2017 (H29) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）
・歯学部・薬学部・工学部・農学部　　試験時間 150分

$\boxed{1}$　a，bを実数とする。$y=|x^2-4|$で表される曲線をCとし，$y=ax+b$で表される直線をlとする
(1) l が点$(-2,0)$を通り，lとC がちょうど３つの共有点をもつようなa，b の条件を求めよ。
(2) l と C がちょうど３つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡をab 平面上に図示せよ。

＜解答＞
(1)
直線 l：$y=ax+b$が点$(-2,0)$を通ることから，$b=2a$
曲線 C は$x^2-4\geqq 0$すなわち，$x\leqq -2$，$2\leqq x$において，C：$y=x^2-4$
$x^2-4<0$，すなわち$-2<x<2$において，C：$y=-x^2+4$
図１に直線 l と曲線 C を示す。l が$y=-x^2+4$と$-2<x<2$で交われば，l は$y=x^2-4$と交わるので，
l とC は共有点を３つもつ。
$-x^2+4=ax+2a$として，$x^2-ax-4-2a=(x+2)(x-2+a)=0$，$\therefore\ -2<2-a<2$，$\therefore\ 0<a<4$
以上によって，l とC がちょうど３つの共有点をもつような
a，b の条件は，$b=2a$ かつ $0<a<4$ （答）
(2)
(1)のとき以外に，l と C がちょうど３つの共有点をもつ条件を考える。
図１を見つめて考えると，以下の２つの場合がある。
ｉ) 直線 l：$y=ax+b$が点$(-2,0)$を通り，曲線 C：$y=-x^2+4$と交わる場合
(1)と同じ考え方で，直線l：$y=ax+b$が点$(2,0)$を通ることから，$b=-2a$
$-x^2+4=ax-2a$として，$x^2+ax-4-2a=(x-2)(x+2+a)=0$，$\therefore\ -2<-2-a<2$,
$\therefore\ -4<a<0$，したがって３つの共有点をもつような
a，bの条件は，$b=-2a$ かつ $-4<a<0$
ii) 直線 l：$y=ax+b$が曲線 C：$y=-x^2+4$と接する場合
両式を連立させて，$-x^2+4=ax+b$から2次方程式$x^2+ax+b-4=0$を得る。
直線l が曲線C に接すると，2次方程式が重解をもつので，解の判別式$a^2-4(b-4)=0$
$\therefore\ b=\dfrac{a^2}{4}+4$，$x^2+ax+b-4=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0$，$x=-\dfrac{a}{2}$
$-2<-\dfrac{a}{2}<2$だから，$-4<a<4$,
以上によって，３つの共有点をもつようなa，bの条件は，$b=\dfrac{a^2}{4}+4$ かつ $-4<a<4$
(1)，(2) ｉ)，ii)の条件を図２に示す。ただし，○は除く。

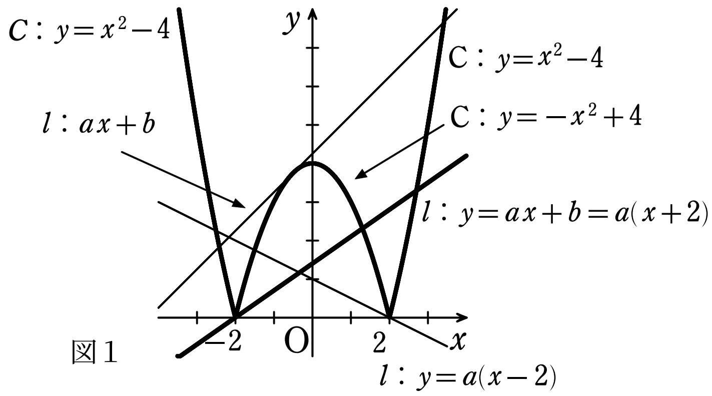

図１

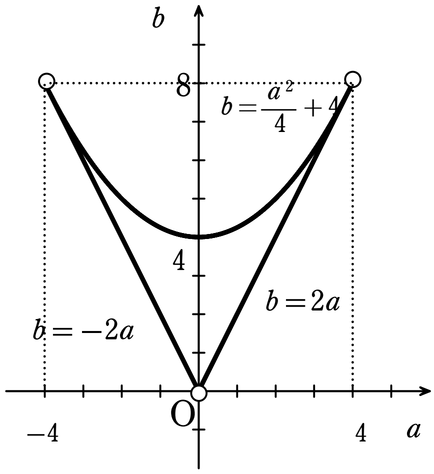

図２

＜解説＞

図１のようなグラフを描いて，曲線Cと直線lの共有点が３つになる場合とは，どのような場合なのかを考える。(1)では$(-2\,,0)$を通る直線l：$y=ax+b=a(x+2)$が曲線C：$y=-x^2+4$とさらに交われば，曲線C：$y=x^2-4$とも必ず交わるから，lとCは３つの共有点をもつことがわかる。

(2)でも図１によって考える。lとCが３点を共有するには，(1)の場合以外には，直線l：$y=ax+b$と曲線C：$y=-x^2+4$が接する必要があることがわかる。

$\boxed{2}$　A 君とB 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が１つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を１つもっている。２人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点がB 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

