

2017 (H29)年度 東北大学 前期入学試験 物理解説

(物理 , 化学 , 生物 , 地学のうち 2 科目受験で150分)

1

< 解答 >

問 (1) (a)

箱 Q が平面 K から受ける静止摩擦力を f_0 とすれば , 箱 Q は静止しているので , 運動方程式は , 箱 P について , $Ma_0 = F_0 - f_0$

箱 Q について , $ma_0 = f_0$

上記 2 式から , $a_0 = \frac{F_0}{M+m}$ (答)

箱 P の見かけの運動方程式は $F_0 = M_0 a_0$ だから , $M_0 = \frac{F_0}{a_0} = M+m$ (答)

(b)

箱 Q に加わる力 f_0 が Q と平面 K との間の静止摩擦力より小さければ , Q は滑ることなく運動する。したがって , その条件は $f_0 = ma_0 \leq \mu mg$, $\therefore a_0 \leq \mu g$ (答)

問 (2) (a)

箱 Q に加速度 a_s の運動をもたらす力 f_s が Q に働く静止摩擦力を上回る瞬間に滑り始めるのだから , $f_s = ma_s = \mu mg$, $\therefore a_s = \mu g$

このとき箱 P を押す力 $F_1 = (m+M)a_s = \mu(m+M)g$ (答)

(b)

箱 P を F_1 で押すと , P の中で箱 Q が平面 K 上を滑り始める。

すると , 平面 K から P と Q に動摩擦力 $\mu' mg$ が働く。

この動摩擦力は P には F_1 と逆方向 , Q には F_1 と同方向に働く。

P は見かけ上 , 運動方程式 $M_1 a_1 = F_1 = \mu(m+M)g$ の運動をする。

しかし P の真の運動方程式は $Ma_1 = F_1 - \mu' mg = \mu(m+M)g - \mu' mg$

したがって , $a_1 = \frac{F_1 - \mu' mg}{M} = \left\{ (\mu - \mu') \frac{m}{M} + \mu \right\} g$ (答)

見かけの質量 $M_1 = \frac{F_1}{a_1} = \frac{\mu}{(\mu - \mu') \frac{m}{M} + \mu} (m+M)$ (答)

問 3 (a)

衝突後の箱 P の運動方程式は $Ma_2 = F_1 + \mu' mg = \mu(m+M)g + \mu' mg$, $\therefore a_2 = \left\{ (\mu + \mu') \frac{m}{M} + \mu \right\} g$

箱 P の見かけの運動方程式は $M_2 a_2 = F_1$, $\therefore M_2 = \frac{F_1}{a_2} = \frac{\mu}{(\mu + \mu') \frac{m}{M} + \mu} (m+M)$ (答)

(b)

$$\frac{\mu}{(\mu + \mu')\frac{m}{M} + \mu} < \frac{\mu}{(\mu - \mu')\frac{m}{M} + \mu} < 1 \text{ だから,}$$

$$M_2 < M_1 < M_0 \quad (\text{答})$$

問(4)

$$\text{問(1), (2) から, } \frac{F_0}{a_0} = M + m, F_1 = \mu(m + M)g, \therefore \mu = \frac{F_1}{(m + M)g} = \frac{a_0 F_1}{g F_0} \quad (\text{答})$$

$$\text{問(3) から } a_1 = \left\{ (\mu - \mu')\frac{m}{M} + \mu \right\} g$$

$$a_2 = \left\{ (\mu + \mu')\frac{m}{M} + \mu \right\} g$$

$$a_1 + a_2 = 2\mu g \frac{m + M}{M} = \frac{2F_1}{M}, \therefore M = \frac{2F_1}{a_1 + a_2} \quad (\text{答})$$

$$m = \frac{F_0}{a_0} - M = \frac{F_0}{a_0} - \frac{2F_1}{a_1 + a_2} \quad (\text{答})$$

$$a_2 - a_1 = 2\mu' g \frac{m}{M}, \therefore \mu' = \frac{a_2 - a_1}{2g} \times \frac{M}{m} = \frac{a_0(a_2 - a_1)F_1}{\{(a_1 + a_2)F_0 - 2a_0F_1\}g} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

箱を運動させたときの力と加速度の測定から、箱の中の状態を推測しようという仮想的な実験問題である。与えられた条件と物理過程から求めるもので、工夫された良い問題だと思う。箱に加える力を大きくしながら加速度を測定すると、箱の中に移動する物体がなければ、加速度は力に比例するはずである。

問(1)(a)

PとQは一体として運動しているから、見かけの質量は両者の質量の和となる。

(b)

