\}^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k 1^{10-k}(1+y+y^2)^k x^k$

この中でx^8 を含む項は，$k=8$ のときで，${}_{10}C_8(1+y+y^2)^8x^8$　②

$(1+y+y^2)^8=\{1+y(1+y)\}^8=\sum_{k=0}^{8}{}_8C_k 1^{8-k}(1+y)^k y^k$，この中で$y^{13}$を含む項は，$k=7, 8$のとき

${}_8C_7(1+y)^7y^7={}_8C_7\{\sum_{k=0}^{7}{}_7C_k 1^{7-k}y^k\}y^7$，この中で$y^{13}$を含む項は，${}_8C_7\cdot{}_7C_6\,y^6y^7=8\times7y^{13}$　③

${}_8C_8(1+y)^8y^8=\{\sum_{k=0}^{8}{}_8C_k 1^{8-k}y^k\}y^8$，この中で$y^{13}$を含む項は，${}_8C_5\,y^5y^8=56y^{13}$　④

したがって，x^8y^{13} の項の係数は，②，③，④から${}_{10}C_8(56+56)=45\times112=5040$　（答）

$\boxed{2}$　座標空間内の次のような4点A，B，C，Dを考える。Aの座標は$(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$，3点B，C，Dはそれぞれ$x$軸，$y$軸，$z$軸上にある。さらに，これらの4点は同一平面上にあり，四角形ABCDは平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3点B，C，Dの座標を求めよ。

(2) 平行四辺形ABCDの面積を求めよ。

(3) 原点Oから平行四辺形ABCDを含む平面に垂線OHを下ろす。点Hの座標を求めよ。

<解答>

(1)

点B，C，Dの座標を をそれぞれ，$(b, 0, 0)$，$(0, c, 0)$，$(0, 0, d)$とする。

四角形ABCDは平行四辺形なので，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore (b-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})=(0, c, -d)$

$\therefore b=\sqrt{2}$，$c=-\sqrt{3}$，$d=\sqrt{6}$

以上から，$B(\sqrt{2}, 0, 0)$，$C(0, -\sqrt{3}, 0)$，$D(0, 0, \sqrt{6})$　（答）

(2)

平行四辺形ABCDの面積は $\sqrt{(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}$

$\overrightarrow{AB}=(0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$，$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)$

$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=3$，$\sqrt{(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$

したがって平行四辺形ABCDの面積は6　（答）

(3)

点Hの座標を(p, q, r)とする。$\overrightarrow{OH}$と$\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{CH}$，$\overrightarrow{DH}$ は直交するので，

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$(p-\sqrt{2}, q, r)(p, q, r)=p^2-\sqrt{2}p+q^2+r^2=0$，$\sqrt{2}p=p^2+q^2+r^2$　④

$(p, q+\sqrt{3}, r)(p, q, r)=p^2+q^2+\sqrt{3}q+r^2=0$，$-\sqrt{3}q=p^2+q^2+r^2=\sqrt{2}p$，$\therefore q=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}p$　⑤

$(p, q, r-\sqrt{6})(p, q, r)=p^2+q^2+r^2-\sqrt{6}r=0$，$\sqrt{6}r=p^2+q^2+r^2=\sqrt{2}p$，$\therefore r=\sqrt{\dfrac{1}{3}}p$　⑥

⑤，⑥を④に代入して解くと，$p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$q=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$r=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

したがって，点Hの座標は$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$　（答）

<解説>

空間図形とベクトルに関する問題。四角形ABCDは平行四辺形なので，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$とおくことができる。これは，4点A，B，C，Dが同一平面上にあるということを含んでいる。ここで，注意すべきことはA，B，C，Dという順に点を結ぶことによって四角形ABCDが構成されることである。

(3)について別解を示す。

平面BCDの方程式は$\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{z}{\sqrt{6}}=1$，したがって$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$は平面BCDに垂直

したがって，$\overrightarrow{OH}=(p, q, r)=k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$とおける。