求める場合は以下の３つである。

ｉ) A 君，B 君ともに 0 を取り出して 3 点となる場合

A 君が 0 を取り出して 3 点となる場合は，(0 , 1 , 2) を取り出すこと

6 枚のカードから 3 枚のカードを選ぶ場合の数は ${}_6C_3=20$ だから，

その確率は$\dfrac{1}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{20}$

B 君が 0 を取り出して 3 点となる場合も同様だから

この場合の確率は $\dfrac{1}{{}_6C_3}\times\dfrac{1}{{}_6C_3}=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

ⅱ) A 君が 0 を取り出して3 点となり，B 君は 0 を取り出すことなく 3 点となる場合

B 君は 0 を取り出すことなく 3 点となる場合は (1 , 3 , 5)，(2 , 3 , 4) を取り出すこと

この場合の確率は，$\dfrac{1}{{}_6C_3}\times\dfrac{2}{{}_6C_3}=\dfrac{2}{400}$

ⅲ) A 君は 0 を取り出すことなく 3 点となり，B 君は 0を取り出して 3 点となる場合

ⅱ)と同じだから，この場合の確率は $\dfrac{2}{400}$

上記３つの場合は排反事象だから，求める場合の確率は上記の３つの確率の和

すなわち，$\dfrac{1}{400}+\dfrac{2}{400}+\dfrac{2}{400}=\dfrac{5}{400}=\dfrac{1}{80}$　（答）

(2)

A 君の得点がB 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率

$=\dfrac{A\text{君の得点が整数ではなくて}B\text{君より大きい確率}}{A\text{君の得点が}B\text{君の得点より大きい確率}}$

20 組の3 枚のカードの組み合わせを得点の小さい順に並べると，下記のようになる。

(1, 2, 3)：2点，(1, 2, 4)：7/3点，{(1, 2, 5)，(1, 3, 4)}：8/3点，

{(0, 1, 2)，(1, 3, 5)，(2, 3, 4)}：3点，{(1, 4, 5)，(2, 3, 5)}：10/3点，(2, 4, 5)：11/3点，

{(0, 1, 3)，(3, 4, 5)}：4点，{(0, 1, 4)，(0, 2, 3)}：5点，{(0, 1, 5)，(0, 2, 4)}：6点，

{(0, 2, 5)，(0, 3, 4)}：7点，(0, 3, 5)：8点，(0, 4, 5)：9点

得点が同じになるカードの組み合わせの数は，$5+2^2\times6+3^2=38$

A君，B君のカードの組み合わせの数は $20\times20=400$

したがって，A 君の得点がB 君の得点より大きい組み合わせの数は $\dfrac{400-38}{2}=181$

A 君の得点が整数ではない場合のカードの組み合わせと，その得点の方が大きいカードの組み合わせの場合は

(1, 2, 4) の得点7/3点 の方が大きいのは (1, 2, 3)の1組

(1, 2, 5) の得点8/3 点の方が大きいのは上記に (1, 2, 4)を加えた2組

(1, 3, 4) の得点8/3 点の方が大きいのは上記に同じ2組

(1, 4, 5) の得点10/3点の方 が大きいのは，

(0, 1, 2)，(1, 2, 3)，(1, 2, 4)，(1, 2, 5)，(1, 3, 4)，(1, 3, 5)，(2, 3, 4)の7組

(2, 3, 5) の得点10/3 点の方が大きいのは上記に同じ7組

(2, 4, 5) の得点11/3 点の方が大きいのは上記に(1, 4, 5)，(2, 3, 5)を加えた9組

A君の得点が整数ではなくてB君の得点より大きい場合の数は,
上記の場合の数をすべて加えて 28 組

A 君の得点がB 君の得点より大きい確率は，$\dfrac{181}{400}$

A 君の得点が整数ではなくてB 君の得点より大きい確率は，$\dfrac{28}{400}$

A 君の得点がB 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率

$$\frac{\frac{28}{400}}{\frac{181}{400}}=\frac{28}{181}$$ （答）

＜解説＞

簡明な操作に関わる確率の問題だから，題意を理解することは容易だ。しかし，確率の問題に共通していえるように，解答方針を案出するのに手こずることは，本問でも同様である。

(1)

まずは準備運動となる問題。確率の問題は，発生する場合の数を数えることが基本である。そして多くの問題では，発生する場合はすべて同じ確からしさで発生する。

ここではA 君が (0, 1, 2, 3, 4, 5) の6 枚のカードから3 枚のカードを取り出す場合の数は ${}_6C_3$ であり，B 君も同じである。したがって，２人が3 枚ずつカードを取り出す場合のカードの組み合わせの数は ${}_6C_3\times{}_6C_3$である。これが確率を求める際の母数となる。

次に，与えられた条件を満たす場合の数を求める。これが，確率を求める際の分子となる。ここでは，与えられた条件を相反する３つの場合（同時には発生しない排反事象）に分けて場合の数を考えると，容易である。

(2)

解答方針を考えねばならない。まずは，条件付き確率の問題であることを見抜かなければならない。「A 君の得点がB 君の得点より大きいとき」という条件の下で，「A 君の得点が整数ではない」という場合の確率を求める問題であるということである。

数学Aの教科書によれば，２つの事象αとβに対して，α が起こったときにβ が起こる確率を「事象α が起こったときに事象β が起こる条件付き確率といい，$P_\alpha(\beta)$で表す」とある。

そして，$P_\alpha(\beta)=\dfrac{P(\alpha\cap\beta)}{P(\alpha)}$である。ここで，$\alpha\cap\beta$は$\alpha$かつ$\beta$となる事象である。