QにはPの進行方向に力が働いている。この力とQとPの接触面Kで働く摩擦力が釣り合っているので、QはP上で静止している。しかし、進行方向に働く力が大きくなって、静止摩擦より大きくなると、QはK上を滑り始めて、Pと一体的な運動をしなくなる。

問(2)(a)

QがP上で静止している場合には、PとQの加速度は同じである。その加速度をもたらす力が摩擦力と同じになり、上回る瞬間にQは滑り始める。

(b)

Tさんが観測できるのは、Pに加えた力と、それによる加速度である。TさんはPは運動方程式 $M_1 a_1 = F_1$ の運動をしているものと判断する。

しかし、Pの中でQが滑っているので、Pには F_1 以外に動摩擦力が運動とは逆方向に働いている。

問(3)(a)

衝突後の箱Pの運動方程式を考える。ここでは、箱Qが箱Pの壁から離れるように運動した、とあるので、平面Kから箱Pは動摩擦力を F_1 と同じ方向に受けることがわかる。

問(4)

問(1)～問(3)で導いた式を利用して求める。

2

<解答>

問(1)(a)

xy 平面内を運動したということは、 z 方向への移動がない、すなわち加速度が発生しない。したがって、荷電粒子に働く z 軸負方向の重力 mg と正方向の電界による力 qE_0 とがつり合う。

$$qE_0 = mg, \therefore E_0 = \frac{mg}{q} \quad (\text{答})$$

(b)

荷電粒子はフレミングの左手の法則によるローレンツ力 qv_0B を磁界から受ける。磁界の方向と粒子の運動方向が作る平面に垂直に力が働くので、ここでは図1のように反時計方向に回る半径 r の等速円運動をする。

$$\text{円運動の方程式は } m\frac{v_0^2}{r} = qv_0B, r = \frac{mv_0}{qB}$$

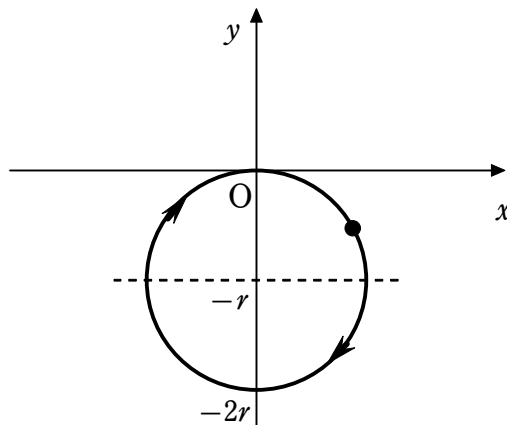


図1 荷電粒子の軌跡

(c)

$$\text{円運動の方程式は } m\frac{v_0^2}{r} = qv_0B, r = \frac{mv_0}{qB}, \text{円運動の周期は } T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\text{したがって } x = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T}\right) = r\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{mv_0}{qB}\sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \quad (\text{答})$$

$$y = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T}\right) - r = r \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - r = \frac{mv_0}{qB} \left\{ \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) - 1 \right\} \quad (\text{答})$$

z 軸方向の運動方程式は、加速度を a_z として、 $ma_z = qE - mg$ 、 $\therefore a_z = \frac{qE}{m} - g$

$$\text{初速度は0, 初期位置は0だから, } z = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} - g \right) t^2 \quad (\text{答})$$

問(2)(a)

z 軸方向の運動方程式は $ma_z = -mg$ 、 $a_z = -g$ 、 $v_z = -gt + v_1$ 、 $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1t$ 、

$$t = t_1 \text{ で } z = 0 \text{ だから, } t_1 = \frac{2v_1}{g} \quad (\text{答})$$

x 軸方向の初期位置は0で、速さ v_0 の等速運動をするから、 $x = v_0 t_1 = \frac{2v_0 v_1}{g}$ (答)

y 軸方向の初期位置は0で、初速は0であり、 y 軸方向に力が働かないから、 $y = 0$ (答)

(b)

荷電粒子は z 軸方向に初速 v_1 の等加速度運動をし、 (x, y) 座標は円軌道を描く。

問(1)(c)の結果を活用する。 $t = t_1$ で、

$$x = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{qBt_1}{m}\right) = \frac{mv_0}{qB} \sin\left(\frac{2qv_1 B}{mg}\right) \quad (\text{答})$$

$$y = \frac{mv_0}{qB} \left\{ \cos\left(\frac{qBt_1}{m}\right) - 1 \right\} = \frac{mv_0}{qB} \left\{ \cos\left(\frac{2qv_1 B}{mg}\right) - 1 \right\} \quad (\text{答})$$

