2017（H29）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$ (60点)

次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数Nをすべて求めよ.

(i)　Nの正の約数は12 個.

(ii)　Nの正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12 .

ただし，Nの約数には 1とNも含める.

<解答>

Nを素因数分解して，$N = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$，素数 $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$とする。

すると約数の数は $(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_{k-1}+1)(n_k+1) = 12 = 2\times2\times3 = 3\times4 = 2\times6 = 1\times12$

したがって，$k \leqq 3$で，$(n_1,\ n_2,\ n_3)$ の組み合わせとしてあり得るのは

$(1, 1, 2)$，$(2, 3, 0)$，$(1, 5, 0)$，$(11, 0, 0)$ の４組，ただし，n_1，n_2，n_3 の順序は問わない。

小さい方から7 番目の約数が $12=2^2\times3^1$ であるから，$N=2^{n_1}\times3^{n_2}\times p_3^{n_3}$，$n_1 \geqq 2$，$n_2 \geqq 1$である。

$(1, 1, 2)$ のとき，$n_1=2$，$n_2=1$，$n_3=1$

$N=2^2\times3\times p_3$とすれば,

$p_3=5$ のとき，Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，5，6，10，12，．．．

しかし，$2^2\times3=12$ は 8 番目の約数

$p_3=7$ のとき，Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，6，7，12，14，．．．

$2^2\times3=12$ は 7 番目の約数だから，条件を満たし，$N=2^2\times3\times7=84$

$p_3=11$ のとき，Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，6，11，12，22，．．．

$2^2\times3=12$ は 7 番目の約数だから，条件を満たし，$N=2^2\times3\times11=132$

$p_3 \geqq 13 > 12$ の素数では，12 は 6 番目の約数になるので，$p_3 \geqq 13$ は該当しない。

$(2, 3, 0)$のとき，$n_1=2$，$n_2=3$，$n_3=0$ あるいは，$n_1=3$，$n_2=2$，$n_3=0$

$N=2^2\times3^3$とすれば,

Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，6，9，12，15，．．．

$2^2\times3=12$は 7 番目の約数だから，条件を満たし，$N=2^2\times3^3=108$

$N=2^3\times3^2$とすれば,

Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，6，8，9，12，．．．

しかし，$2^2\times3=12$ は 8 番目の約数

$(1, 5, 0)$のとき，$n_1=5$，$n_2=1$，$n_3=0$

$N=2^5\times3$ だから,

Nの約数は小さい順に，1，2，3，4，6，8，12，16，．．．

$2^2\times3=12$は 7 番目の約数だから，条件を満たし，$N=2^5\times3=96$

以上の結果，条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N は 84 , 96 , 108 , 132　(答)

＜解説＞

整数の問題は，解答方針を着想し，論理の流れを構築しなければならないので，難しい。

約数の個数が 12 ということから，整数を素因数分解したときの素数の個数と 12 を結びつけることを着想したい。すると，あるべき素数の個数の候補が決まる。

それらに対して，小さい方から順に7 番目の約数が 12 になるという条件から，あるべき素数を決めていく，ということが論理の流れである。$12=2^2\times3$ だから，あるべき素数は 2 と 3 である。

ところが，7 番目の約数を求める一般的な論理があるわけではないので，いちいち数え上げていかなければならない。

しかし$2^2\times3$ で作れる約数は，1，2，3，4，6，12 であるから，12 が7 番目の約数であるためには，5，7，8，9，10のいずれか一つが約数として入るような $N=2^{n_1}\times3^{n_2}\times p_3^{\ n_3}$，$n_1\geqq2$，$n_2\geqq1$であれば良い，ということになる。

このような解答方針を描いてから，解答を執筆すると，時間がかかり過ぎてしまうかも知れない。およその推論で執筆を進めながら，思考を往還させて整理しつつ執筆を進めたい。こうすることが，解答方針の明確化にもつながる。すると答案が汚く，読み難くなるかも知れない。答案の上手な執筆，修正を心がけたい。

$\boxed{2}$ (60点)

実数xの関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ.