この問題では，αは「A 君の得点がB 君の得点より大きい」という事象，βは「A 君の得点が整数ではない」という事象である。すると，$\alpha\cap\beta$は「A 君の得点がB君の得点より大きくて整数ではない」事象となる。

さて，このような基礎知識をスムーズに頭に浮かべつつ，まずは「A 君の得点がB 君の得点より大きい」という事象の場合の数を算出しなければならない。

これを求めるには，ちょっとした着想が必要である。A君が取り出す3 枚のカードの得点とB君の3

枚のカードの得点の大小関係は次の３通りで，これらは排反事象である。

a) A 君の得点がB 君の得点より大きい

b) A 君の得点とB 君の得点は等しい

c) A 君の得点がB 君の得点より小さい

A，B両君は同じ操作をするのだから，a)とc)の事象が起こる場合の数は同じである。そして，事象a)，b)，c)の和は両君の操作によって起こる事象のすべてである。したがって，b)の場合の数を求め，それをすべての場合の数から引いて残る数の半分が「A 君の得点がB 君の得点より大きい」という事象の場合の数ということになる。

すると，6 枚のカードから3 枚のカードを取り出す場合の数は ${}_6C_3=20$ だから，b)の事象の場合の数は20となりそうだが，そうは単純ではない。なぜなら，3枚のカードの組み合わせは違っても，得点が同じ場合があるからだ。そこで，20組の3枚のカードの得点を調べなければならない。

特定の得点に対応する3 枚のカードが1 組しかない場合は，両君がその特定の得点に等しくなる場合は1 組しかないが，2 組ある場合には，同じ得点になる組み合わせは2^2，3 組ある場合には2^3 存在する。ここでは，2 組のカードが同じ得点になる場合が６つ，3 組のカードが同じ得点になる場合が１つあるから，両君が同じ得点になるカードの組み合わせの数は $1^2\times5+2^2\times6+3^2\times1=38$ になる。

次に「A 君の得点がB君の得点より大きくて整数ではない」事象の場合の数を算出する。

整数ではない得点より小さい得点のカードの組の個数を数えればよい。得点7/3 点より小さい得点のカードの組は(1, 2, 3)の1 組のみである。次に得点8/3 点より小さい得点のカードの組は(1, 2, 3)に加え(1, 2, 4)の2 組である。というように求めて，その総和が求める事象の場合の数となる。

$\boxed{3}$ a，b，c を1 以上7 以下の互いに異なる整数とする。

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

(2) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

＜解答＞

(1)

2次方程式の解は$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$だから，有理数解をもつということは，$\sqrt{b^2-4ac}$ が有理数であること，$\sqrt{b^2-4ac}=d$とおけば，$b^2-4ac=d^2$だからd は0 または正の整数

$b^2\geqq4ac\geqq8$だから，$3\leqq b\leqq7$

$4ac=b^2-d^2=(b+d)(b-d)$

$4ac$は偶数だから，bが奇数のときdは奇数，bが偶数のときはdは0または偶数

$b=3$のとき，

$d=1$では，$4ac=8$，$ac=2$，$\therefore$ (1, 3, 2)，(2, 3, 1)

$d\geqq3$では，$4ac\leqq0$，整数a，cは存在しない

$b=4$のとき，

$d=0$では，$4ac=16$，$ac=4$，異なる整数(a, b, c)は存在しない

$d=2$では，$4ac=12$，$ac=3$，$\therefore (1, 4, 3)$，$(3, 4, 1)$

$d \geqq 4$では，$4ac \leqq 0$，条件を満たす整数a，cは存在しない

$b=5$のとき，

$d=1$では，$4ac=24$，$ac=6$，$\therefore$ $(1, 5, 6)$，$(6, 5, 1)$，$(2, 5, 3)$，$(3, 5, 2)$

$d=3$では，$4ac=16$，$ac=4$，$\therefore (1, 5, 4)$，$(4, 5, 1)$

$d \geqq 5$では，$4ac \leqq 0$，条件を満たす整数a，cは存在しない

$b=6$のとき，

$d=0$では，$4ac=36$，$ac=9$，互いに異なる整数a，cは存在しない

$d=2$では，$4ac=32$，$ac=8$，$\therefore (2, 6, 4)$，$(4, 6, 2)$

$d=4$では，$4ac=20$，$ac=5$，$\therefore (1, 6, 5)$，$(5, 6, 1)$

$d \geqq 6$では，$4ac \leqq 0$，条件を満たす整数a，cは存在しない

$b=7$のとき，

$d=1$では，$4ac=48$，$ac=12$，$\therefore (2, 7, 6)$，$(6, 7, 2)$，$(3, 7, 4)$，$(4, 7, 3)$

$d=3$では，$4ac=40$，$ac=10$，$\therefore (2, 7, 5)$，$(5, 7, 2)$

$d=5$では，$4ac=24$，$ac=6$，$\therefore (1, 7, 6)$，$(6, 7, 1)$、$(2, 7, 3)$，$(3, 7, 2)$

$d \geqq 7$では，$4ac \leqq 0$，条件を満たす整数a，cは存在しない

以上によって，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数は24　（答）

(2)

少なくも一つの整数解をもつということは，有理数解をもつ条件に包含されるから，(1)を満たす組 (a, b, c) の中から，整数解をもつ組 (a, b, c) を選べば良い。