(c)

(b)において、 $x = 0$ とおけば、 $\frac{2qv_1 B}{mg} = 2n\pi$ 、 n は自然数

このとき $y = 0$ 、したがって $n = 1$ のときに B は最小値をとり $B_{\min} = \frac{\pi mg}{qv_1}$ (答)

(d)

z 軸方向の運動方程式は $ma_z = -mg + qE$ 、 $\therefore a_z = -\left(g - \frac{qE}{m}\right)$

したがって、問2(c)の g の代わりに $\left(g - \frac{qE}{m}\right)$ を用いて、

$$\frac{2qv_1 B}{m\left(g - \frac{qE}{m}\right)} = \frac{2qv_1 B}{mg - qE} = 2n\pi, \quad qE = mg - \frac{qv_1 B}{n\pi}, \quad E = \frac{mg}{q} - \frac{v_1 B}{n\pi}$$

したがって $n = 1$ のとき、 E は最小値をとり $E_{\min} = \frac{mg}{q} - \frac{v_1 B}{\pi}$ (答)

< 解説 >

電磁界中の荷電粒子の運動に関する問題。重力も考慮して扱う。

問(1)(a)

xy 平面内を運動したということは、 z 方向への移動がない、すなわち加速度が発生しない、力が発

生しない，ということに直ぐ気づくこと。

(b)

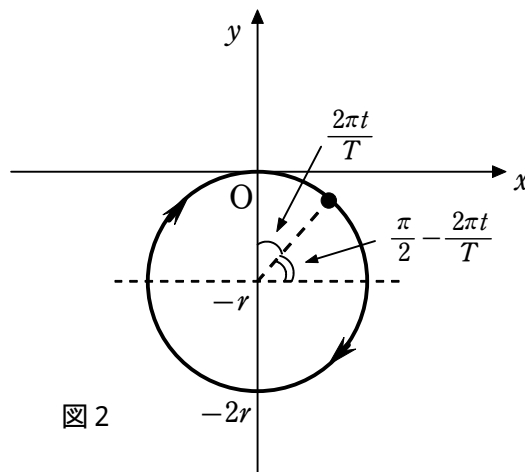
ここでは，電界の影響は考慮しないで良い。荷電粒子はフレミングの左手の法則によるローレンツ力を磁界から受ける。磁界の方向と粒子の運動方向が作る平面に垂直に力が働くので，ここでは， xy 面内で図1のように反時計方向に回る円運動をする。ローレンツ力による荷電粒子の円運動は，教科書にいていねいに記載されている基本知識だから，的確に理解しておこう。

(c)

電界と重力は z 軸方向のみ，磁界による力は xy 面内の方向のみに働くので，両者の力による運動は別々に考えて良い。

円運動の速度は v_0 だから，円周長 $2\pi r$ を速度 v_0 で割れば，周期 T が求まる。角速度 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ だから，時間 t で荷電粒子の回転角は $\omega t = \frac{2\pi t}{T}$ である。

荷電粒子の初期位置 O は回転中心から見ると， x 軸方向に対して $\frac{\pi}{2}$ の回転角の位置であり，反時計方向に回転するので，時間 t における位置の回転角は $(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T})$ である。



問(2)(a)

荷電粒子に働く力は重力のみである。

(b)

荷電粒子は z 軸方向に初速 v_1 の等加速度運動をし， (x, y) 座標は円軌道を描く。

問(1)(c)の結果を活用し， $t=t_1$ とすればよい。

(c)

(b)で得られた座標を $(0, 0)$ として考えればよい。

(d)

z 軸方向の加速度が $a_z = -g$ から， $a_z = -(g - \frac{qE}{m})$ に変化したと見なして扱えばよい。

3

< 解答 >

問(1)(a)

$$A_1 = -A_2$$

$$A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft + \frac{L}{\lambda} \right) \right\} = A_2 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{L}{\lambda} \right) \right\}$$

$$A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft + \frac{L}{\lambda} \right) \right\} - A_2 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{L}{\lambda} \right) \right\} = A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft + \frac{L}{\lambda} \right) \right\} + A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{L}{\lambda} \right) \right\} = 0$$

三角関数の加法定理を使って整理すると,

$$2A_1 \sin(\mathcal{A}) \cos(\mathcal{I}) = 2A_1 \sin(2\pi ft) \cos \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) = 0$$

任意の t に対して 式が成り立つためには $\cos \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) = 0$ でなければならないから,

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{2m-1}{2} \pi \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