＜解答＞

$g(t)=\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$，$G(t)=\displaystyle\int g(t)dt$とすれば，$f(x)=G\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-G(x)$

kを整数として，

$2k\pi\leqq t<(2k+1)\pi$ のとき，$g(t)=\dfrac{\sin t}{1+\sin^2 t}$，$\therefore\ f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$

$(2k+1)\pi\leqq t<2(k+1)\pi$ のとき，$g(t)=\dfrac{-\sin t}{1+\sin^2 t}$，$\therefore\ f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt$

被積分関数 $g(t)=\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$ は図１のように，周期π の周期関数だから，$f(x)$の最大値と最小値を考える場合，$0\leqq x\leqq\pi$で考えれば良い。

(ｉ) $0\leqq x$，$x+\dfrac{\pi}{2}\leqq\pi$，すなわち，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき

$u=\cos t$とおけば，$\dfrac{du}{dt}=-\sin t$

$$\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\int\frac{-du}{2-\cos^2 t}=\int\frac{du}{\cos^2 t-2}=\int\frac{du}{(\cos t+\sqrt{2})(\cos t-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du\right\}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{\log|u-\sqrt{2}|-\log|u+\sqrt{2}|\}+Const.$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+Const.=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}}\right|+Const.$$

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}}\right|\right]_x^{x+\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left(\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)\right]_x^{x+\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{(\sqrt{2}+\sin x)(\sqrt{2}+\cos x)}{(\sqrt{2}-\sin x)(\sqrt{2}-\cos x)}\right\}$$

$$f'(x)=G'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-G'(x)=g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-g(x)=\frac{\sin(x+\pi/2)}{1+\sin^2(x+\pi/2)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

図２のように$f(x)$は変化し，$x=\frac{\pi}{4}$で最大値，$x=0$または$\frac{\pi}{2}$で最小値をとる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{(\sqrt{2}+1/\sqrt{2})(\sqrt{2}+1/\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1/\sqrt{2})(\sqrt{2}-1/\sqrt{2})}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

$$f(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$$

（ii）$\frac{\pi}{2}<x$，$\pi<x+\frac{\pi}{2}\leqq\frac{3\pi}{2}$，すなわち，$\frac{\pi}{2}<x\leqq\pi$のとき

$$f(x)=\int_x^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}}\right|\right]_x^{\pi}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}}\right|\right]_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{(\sqrt{2}+\sin x)(\sqrt{2}-\cos x)}{(\sqrt{2}-\sin x)(\sqrt{2}+\cos x)}\right\}$$

$$f'(x)=G'(\pi)-G'(x)+G'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-G'(\pi)=g(\pi)-g(x)+g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-g(\pi)$$

$$=0-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}+0=-\frac{(\cos x+\sin x)(1+\cos x\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

図３のように$f(x)$は変化し，$x=\frac{3\pi}{4}$で最小値，$x=\frac{\pi}{2}$またはπで最大値をとる。

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)-\frac{\log 3}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$$

以上の結果，最大値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$，最小値は $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$　（答）

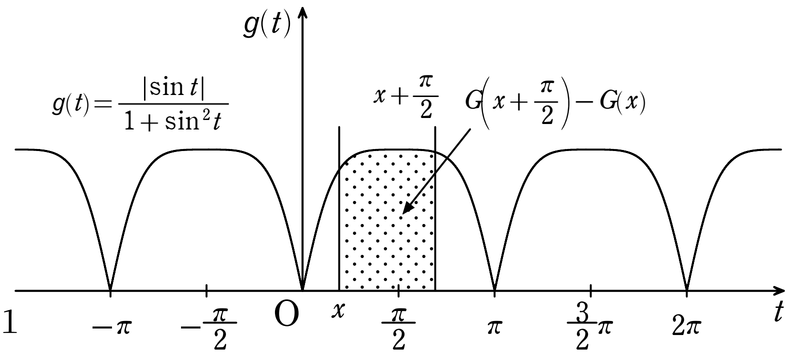


図１

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘	

図２

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	

図３

＜解説＞

問題文は短く，題意は簡明なのでとりかかり易い問題である。しかし，容易な問題ではなく，正答に至るまでには，的確な考慮を必要とするポイントがある。

まずは，解答方針を考えるために，やろうとしていることを具体的に理解する。被積分関数がどのような関数なのか，凝視して，関数の変化を頭に描き，大雑把に理解したら，図を描いてみることだ。すると，関数の大雑把な形，積分する範囲，被積分関数の表現を変えることなどが理解できるだろう。