有理数解は$\dfrac{1}{2a}(-b \pm d)$

$b=3$，$d=1$のとき

$(1, 3, 2)$では，解は-2と-1で整数解をもつ

$(2, 3, 1)$では，解は-1と$-1/2$で整数解をもつ

$b=4$，$d=2$のとき，

$(1, 4, 3)$では，解は-1と-4で整数解をもつ

$(3, 4, 1)$では，解は$-1/3$と-1で整数解をもつ

$b=5$，$d=1$のとき，

$(1, 5, 6)$では，解は-2と-3で整数解をもつ

$(6, 5, 1)$では，解は$-1/2$と$-1/3$で整数解をもたない

$(2, 5, 3)$では，解は-1と$-3/2$で整数解をもつ

$(3, 5, 2)$では，解は-1と$-2/3$で整数解をもつ

$b=5$，$d=3$のとき，

$(1, 5, 4)$では，解は-1と-4で整数解をもつ

$(4, 5, 1)$では，解は-1と$-1/4$で整数解をもつ

$b=6$，$d=2$のとき，

$(2, 6, 4)$では，解は-1と-2で整数解をもつ

$(4, 6, 2)$では，解は-1と$-1/2$で整数解をもつ

$b=6$, $d=4$のとき,

(1, 6, 5)では，解は-1と-5で整数解をもつ

(5, 6, 1)では，解は$-1/5$と-1で整数解をもつ

$b=7$, $d=1$では,

(2, 7, 6)では，解は-2と$-3/2$で整数解をもつ

(6, 7, 2)では，解は$-2/3$と$-1/2$で整数解をもたない

(3, 7, 4)では，解は-1と$-4/3$で整数解をもつ

(4, 7, 3)では，解は$-3/4$と-1で整数解をもつ

$b=7$, $d=3$では,

(2, 7, 5)では，解は-1と$-5/2$で整数解をもつ

(5, 7, 2)では，解は$-2/5$と-1で整数解をもつ

$b=7$, $d=5$では,

(1, 7, 6)では，解は-6と-1で整数解をもつ

(6, 7, 1)では，解は-1と$-1/6$で整数解をもつ

(2, 7, 3)では，解は-3と$-1/2$で整数解をもつ

(3, 7, 2)では，解は$-1/3$と-2で整数解をもつ

以上により，少なくも１つ整数解をもつ組(a, b, c)の総数は22　（答）

＜解説＞

二次方程式の解に関する問題で，条件を満たす係数の組(a, b, c)を求める。条件ごとに逐一，求めなければならないために，問題は容易だが，時間がかかることに注意する。

(1)

有理数解をもつような係数の組(a, b, c)の総数を求める。有理数解をもつという条件をa, b, cに対する条件に置き換え，逐一求めていく。

(2)

(1)の中で、整数解となる組(a, b, c)の総数を求める。これも，整数解がどうかを逐一確認しなければならない。

$\boxed{4}$　sを正の実数とする。鋭角三角形ABCにおいて，辺ABを$s:1$に内分する点をDとし，辺BCをs：3に内分する点をEとする。線分CDと線分AEの交点をFとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を求めよ。

(2) Fから辺ACに下した垂線をFGとする。FGの長さが最大となるときのsを求めよ。

＜解答＞

(1)

$\overrightarrow{AF}=t\,\overrightarrow{AE}$とおく。ただし$0<t<1$である。

△ABEを線CDが切ったと考えて，メネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{BC}{CE}\frac{EF}{FA}\frac{AD}{DB}=\frac{s+3}{3}\frac{1-t}{t}\frac{s}{1}=1,\ \therefore\ t=\frac{s^2+3s}{s^2+3s+3}$$

$$\overrightarrow{AF}=t\,\overrightarrow{AE}=t\left(\frac{3}{s+3}\overrightarrow{AB}+\frac{s}{s+3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3s}{s^2+3s+3}\overrightarrow{AB}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\overrightarrow{AC}$$

したがって，$\alpha=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}$，$\beta=\dfrac{s^2}{s^2+3s+3}$　（答）

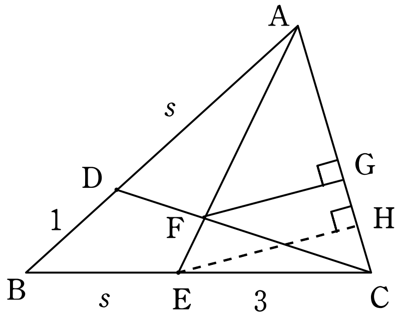

図１

(2)

ＥからACへの垂線をEHとする。FG$=t$ EH$=t$ EC$(\sin\angle ECH)$

$t=\dfrac{s^2+3s}{s^2+3s+3}$，EC$=\dfrac{3}{s+3}$BC，だから，

FG $=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}$BC$(\sin\angle ECH)=f(s)$BC$(\sin\angle ECH)$，$f(s)=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}$

したがって，$f(s)$ が最大値をとるとき，FGは最大値をとる。

$f'(s)=\dfrac{-3(s+\sqrt{3})(s-\sqrt{3})}{(s^2+3s+3)}$ だから，$f(s)$は図２のように変化し，$s=\sqrt{3}$で最大値をとる。

FGの長さが最大となるときの s は$\sqrt{3}$　（答）

s		$\sqrt{3}$	
$f'(s)$	$+$	0	$-$
$f(s)$	$\nearrow$		$\searrow$

図２

＜解説＞

(1)

図１のような略図を描いて，メネラウスの定理を使うと閃きたい。その前提として，ＥはBC上の点だから，$\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ のように表されることが閃いていなければならない。

(2)