このことから, 共鳴が起きる場合の波長の条件として, 次式が得られる。

$$\lambda = \mathcal{U} = \frac{4L}{2m-1}$$

閉管内の波全体を表す式について考える。左進行波と右進行波の重ね合せとなるから, 上の式と同様の変形を行って考えると,

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_1(t, x) + F_2(t, x) = A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft + \frac{x}{\lambda} \right) \right\} - A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \\ &= 2A_1 \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos(2\pi ft) = 2A_1 \sin \left(\frac{2m-1}{2L} \pi x \right) \cos(2\pi ft) \\ &= 2A_1 \sin(\mathcal{I}) \cos(\mathcal{O}) \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} \ 2\pi ft \quad \mathcal{I} \ \frac{2\pi L}{\lambda} \quad \mathcal{U} \ \frac{4L}{2m-1} \quad \mathcal{I} \ \frac{2m-1}{2L} \pi x \quad \mathcal{O} \ 2\pi ft \quad (\text{答})$$

(b)

において $m=3$ として, $\sin \left(\frac{5}{2L} \pi x \right) = 0$ を満たす x が節の位置である。

$$\text{すなわち } \frac{5}{2L} \pi x = l\pi, \therefore x = \frac{2}{5} lL \quad (l=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$0 \leq x \leq L \text{ を満たすのは } l=0, 1, 2 \text{ だから, } x=0, \frac{2L}{5}, \frac{4L}{5} \quad (\text{答})$$

(c)

$x=0$ では自由端反射で, 左右の進行波の変位は同じだから,

$$F_1(t, 0) = F_2(t, 0), \therefore A_1 = A_2$$

$x=L$ でも自由端反射で, 共鳴が起きるためには左右の進行波の変位は同じだから,

$$F_1(t, L) = F_2(t, L), \therefore A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft + \frac{L}{\lambda} \right) \right\} = A_2 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{L}{\lambda} \right) \right\} = A_1 \sin \left\{ 2\pi \left(ft - \frac{L}{\lambda} \right) \right\}$$

$$\sin\left\{2\pi\left(ft + \frac{L}{\lambda}\right)\right\} - \sin\left\{2\pi\left(ft - \frac{L}{\lambda}\right)\right\} = 2\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft) = 0$$

任意の t に対して, が成立するためには, $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$,

$$\therefore \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

したがって, 定常波の波長 λ が満たす条件は, $\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ (答)

開管の中の定常波は

$$\begin{aligned} F(t, x) &= A_1 \sin\left\{2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right\} + A_2 \sin\left\{2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \\ &= 2A_1 \sin(2\pi ft) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 2A_1 \sin(2\pi ft) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ (答)} \end{aligned}$$

問(2)(a)

ドップラー効果により, 閉管に達する音波の振動数は $f'_s = \frac{V}{V - (-v_s)} f_s = \frac{V}{V + v_s} f_s$

共鳴する波長は問(1)(a)から, $\lambda' = \frac{4L}{2m-1} = \frac{V}{f'_s} = \frac{V+v_s}{f_s}$

ドップラー効果により, 開管に達する音波の振動数は $f''_s = \frac{V}{V - v_s} f_s$

共鳴する波長は問(1)(c)から, $\lambda'' = \frac{2L}{n} = \frac{V}{f''_s} = \frac{V-v_s}{f_s}$

$$\therefore \text{から, } \frac{v_s}{V} = \frac{-2m+2n+1}{2m+2n-1} \quad \text{(答)}$$

(b)

に与えられた数値と条件を入れて, 検討する。

$$\frac{4L}{2m-1} = \frac{4}{2m-1} = \frac{V+v_s}{f_s} \leq \frac{4V}{3f_s}, \therefore \frac{3f_s}{V} \leq (2m-1) \leq \frac{4f_s}{V}, \frac{3f_s}{2V} + \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2f_s}{V} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{300}{340} \leq \frac{f_s}{V} \leq \frac{400}{340}, \therefore \frac{900}{680} \leq \frac{3f_s}{2V} \leq \frac{1200}{680}, 1.2 < \frac{900}{680} \leq \frac{3f_s}{2V} \leq \frac{1200}{680} < 1.8$$

$$1.7 < \frac{600}{340} \leq \frac{2f_s}{V} \leq \frac{800}{340} < 2.4, \text{したがって } 1.7 < m < 2.9, \therefore m=2 \quad \text{(答)}$$

(c)

に与えられた数値と条件を入れて, (b)を踏まえて検討する。

$$\frac{2L}{n} = \frac{V-v_s}{f_s}, \therefore \frac{2V}{3f_s} \leq \frac{2L}{n} \leq \frac{V}{f_s}, \text{したがって } \frac{2f_s}{V} \leq n \leq \frac{3f_s}{V}, 2.6 < \frac{900}{340} \leq \frac{3f_s}{V} \leq \frac{1200}{340} < 3.6$$