Hは平面BCD上の点だから，$\dfrac{p}{\sqrt{2}}-\dfrac{q}{\sqrt{3}}+\dfrac{r}{\sqrt{6}}=1$，$\therefore (p, q, r)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=1$

したがって$k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=1$，$\therefore k=1$

$\therefore (p, q, r)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$　（答）

$\boxed{3}$　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1, 2, 3, \ldots.)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3) 不等式 $a_n > 1-10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$とする。

＜解答＞

(1)

$$a_2=\frac{3a_1+1}{a_1+3}=\frac{1+1}{1/3+3}=\frac{3}{5}\quad \text{（答）}$$

$$a_3=\frac{3a_2+1}{a_2+3}=\frac{3(3/5)+1}{3/5+3}=\frac{7}{9}\quad \text{（答）}$$

$$a_4=\frac{3a_3+1}{a_3+3}=\frac{3(7/9)+1}{7/9+3}=\frac{15}{17}\quad \text{（答）}$$

$$a_5=\frac{3a_4+1}{a_4+3}=\frac{3(15/17)+1}{15/17+3}=\frac{31}{33}\quad \text{（答）}$$

(2)

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 の値から，$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ （$n=1, 2, 3, \ldots.$） ①　と推測される。

① を数学的帰納法によって証明する。

① が $n=j$ において成立する，すなわち$a_j=\dfrac{2^j-1}{2^j+1}$ とする。すると，

$$a_{j+1}=\frac{3a_j+1}{a_j+3}=\frac{3(2^j-1)/(2^j+1)+1}{(2^j-1)/(2^j+1)+3}=\frac{4\times 2^{j+1}-2}{4\times 2^{j+1}+2}=\frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}+1}$$ となって，

$n=j+1$ においても ① は成立する。

$a_1=\dfrac{1}{3}=\dfrac{2^1-1}{2^1+1}$ だから，① は $n=1$で成立する。① が$n=j$ で成立するとすれば,

$n=j+1$でも成立するので，① はすべての自然数で成立する。

(3)

$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}>1-10^{-18}$，したがって$2^n>2\times10^{18}-1$，両辺の対数をとって

$$n\log_{10}2>\log_{10}(2\times10^{18}-1),\quad n>\frac{\log_{10}(2\times10^{18}-1)}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}(2\times10^{18})+\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2}$$

$$=\frac{\log_{10}2+\log_{10}10^{18}+\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2}=1+\frac{18}{\log_{10}2}+\frac{\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2}$$

$$=1+\frac{18}{0.3010}+\frac{\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2}=60.43+\frac{\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2}$$

$1 \gg 5\times10^{-19}$だから，$\dfrac{\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2} \fallingdotseq 0$

したがって$n \geqq 61 > 60.43+\dfrac{\log_{10}(1-5\times10^{-19})}{\log_{10}2} > 60$

不等式 $a_n > 1-10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n は61　（答）

<解説>

(1)

順次，計算すれば良い。

(2)

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5の値 を見れば，一般項は容易に推測できるだろう。$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$を直ぐに気づきたいところだ。もし思いつかないときは，一般項は $a_n=\dfrac{b_n}{b_n+2}$ と考えて進もう。

ここで，$b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+2^n$　$(n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$

$b_{n+1}-b_n=2^n$ だから，$b_{n+1}-b_1=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n=2(2^n-1)$

$\therefore b_{n+1}=2(2^n-1)+b_1=2^{n+1}-1$，$\therefore a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

(3)

対数計算の公式は一通り活用できることが必要だ。

$\boxed{4}$　tは，$t>\dfrac{1}{2}$を満たす実数とする。座標平面上に楕円$x^2+4y^2=1$が与えられている。

点P$(-1, -t)$からこの楕円に引いた接線のうちでy軸と平行でない接線をl，その接点をQ(a, b)とする。また，x軸，y軸および接線lで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Q(a, b)における接線lの方程式は，$ax+4by=1$であることを示せ。

(2) a，bをそれぞれtを用いて表せ。

(3) 面積$S(t)$を，tを用いて表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

<解答>

(1)