この問題は簡単なようで，意外にも手強い問題かも知れない。(1)が誘導問題ではないかと，当然に考え始めるだろう。ところが，(1)の結論から，FGの長さの算出に関する方法は見えてこない。

そこで，FGの長さを求める方法を考えようとして，図１を凝視すると，ＥからACへの垂線を下ろす着想が浮かぶ。図形問題では，補助線が有効，という考えからくる場合もあろうし，(1)で求めたtを

使えるという閃きが出るかも知れない。そうなれば，解答へ道は開かれる。

さて，別解を考えよう。FGが最大ということは，辺ACが定まっているので，△AFCの面積が最大ということである。そこで，△AFCの面積が最大となるsを求めることを考えよう。

△AFCによって，面積を表すものとして，

$$\triangle \mathrm{AFC}=\frac{CF}{CD}\triangle \mathrm{ADC}=\frac{CF}{CD}\frac{AD}{AB}\triangle \mathrm{ABC}==\frac{CF}{CD}\frac{s}{s+1}\triangle \mathrm{ABC}$$

三角形BCDを直線AEが切ったと考えて，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{DA}{AB}\frac{BE}{EC}\frac{CF}{FD}=1,\ \frac{CF}{FD}=\frac{3(s+1)}{s^2},\ \frac{CF}{CD}=\frac{3(s+1)}{s^2+3s+3},\ \therefore \triangle \mathrm{AFC}=\frac{3s}{s^2+3s+3}\triangle \mathrm{ABC}$$

$f(s)=\dfrac{3s}{s^2+3s+3}=\dfrac{3}{s+\dfrac{3}{s}+3}=\dfrac{3}{\left(\sqrt{s}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{s}}\right)^2+2\sqrt{3}+3}$，$\therefore$ $f(s)$は$s=\sqrt{3}$のときに最大値をとる。<解答>では$f(s)$の導関数から$f(s)$の最大値を求めたが，このような方法の方がスマートである。

$\boxed{5}$ α，β，γを複素数とし，

$$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0 \qquad (*)$$

を満たす複素数zを考える。以下の問いに答えよ。

(1) zは

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\fallingdotseq 0$と仮定し，また$\gamma$は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$を満たす$z$がちょうど2個あるための必要十分条件を$\alpha$，$\beta$を用いて表せ。

<解答>

(1)

$(*)$の複素共役は $z\overline{z}+\overline{\alpha}\ \overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \qquad (**)$

$(*)-(**)$によって，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$

(2)

γは実数だから，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0$

したがって $(\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$，したがって$(\alpha-\overline{\beta})z$は実数

pを実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=p$とおく。

i) $\alpha-\overline{\beta}=0$のとき

$$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}=(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}=(z+\beta)\overline{(z+\beta)}-\beta\overline{\beta}=0$$

したがって$|z+\beta|^2=|\beta|^2$，$\therefore$ $|z+\beta|=|\beta|$となる。zは中心が$-\beta$，半径が$|\beta|$の円周上の点を表すから，zの値は無数にある。したがって，$\alpha-\overline{\beta}=0$では，$z$はちょうど2個にはならない。

ii) $\alpha-\overline{\beta}\fallingdotseq 0$のとき

$z=\dfrac{p}{\alpha-\overline{\beta}}$，これを$(*)$に代入すると，

$$\frac{p}{\alpha-\overline{\beta}}\frac{p}{\overline{\alpha}-\beta}+\frac{\alpha p}{\alpha-\overline{\beta}}+\frac{\beta p}{\overline{\alpha}-\beta}+\gamma=0$$

$p^2+\alpha(\overline{\alpha}-\beta)p+\beta(\alpha-\overline{\beta})p+\gamma(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)=p^2+(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})p+\gamma(\alpha-\overline{\beta})\overline{(\alpha-\overline{\beta})}$

$=p^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)p+\gamma|\alpha-\overline{\beta}^2|=p^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$

γ は負の実数だから，$p=\pm\sqrt{-\gamma}|\alpha-\overline{\beta}|$，すなわち$p$ が取る値 は2 個の実数である。

したがって，(*) を満たすz が2 個存在する。

(*) に $(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)$ を乗じる。

$(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)z\overline{z}+(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)\alpha z+(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)\beta\overline{z}+\gamma(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)$

$=(\alpha-\overline{\beta})z\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}+(\overline{\alpha}-\beta)\alpha(\alpha-\overline{\beta})z+(\alpha-\overline{\beta})\beta(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma(\alpha-\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\beta)$

$=|(\alpha-\overline{\beta})z|^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)(\alpha-\overline{\beta})z+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2$

$=p^2+(|\alpha|^2-|\beta|^2)p+\gamma|\alpha-\overline{\beta}^2|=p^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$

γ は負の実数だから，p が取り得る値は，0 あるいは2 個の実数である。

$p=0$ だと$\alpha-\overline{\beta}=0$となり，$z$ の値は無数に存在する。p の値が2 個存在，すなわちz が2 個存在すると，$\alpha-\overline{\beta}\fallingdotseq 0$である。

以上によって，z がちょうど2 個あるための必要十分条件は $\alpha\fallingdotseq\overline{\beta}$ である。

＜解説＞

(1)

(*) と$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$を凝視すれば，$z\overline{z}$ が消えているのだから，(*)−(**)を考えれば良いことに気づくであろう。

(2)