したがって, $1.7 < n < 3.6$, $\therefore n=2$ または 3

$$v_s = \frac{-2m+2n+1}{2m+2n-1} V \leq \frac{1}{3} V, \therefore \frac{-2m+2n+1}{2m+2n-1} \leq \frac{1}{3}, \therefore m \geq \frac{1}{2}(n+1),$$

$m=2$ に対して, $n=2, 3$ はこれを満たす。

$$m=2, n=2 \text{ のとき, } v_s = \frac{-2m+2n+1}{2m+2n-1}V = \frac{V}{7}, f_s = \frac{n}{2L}(V-v_s) = \frac{6V}{7} = 291 \text{ Hz}$$

しかし, $300 \text{ Hz} \leq f_s \leq 400 \text{ Hz}$ を満たさない。

$$m=2, n=3 \text{ のとき, } v_s = \frac{-2m+2n+1}{2m+2n-1}V = \frac{V}{3}, f_s = \frac{n}{2L}(V-v_s) = \frac{3}{2} \times \frac{2V}{3} = 340 \text{ Hz (答)}$$

< 解説 >

問 (1) (a)

左進行波が反射するという事は、右進行波が反射端で発生するという事である。加えて、 $x=0$ では、管は閉じているので固定端反射となり、反射端での音波の変位は0である。つまり左進行波と反射により発生した右進行波の変位の符号が逆であり、両者の和は0となる。

一方、右進行波は $x=L$ で反射して反射波を発生する。管は開いているので、自由端反射となり、入射波（右進行波）と反射波の変位の符号は一致する。かつ反射波が左進行波と一致するとき、共鳴が起きる。つまり管の両端での音波の反射によって、特定の左進行波と右進行波が発生することになる。

このような物理過程を音波の式を追って確認していく文章となっている。この共鳴現象が起きる波長の条件が $\lambda = \frac{2L}{m}$ であり、管長 L と整数 m によって決まる。このとき管内に存在する音波は、左進行波と右進行波の重ね合わせとなる。すると、 $y = A \sin(kx - \omega t)$ 式のような定常波が得られる。つまり、変位が0の位置（節）が時間によって変化しない波となっている。

(b)

節の位置は $x = \frac{m\lambda}{2} = \frac{mL}{m} = L$ 式で、時刻 t に関わらず変位が0となる x である。

(c)

開管の場合、 $x=0$ での反射が自由端反射である。

問 (2) (a)

音源が一定の速さで移動するとき、管に達する音波の振動数はドップラー効果により変化する。閉管では音源が遠ざかる方向（ x 軸正方向）へ移動するので、閉管での振動数は減少し、開管では音源が近づく方向（ x 軸負方向）へ移動するので、開管での振動数は増加する。

このようなドップラー効果を考慮して、問 (1) (a), (c)の結果を利用して、共鳴条件から $\frac{v_s}{V}$ を求める。

(b), (c)

共鳴条件 $f_s = \frac{v_s}{\lambda}$ に与えられた数値、条件を入れて m, n を求める。その上で、 f_s を求める。

< 総評 >

力学、電磁気、音波の3分野からの出題。どの問題も基礎的な物理知識と思考の上に、物理的な思考の的確な展開を必要とする。

1

箱の中に箱が入っている場合の運動の問題である。そのことを観測者は知らない。観測者は箱に力を加え、発生する加速度によって、箱の質量を調べる。力を大きくすると、加速度も大きくなるが、中の箱が滑り始めると、加速度の上昇が鈍くなる。

図を描いて、どこにどのような力が働いて、運動するのか、把握しよう。その把握を間違えなけれ

ば、難しい計算や思考を必要とするものではない。問(3)は難しく考え過ぎないこと。難易度は全体としてB。

2

電磁界および重力が働く空間における荷電粒子の運動に関する問題。 xy 面内における運動と z 軸方向の運動が独立になるように、電界、重力、磁界の方向が設定されているので、扱いやすい。難易度B。

3

閉管、開管の中の音波に関する問題。問(1)では管中で発声する定常波の発生物理を数式で追う。固定端反射と自由端反射での反射波の違い、それによる定常波の違いを理解することが必要である。基本的な問題であり、難易度はB。

問(2)は問(1)を踏まえて、管の外部の音源が移動するときに、管内で発生する定常波に関する問題である。ドップラー効果と管内の音波の共鳴現象を組み合わせた面白い問題である。難易度はA-。

180628