$x^2+4y^2=1$ をxについて微分すると，$2x+8y\dfrac{dy}{dx}=0$，したがって点Q(a, b)における接線の傾きは $a+4b\dfrac{dy}{dx}=0$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{a}{4b}$，ただし接線$l$は$y$軸と平行でないので，$b\neq0$

したがって，接線 l の方程式は$y-b=-\dfrac{a}{4b}(x-a)$，$\therefore\ ax+4by=4b^2+a^2=1$ ①

(2)

接線l は点$\mathrm{P}(-1,\ -t)$ を通るので，①に$x=-1$，$y=-t$ を代入して$-a-4bt=1$，$\therefore\ a=-4bt-1$

$4b^2+a^2=4b^2+(4bt+1)^2=1$，$\therefore\ b=-\dfrac{2t}{1+4t^2}$，$\therefore\ a=\dfrac{4t^2-1}{1+4t^2}$ （答）

(3)

①で$x=0$とすれば，$y=\dfrac{1}{4b}=-\dfrac{1+4t^2}{8t}<0$，$y=0$とすれば，$x=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1+4t^2}{4t^2-1}>0$

面積$S(t)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{4b}\right|\dfrac{1}{a}=\dfrac{(1+4t^2)^2}{16t(4t^2-1)}$ （答）

(4)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{(1+4t^2)^2}{16t^2(4t^2-1)}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)\frac{(1+1/4t^2)}{(1-1/4t^2)}\right\}=\frac{1}{4}$$ （答）

＜解説＞

図１のような図を描いて考える。

(1)

点Q における接線 l の傾きを求めなければならない。

与式の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を得る方法を考える。

(2)

l は点 P と点 Q を通る。

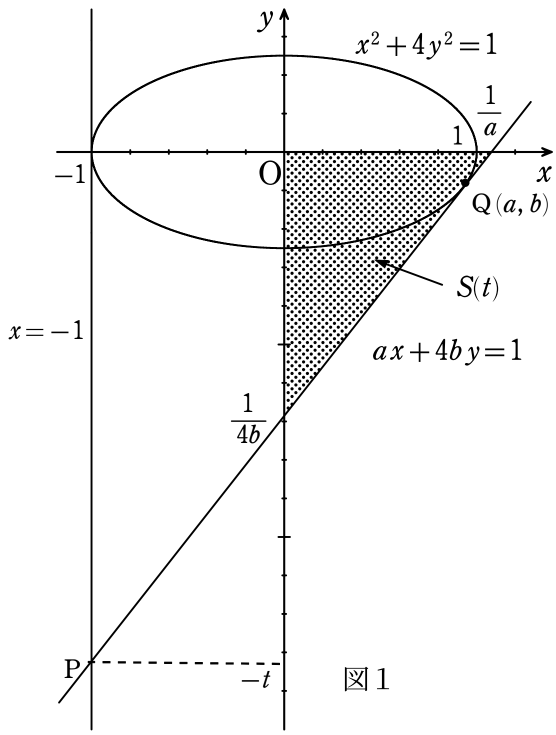

図１

$\boxed{5}$ $f(x)=xe^{1-x^2}$とする。２つの曲線 $y=f(x)$と$y=x^k$で囲まれた部分の面積をS_kとする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$$

が成り立つことを用いてよい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第２次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3) S_kを，kを用いて表せ。

(4) 次の条件 (＊) を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(＊) すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ。

＜解答＞

(1)

$$f'(x)=e^{1-x^2}-2x^2e^{1-x^2}=e^{1-x^2}(1-2x^2)$$ （答）

$$f''(x)=-2xe^{1-x^2}-4xe^{1-x^2}+4x^3e^{1-x^2}=2e^{1-x^2}x(2x^2-3)$$ （答）

(2)

$f'(x)=e^{1-x^2}(1-2x^2)=0$とおけば，$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)$は図１のように変化する。