題意は簡明だが，解答方針を着想しなければならない。(1)をどのように利用すれば良いのか，なかなか思いつかない。γ が負の実数であるので，(1)から，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0$ が得られることに気づくと，$(\alpha-\overline{\beta})z$ が実数であることを認識することができる。

$z\overline{z}$ は実数だから，(*) は2 次方程式に帰着することが予測される。だから，z がちょうど2 個あるための条件とは，2 次方程式の解の条件に対応するのではないかと考えつく。$(\alpha-\overline{\beta})z$ が実数であることから，(*) を実数を係数とする2 次方程式に帰着させることができれば，見通しよく議論ができそうだ，という着想にいたる。

ここで，複素数の極形式表現を応用する方向に思考を進めると，複素数に対応して動径と偏角の 2 つの変数が表れるから，ややこしくなり，迷路にはまり込む。

$\boxed{6}$ a，b，c を実数とし，

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad J(a,b,c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\fallingdotseq 0$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,b)$を求めよ。

(2) $J(a,b,c)$を$I(a,b+c)$と$I(a,b-c)$を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{t\to\infty}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\ \sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\ dx$

＜解答＞

(1)

部分積分法によると,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\int\cos bx\,dx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\int\sin bx\,dx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

したがって，$\displaystyle\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)$$

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\ dx=\left[\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}}}{a^2+b^2}\left(b\sin\frac{b\pi}{2}+a\cos\frac{b\pi}{2}\right)-\frac{a}{a^2+b^2}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$I(a,b+c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b+c)x\ dx$$

$\cos(b+c)x=\cos bx\cos cx-\sin bx\sin cx$

$$I(a,b-c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b-c)x\ dx$$

$\cos(b-c)x=\cos bx\cos cx+\sin bx\sin cx$

$\cos(b-c)x-\cos(b+c)x=2\sin bx\sin cx$，$\displaystyle\sin bx\sin cx=\frac{1}{2}\{\cos(b-c)x-\cos(b+c)x\}$

$$J(a,b,c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\ \sin cx\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\{\cos((b-c)x-\cos(b+c)x)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b-c)x\ dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos(b+c)x\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\{I(a,b-c)-I(a,b+c)\}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\sin tx\cos 3tx=\frac{1}{2}\{\sin(t+3t)x-\sin(3t-t)x\}=\frac{1}{2}(\sin 4tx-\sin 2tx)$$

$$\sin 2tx\cos 4tx=\frac{1}{2}\{\sin(2t+4t)x-\sin(4t-2t)x\}=\frac{1}{2}(\sin 6tx-\sin 2tx)$$

したがって，$\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx=\dfrac{1}{4}(\sin 4tx-\sin 2tx)(\sin 6tx-\sin 2tx)$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\ \sin 2tx\ \cos 3tx\ \cos 4tx\ dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx-\sin 2tx)(\sin 6tx-\sin 2tx)\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 2tx\ \sin 2tx-\sin 4tx\sin 2tx-\sin 6tx\sin 2tx+\sin 6tx\sin 4tx)\,dx$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2tx\ \sin 2tx\ dx=2J(1,2t,2t)=I(1,0)-I(1,4t)$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 4tx\ \sin 2tx\ dx=-2J(1,4t,2t)=-I(1,2t)+I(1,6t)$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 6tx\ \sin 2tx\ dx=-2J(1,6t,2t)=-I(1,4t)+I(1,8t)$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 6tx\ \sin 4tx\ dx=2J(1,6t,4t)=I(1,2t)-I(1,10t)$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\ \sin 2tx\ \cos 3tx\ \cos 4tx\ dx=I(1,0)-2I(1,4t)+I(1,6t)+I(1,8t)-I(1,10t)$$

$$I(1,0)=e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$\lim_{b\to\infty}I(a,b)=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{\frac{a\pi}{2}}/b}{a^2/b^2+1}\left(\sin\frac{b\pi}{2}+\frac{a}{b}\cos\frac{b\pi}{2}\right)-\frac{a/b^2}{a^2/b^2+1}=0$$

したがって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}I(1,4t)=\lim_{t\to\infty}I(1,6t)=\lim_{t\to\infty}I(1,8t)=\lim_{t\to\infty}I(1,10t)=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\ \sin 2tx\cos 3tx\ \cos 4tx\ dx=I(1,0)=e^{\frac{\pi}{2}}-1$　（答）

＜解説＞

(1)

教科書の部分積分法の説明にこの種の積分が記載されている。ポイントは部分積分を２回適用することである。

(2)

$\cos(b+c)x=\cos bx\cos cx-\sin bx\sin cx$，$\cos(b-c)x=\cos bx\cos cx+\sin bx\sin cx$から，$\cos(b-c)x-\cos(b+c)x=2\sin bx\sin cx$に着眼すればよい。

(3)

$\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx$を$\sin kx$の積の多項式によって表現すればよい。すると，$J(a,b,c)$を使える。

<総評>

難しい上に，地道に数えることが必要で時間のかかる問題が含まれている。問題の着手の順序が成績に影響するように思える。まずは全問を読んで，題意を大雑把に見積り，私は，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ の順で扱いたいと思った。

$\boxed{1}$

図を描いて，題意を把握すれば，正答にいたる。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

題意の簡明な確率の問題。しかし，場合の数をていねいに数えていくという解答方法なので，時間がかかるうえ，誤り易い。逐一数える地道な方法の解答方針を短い時間で決断しないと，場合の数の数え上げに時間がかかって，時間切れになりかねない。