ここでは，図１のような図を描いて，変数xの範囲と積分する領域などを確認し，具体的な積分計算のイメージを把握する。

次に，積分計算である。被積分関数の絶対値を変数の範囲によって，場合分けして，絶対値記号をはずす。そして，不定積分を求めるのだが，三角関数の置換積分法と部分分数分解を用いて，被積分関数を積分可能な関数に変換することがポイントである。数IIIの教科書に記載されているので，直ちに理解できるであろう。

かくして，定積分の結果得られる関数$f(x)$の最大値，最小値を求めることになる。このとき，スムーズに求めるための要領を知っておいた方が良い。最大値，最小値を求めるのだから，導関数を計算して，極値を与えるxを求めようとする。このとき，求めた$f(x)$を微分しようと考えてはならない。$f(x)$は積分して得られた関数なのだから，被積分関数から導関数が容易に求まる，と考える。本問でも実際に，導関数が被積分関数から容易に求まる。

一方，時間に追われているときは，もっと簡便な方法がある。関数$f(x)$は図１の打点部の面積だから，その面積が最大，最小になる場合を考える。被積分関数は $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ で線対称の上に凸だから，積分範囲が線対称のとき，最大値になるという直観が働く。つまり，積分範囲 $\left(x\,,\,x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ を$x=\dfrac{\pi}{2}$の両側に対称にとれば，最大値となるということである。すなわち，$x=\dfrac{\pi}{4}$が最大値を与える。最小値についても，図１を観察すれば，積分範囲が$x=\pi$に関して対称になる場合と直観が働くから，$x=\dfrac{3\pi}{4}$が

最小値を与えるとして計算する。

これらは，厳密には証明しなければならないのだが，上記のような説明で，満点となるのか，あるいは減点がどの程度なのか。少なくも，最大値，最小値を解答できないよりも高得点であろう。

$\boxed{3}$（60点）

a を1以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD$=1$，AB$=a$ である．P を辺 AB 上の点とし，AP $=x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1)　S を a と x で表せ.

(2)　$a=1$ とする．P がA から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ.

<解答>

(1)

図１，２，３のように折れ線が辺と交わる点をQ，Rとする。QRは線分PDの垂直2等分線である。xの大きさによって，以下の３つの場合に分けて考える。

ｉ) x が小さく，Q がAD 上に，R が BC 上にある場合（図１）

このとき，$0<x\leqq a-\sqrt{a^2-1}$

$S=$三角形C’E’Rの面積$=$三角形CERの面積$=\dfrac{1}{2}$CR×CE

$$\mathrm{CR}=\mathrm{DQ}-\mathrm{DC}\tan\theta=\frac{DM}{\cos\theta}-a\tan\theta=\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\cos\theta}-a\tan\theta=\frac{1+x^2}{2}-ax$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CR}\tan 2\theta=\left(\frac{1+x^2}{2}-ax\right)\frac{2x}{1-x^2}$$

$$S=\frac{x}{1-x^2}\left(\frac{1+x^2}{2}-ax\right)^2 \quad （答）$$

ここで，$\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

ii) Q がAD 上，R がCD 上にある場合（図２）

PQ＝QDだから，AP≦ADすなわち$x\leqq 1$で，折ったとき三角形QDRは長方形内に含まれる。

このとき，$a-\sqrt{a^2-1}<x\leqq 1$

$S=0$　（答）

iii) Q がAB 上にある場合（図３）

このとき，$1<x\leqq a$

三角形QDM≡三角形QPMだから，AQ$=q$として，QD$=$QP$=x-q$

直角三角形ADQにおいて，$(x-q)^2=q^2+1^2$，$\therefore\ q=\dfrac{x^2-1}{2x}$，

$S=$三角形ADQの面積$=\dfrac{1}{2}$AD×AQ$=\dfrac{x^2-1}{4x}$　（答）

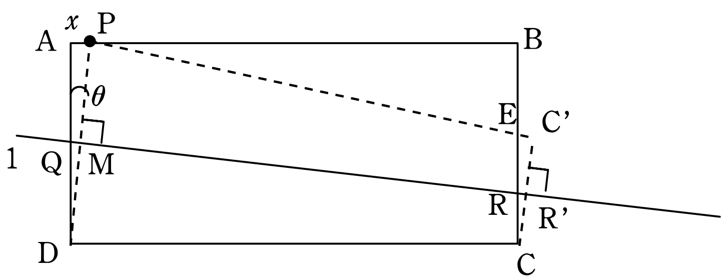
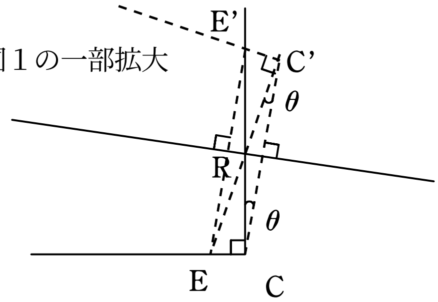