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極値	↗	極値	↘

図１

したがって，極値は

極小値として，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{\frac{e}{2}}$ （答）

極大値として，$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{\frac{e}{2}}$ （答）

$f''(x)=2e^{1-x^2}x(2x^2-3)=0$とおけば，$x=0,\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$f'(x)$，$f(x)$は図２のように変化し，$y=f(x)$のグラフの凹凸は記載の通り。

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{e}}$，$f(0)=0$，$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{e}}$ だから

変曲点は$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{e}}\right)$，$(0,0)$，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{e}}\right)$ （答）

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}xe^{1-x^2}=e\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{1-x^2}=-e\lim_{x\to-\infty}\left(-xe^{-x^2}\right)=0$$

したがって，$x=\pm\infty$ において，$y=0$ に漸近するので，漸近線は$y=0$ （答）

これらから，$y=f(x)$のグラフの概形は図３の通り。

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		∞
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	↘		↗		↘		↗	0
$f(x)$	0	凸	変曲点	凹	変曲点	凸	変曲点	凹	0

図２

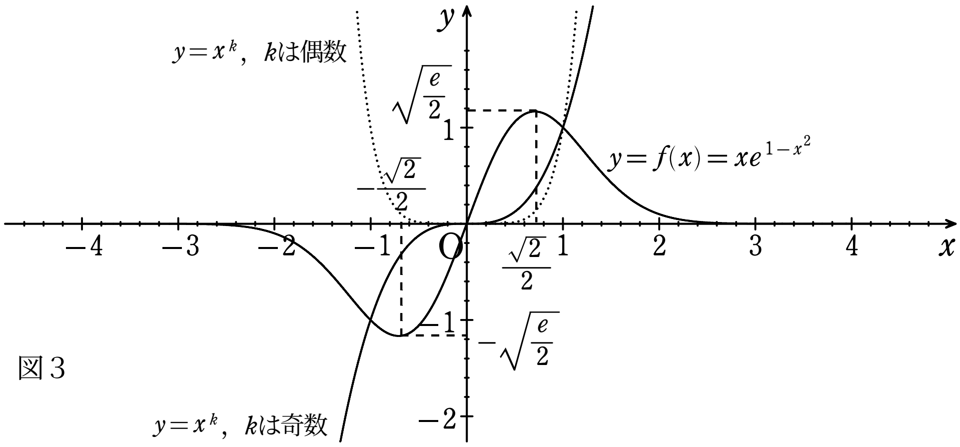

図３

(3)

図３のようにk の偶奇によって$y=x^k$のグラフの概形は変わるので，
S_k の求め方を変えねばならない。

$f(x)$は原点Oに関して点対称，k が奇数のとき$y=x^k$ もO に関して点対称だから

$S_k=2\int_0^1\left(xe^{1-x^2}-x^k\right)dx=2\left[\frac{-e^{1-x^2}}{2}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=e-1-\frac{2}{k+1}$，ただし$k$ は奇数　（答）

k が偶数のとき，$y=x^k$ は偶関数だから，

$S_k=\int_0^1\left(xe^{1-x^2}-x^k\right)dx=\frac{e-1}{2}-\frac{1}{k+1}$，ただし$k$ は偶数　（答）

(4)

$S_{2n-1}=e-1-\frac{1}{n}$，$S_{2m}=\frac{e-1}{2}-\frac{1}{2m+1}$

$4S_{2n-1}-7S_{2m}=\frac{e-1}{2}-\frac{4}{n}+\frac{7}{2m+1}>0$，$\therefore \frac{4}{n}<\frac{e-1}{2}+\frac{7}{2m+1}$

m は$1\leqq m<\infty$なる自然数だから，$m\to\infty$ のとき，$\frac{4}{n}<\frac{e-1}{2}$，$\therefore n>\frac{8}{e-1}$

$e\fallingdotseq 2.72$だから，$\therefore n>\frac{8}{e-1}\fallingdotseq 4.7$，$\therefore n\geqq 5$

したがって，すべての自然数 m に対して$4S_{2n-1}>7S_{2m}$が成り立つ最小の自然数n は５　（答）

<解説>

(2)