確率の問題は解答方針の着想が問われるのだが，この問題では，何か良い方法はないのか，などと考え始めて時間を費やすことのないようにしたい。地道に数えていくという解答方針を決めることに難しさがあるので，難易度Ｂ＋。

$\boxed{3}$

2次方程式の解と係数の関係に関する問題。有理数解，整数解を与える係数の組を求めるのだが，結局は条件を満たす整数の組を逐一確認しなければならない。数学を考えるよりも，懇切丁寧さを教えられる問題となるので，入試問題として適切か？と疑問を感じる。難易度はＢ－。

$\boxed{4}$

平面図形のベクトルによる取り扱いの問題。(1)は三角形の１辺の内分点と頂点を結ぶ線のベクトルを，それを挟む辺のベクトルによって表示する問題。この表示は教科書に記載されている基本的な知識である。このときメネラウスの定理を組み合わせることが必要となる。難易度はＢ。

(2)は(1)の結果を利用するが，必ずしも誘導的に構成されている問題ではないため，やや戸惑うかも知れない。補助線を引く，という発想が浮かべば，容易に解答に至る。三角形の頂点から対辺へ下ろした垂線の長さが最大ということは三角形の面積が最大，という気づきによって，解答方針を考えても良いが，やや計算が煩瑣となる。難易度はＢ。

$\boxed{5}$

複素数の問題。題意の理解から，解答方針の着想まで，思考力を要する。

(1)は容易だが，(2)は着想が難しく，論理展開も容易ではないので，難易度Ａ。

$\boxed{6}$

部分積分法を適用する問題であることに気づき，ていねいに計算してゆけばよい。部分積分を2度繰り返すことがポイントである。難易度Ｂ＋。

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$　理系の問題 $\boxed{4}$ に同じ。

$\boxed{2}$　p，q を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が0 以上となる点$(p\ ,\ q)$ 全体からなる領域をDとする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域D を図示せよ。

(2) D の点 (p, q) で $q \leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$f(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$

ｉ) $-\dfrac{p}{2} \leqq -1$，すなわち$p \geqq 2$のとき

最小値は$f(-1)=1-p+q$，最小値が0 以上となるには $q \geqq p-1$　①

ii) $-1 < -\dfrac{p}{2} \leqq 2$，すなわち$-4 \leqq p < 2$のとき

最小値は$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q$，最小値が0 以上となるには $q \geqq \dfrac{p^2}{4}$　②

iii) $2 < -\dfrac{p}{2}$，すなわち$p < -4$のとき

最小値は$f(2)=4+2p+q$，最小値が0 以上となるには $q \geqq -2p-4$　③

①，②，③の領域を図示すると，図１の領域D となる。

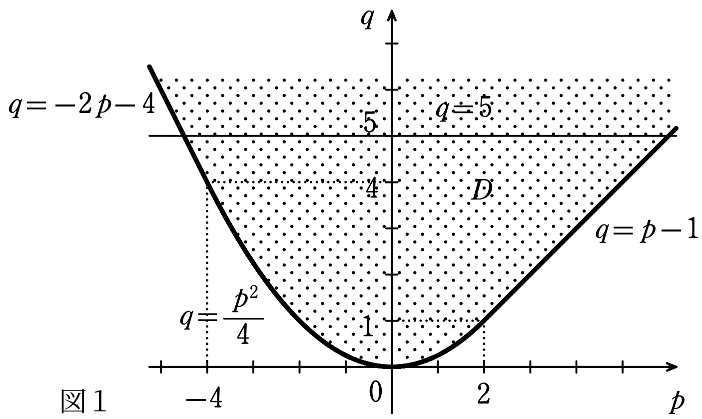

図１

(2)

$q=5$と$q=-2p-4$の交点では$p=-\dfrac{9}{2}$，$q=5$と$q=p-1$の交点では$p=6$

したがって，D の点 (p, q) で $q \leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積は

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{-4}\{5-(-2p-4)\}dp+\int_{-4}^{2}\left(5-\frac{p^2}{4}\right)dp+\int_{2}^{6}\{5-(p-1)\}dp$$

$$=\Big[p^2+p\Big]_{-\frac{9}{2}}^{-4}+\left[-\frac{p^3}{12}+5p\right]_{-4}^{2}+\left[-\frac{1}{2}p^2+6p\right]_{2}^{6}=\frac{129}{4}$$　（答）

＜解説＞

(1)

放物線の関数 $f(x)=x^2+px+q$ と領域 $-1\leqq x\leqq 2$ の位置関係によって，最小値が異なる。放物線の軸 $-\dfrac{p}{2}$ の値によって，場合分けして考える。

(2)

図１を描くことができれば，積分は容易であろう。

$\boxed{3}$ aを3で割り切れない正の整数とする。aを3で割ったときの商をb，余りをcとする。次の問いに答えよ。

(1) $c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t を b を用いて表せ。

(2) n を $n\geqq 2a-2$ を満たす整数とする。このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t が存在することを示せ。

＜解答＞

(1)

$a=3b+c$ とおける。

$c=2$ のとき，$a=3b+2$，$2a+1=6b+5=(3b+2)s+3t$

したがって，$(3s-6)b=5-2s-3t$ ①

$b=0$ のとき，$2s=5-3t\leqq 5$，$\therefore s\leqq 2$

$b\geqq 1$ のとき，$3s-6\leqq 5$，$\therefore s\leqq 3$

$s=3$ とすれば，$3t=-1-3b<0$で，t は非負の整数ではない。

$s=2$ とすれば，$3t=5-2s=1$で，t は整数ではない。

$s=1$ とすれば，$3t=3+3b$，$\therefore t=1+b$

$s=0$ とすれば，$3t=5+6b$，$\therefore t=\dfrac{5}{3}+2b$となって，$t$ は整数ではない。

以上によって，題意を満たす非負の整数は，$s=1$，$t=1+b$ （答）

(2)