図１

図１の一部拡大



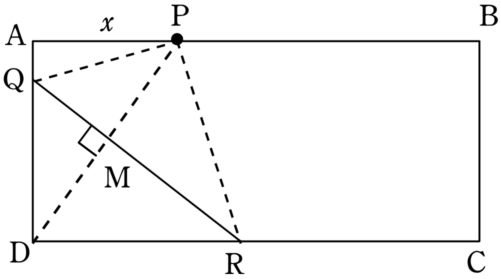


図２

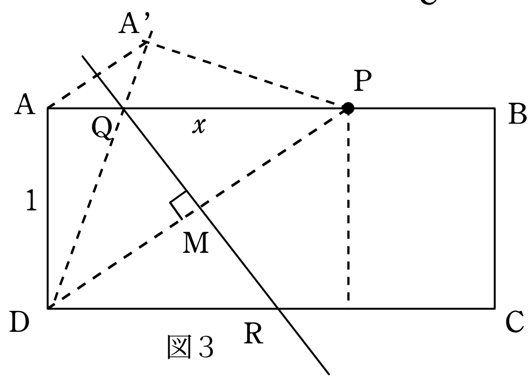


図３

(2)

$a=1$なので，(1) i)の場合である。

$S(x)=\dfrac{x}{1-x^2}\left(\dfrac{1+x^2}{2}-x\right)^2=-\dfrac{x(x-1)^3}{4(x+1)}$，$0<x\leqq 1$

$S'(x)=-\dfrac{(x-1)^2(3x^2+4x-1)}{4(x+1)^2}$，$S'(x)=0$は$x=\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$

$S(x)$は図４のように変化するので，Sを最大にするのは，$x=\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$　（答）

x	0		$\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$		1
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗		↘	

図４

＜解説＞

単純な図形の問題なのだが，注意深く題意を分析しないと，不十分な取扱いをする恐れがある。xの値によって，折れ線が図１，２，３のように変化するということだ。それによって，もとの長方形からのはみ出し方が異なる。このことに気づく必要がある。

その前提として，折れ線はPDの垂直2 等分線になることに気づく必要がある。

$\boxed{4}$ (60点)

n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合をA_n とする．A_n の要素に対し次の条件 (∗) を考える．

(∗) 文字 c が２つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1)　A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件 (*) を満たす確率$P(n)$を求めよ．

(2)　$n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件 (*) を満たし，その7番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

＜解答＞

(1)

A_n のうち，(*) を満たす要素のうちa またはb が末尾となる要素の数をB_n とする。

A_n のうち，(*) を満たす要素のうちc が末尾となる要素の数をC_n とする。

すると，A_n のうち，(*) を満たす要素の数は $S_n = B_n + C_n$

A_n の要素の数は 3^n だから，$P(n) = \dfrac{S_n}{3^n} = \dfrac{B_n + C_n}{3^n}$

B_{n+1} の要素の数を考えると，B_n に文字 a またはbが付いたものに加え，C_n に a または b が付いたものがあるから，$B_{n+1} = 2B_n + 2C_n$

C_{n+1} の要素の数を考えると，B_n に文字c が付いたものだから，$C_{n+1} = B_n$

したがって，$B_{n+1} = 2B_n + 2B_{n-1}$

$B_{n+1} - \alpha B_n = \beta(B_n - \alpha B_{n-1})$　または

$B_{n+1} - \beta B_n = \alpha(B_n - \beta B_{n-1})$　とおくことができる。

$\alpha + \beta = 2$，$\alpha\beta = -2$ だから，α，β は2 次方程式$x^2 - 2x - 2 = 0$の解で，$\alpha < \beta$とすれば,