求められているものに丁寧に答えていこう。図１，図２のような図によって表現するのが良いだろう。極値，変曲点，漸近線などの意味を理解していなければならない。

(3)

図３のような図を描いてみれば，k の偶奇によって，$f(x)$のグラフと$y=x^k$のグラフが囲む領域が異なることがわかる。加えて，すべての k において両グラフは点$(1,1)$で交わることを知っておこう

<総評>

例年通り，2 時間で全 5 問である。解答方針の着想に困難を感じる問題は少なく，基礎的な数学力を問う標準的な問題がそろっている。

$\boxed{1}$

多項式のべき乗の展開に関する問題。項の選択における場合の数（組み合わせ）や二項定理の応用の問題でもある。式の展開に関する基本的な良問だと思う。簡単なようで，基礎を的確に理解していないと，正答は難しい。難易度はB，(3)はB＋。

$\boxed{2}$

空間図形をベクトルによって扱う問題。平行四辺形の条件，垂線の条件，平行四辺形の面積等をベクトルによって表現することで，容易に扱うことができる。(3)には少々着想が必要だ。難易度はB。

$\boxed{3}$

1に収束する数列の問題。数学的帰納法は良く理解しておくこと。難易度B。

$\boxed{4}$

楕円の接線に関する問題。題意は簡明であり，難易度はB－。

$\boxed{5}$

対数関数を含む関数のグラフの形状を導関数によって，明らかにし，概形を把握する問題。対数関数の微分，積分を的確に理解しておくこと。また自然対数の底 e のおよその値を覚えていることが必要である。難易度B。

<人文，教育，経済，農，創生学部> （90分）

$\boxed{1}$ 理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{2}$ に同じ。

$\boxed{3}$ 理系の $\boxed{3}$ に同じ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の放物線 $y=-ax^2+b$ を C とし，P$(1\,,0)$，Q$(0\,,2)$とする。ただし，$a>0$，$0<b<2$ とする。放物線 C は，2点 P，Q を通る直線に接している。放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答よ。

(1) aをbで表せ。

(2) S を b を用いて表せ。

(3) $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるように b の値を定めよ。

<解答>

(1)

2点 P，Q を通る直線は $y=-2x+2$ ①

$y=-ax^2+b$ ②

①は②に接するので，両者を連立させた $-ax^2+b=-2x+2$ から得られる2 次方程式

$ax^2-2x+2-b=0$　③は重解をもつ。

③の解の判別式 $D=1-a(2-b)=0$，$\therefore\ a=\dfrac{1}{2-b}$　（答）

(2)

放物線 Cと x 軸との交点は，$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積

$$S=\int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}}(-ax^2+b)dx\ =2\int_{2}^{\sqrt{\frac{b}{a}}}(-ax^2+b)dx\ =2\left[\frac{-ax^3}{3}+bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$=\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{4}{3}b\sqrt{b(2-b)}$$　（答）

(3)

$\dfrac{S}{\sqrt{b}}=\dfrac{4}{3}b\sqrt{(2-b)}$，$f(b)=b\sqrt{(2-b)}$とおく。

$f'(b)=\sqrt{(2-b)}-\dfrac{b}{2\sqrt{2-b}}=\dfrac{4-3b}{2\sqrt{2-b}}$，したがって$b=\dfrac{4}{3}$において$f'(b)=0$,

$f(b)$は図１のように変化し，$f(b)$は$b=\dfrac{4}{3}$において最大となる。

したがって，$\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるのは，$b=\dfrac{4}{3}$　（答）

b	0		1		2
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗		↘	

図１

＜解説＞

(1) ２つのグラフが接するということは，２つの方程式を連立させたとき，重解をもつということ。ここでは連立させて得られる方程式が2次方程式だから，解の判別式が 0 となる。

＜総評＞

４問90分。昨年同様，$\boxed{1}$～$\boxed{3}$ は理系の問題と同じ。$\boxed{1}$(3)は文系の問題としては，やや難しい。$\boxed{4}$ の題意は簡明だから，文系といえどもスムーズに解けるようでありたい。

170820