$n\geqq 2a-2$ を満たす整数 n は $n=2a-2+p$ とおくことができる。

ただし，p は任意の非負の整数で $p=3q+r$，q は非負の整数で $r=0, 1, 2$ とおくことができる。

$n=2a-2+p=as+3t$ を満たす非負の整数 s，t が存在することをいえば良い。

$t=-\dfrac{1}{3}(s-2)a+\dfrac{1}{3}(p-2)=-\dfrac{1}{3}(s-2)(3b+c)+\dfrac{1}{3}(3q+r-2)$ (*)

$s=1$とすれば，$t=b+\dfrac{c}{3}+q+\dfrac{r-2}{3}$，したがって$c=2-r$であれば，$r=0$で$c=2$，$r=1$で$c=1$となり $t=b+q$ と非負の整数をとる。

$s=2$ とすれば，$t=q+\dfrac{r-2}{3}$，したがって $r=2$ であれば，$t=q$ と非負の整数をとる。

以上のようにpが任意の非負の整数であっても，

$n=2a-2+p=as+3t$ を満たす非負の整数 s，t が存在するから，
題意を満たす非負の整数 s，t が存在する。

＜解説＞

整数の問題で，一見容易そうだ。しかし，文系の問題としては，難しいものを含んでいる。

(1)

①式を導き，s の値を限定して，t が非負の整数になる値を見つける。s の値を限定することにより，簡単な式にして，t が非負の整数になるかどうか，具体的に調べることがポイントである。

(2)

文系の問題としては，難しい問題である。解答方針に着想が必要で，$n \geqq 2a-2$ を満たす整数 n を $n=2a-2+p$ とおいて， 任意の非負の整数 p に対して，$n=2a-2+p=as+3t$ を満たす非負の整数 s，t が存在することを示す，と問題を整理する。

その上で，t の表式 (*)を凝視して，非負のs に対して，t が非負の整数をとるかどうかを考察する。ここでは，(1)でとった方法が有効になる。$s=1$，2で (*)は簡単な式になりそうなことがわかるから，それぞれについて，t が非負の整数になるかを，具体的に調べてみる。

$p=3q+r$，$r=0,1,2$ に対して，非負の整数s，t の存在をいえば良いのだから，$s=1$，2で調べれば十分であることがわかる。

ここで，$n\geqq 2a-2$，このとき $n=as+3t$ を満たすs，t を探すということから，$as+3t\geqq 2a-2$として考察を始めてはどうか。

すると， $t\geqq -\dfrac{a}{3}s+\dfrac{2}{3}(a-1)$

$s=2$とすれば，$t\geqq -\dfrac{2}{3}$，したがって$t\geqq 1$であれば良いから，題意を満たす負でない整数 s，t が存在する，などと容易に解答ができる。

ところが，解答に示したように，$s=2$の場合，$n=2a-2+p=2a-2+3q+r$ において，$r=2$の場合にのみ，t は非負の整数がとれる。このような解答では不十分であることがわかる。

何が，拙かったのであろうか。

$n\geqq 2a-2$ に対して$n=as+3t$とおくことができれば，$as+3t\geqq 2a-2$である。すなわち後者は前者の必要条件である。しかし，$as+3t\geqq 2a-2$であれば，$n\geqq 2a-2$ に対してnを$n=as+3t$のように表現できるという保証はない。すなわち，後者は前者の十分条件ではない。すなわち，

命題「$n\geqq 2a-2$ に対して$n=as+3t$とおくことができる」と命題「$as+3t\geqq 2a-2$」は等価ではないのである。

ただし正答の着想に至らないとき，白紙答案を出すくらいならと，このような解答を記載したとき，どのように採点されるか。少なくも白紙よりましであることは確かである。

$\boxed{4}$ 　理系の問題 $\boxed{2}$ にほぼ同じ。(1)は同じ，(2)は少し容易になっている。

(2) A君の得点が整数でなく，かつ， B君の得点より大きい確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

理系の問題 $\boxed{2}$ (1) の解答を参照のこと。

(2)

理系の問題 $\boxed{2}$ (2) の解答を参照のこと。

A 君の得点が整数ではなくてB 君の得点より大きい場合の数は，28 組

A 君の得点が整数ではなくてB 君の得点より大きい確率は，$\dfrac{28}{400}=\dfrac{7}{100}$

＜総評＞

$\boxed{1}$

理系の $\boxed{4}$ に同じ。文系の問題としては，やや難易度はやや高くＢ＋。

$\boxed{2}$

2 次関数の最小値と面積積分の問題。題意は簡明であり，正答して落ち着きたい。難易度はＣ。

$\boxed{3}$

一見容易そうだが，正答には骨が折れそうだ。だからといって，無回答にしてはいけない。自分なりの思考を続けて，解答を書き，部分点でも確保すること。難易度は(1)はＢ－，(2)はＢ＋。

$\boxed{4}$

理系の問題 $\boxed{2}$ にほぼ同じで，少し容易になっている。文系の数学問題としては難易度はＡ－。

180328