$\alpha = 1 - \sqrt{3}$，$\beta = 1 + \sqrt{3}$

$B_{n+1} - \alpha B_n = \beta(B_n - \alpha B_{n-1}) = \cdots = \beta^n(B_1 - \alpha B_0) = \beta^n(2 - \alpha) = \beta^{n+1}$　①

$B_{n+1} - \beta B_n = \alpha(B_n - \beta B_{n-1}) = \cdots = \alpha^n(B_1 - \beta B_0) = \alpha^n(2 - \beta) = \alpha^{n+1}$　②

①−②により，$(\beta - \alpha)B_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$，ここで$B_1 = 2$，$B_0 = 1$

$B_n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$，$\dfrac{B_{n+1}}{2} = \dfrac{\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}}{2(\beta - \alpha)} = B_n + C_n$

$P(n) = \dfrac{B_n + C_n}{3^n} = \dfrac{(1+\sqrt{3})^{n+2} - (1-\sqrt{3})^{n+2}}{4\sqrt{3}\cdot 3^n} = \dfrac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}$　（答）

(2)

(*) を満たす文字列のうち7番目の文字がcである文字列の事象をT_7

(*) を満たす文字列のうち10番目の文字がcである文字列の事象をT_{10}

7番目の文字がcかつ10番目の文字がcである文字列の事象は$T_7 \cap T_{10}$

求める確率はT_7の事象が発生する条件で，$T_7 \cap T_{10}$の事象が発生する確率だから，$Q(n)$は条件付き確率であって，$Q(n) = \dfrac{P(T_7 \cap T_{10})}{P(T_7)}$，ただし$P(T)$は事象$T$が発生する確率を示すものとする。

8番目以降の文字列が(*) を満たす文字列の数は$(B_{n-8} + C_{n-8})$，$n = 8, 9, 10, \ldots$，だから，

事象T_7の数は，$C_7(B_{n-8} + C_{n-8})$，したがって$P(T_7) = \dfrac{C_7(B_{n-8} + C_{n-8})}{3^n}$

11番目以降の文字列が(*) を満たす文字列の数は$(B_{n-11}+C_{n-11})$，$n=11, 12, 13, \ldots,$

7番目の文字がc，かつ10番目の文字がcの10個の文字列の数を考える。

7番目の文字がcの7個の文字列の数はC_7，8番目，9番目はcではないから，10番目の文字がcである10個の文字列の数は$2\times2\times C_7$，したがって事象$T_7\cap T_{10}$の数は$4C_7(B_{n-11}+C_{n-11})$

したがって，$P(T_7\cap T_{10})=\dfrac{4C_7(B_{n-11}+C_{n-11})}{3^n}$

$$Q(n)=\frac{4(B_{n-11}+C_{n-11})}{B_{n-8}+C_{n-8}}=\frac{4(\beta^{n-9}-\alpha^{n-9})}{\beta^{n-6}-\alpha^{n-6}}=4\beta^{-3}\frac{\left\{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-9}\right\}}{\left\{1-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-6}\right\}}$$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$だから，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-6}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-9}=0$

したがって，$\lim\limits_{n\to\infty}Q(n)=4\beta^{-3}=\dfrac{4}{(\sqrt{3}+1)^3}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^3}{2}$　（答）

＜解説＞

確率の問題は解答方針を着想することが必要である。この問題では，その着想には意外性が伴うので，難解な問題である。

(1)

確率漸化式を立てて，求めるという考えは直ぐに浮かぶであろう。ところが，n個の文字からなる文字列でcが２つ以上連続して続くことのない文字列の確率の漸化式が立て難いのだ。

A_nのうち，(*) を満たす要素をT_nとすれば，T_{n-1}，T_{n-2}を用いて，

$T_n=(T_{n-1}, a)$，確率は$P(n-1)\times1/3$

(T_{n-1}, b)，確率は$P(n-1)\times1/3$

(T_{n-2}, a, c)　確率は$P(n-2)\times(1/3)\times(1/3)$

(T_{n-2}, b, c)　確率は$P(n-2)\times(1/3)\times(1/3)$

のように考えれば，確立漸化式が導けそうな気がする。ところが，T_{n-1}の末尾がaまたはbなら，$T_n=(T_{n-1}, c)$が存在するし，T_{n-2}の末尾がaまたはbなら，$(T_{n-2}, c, a\ or\ b)$のような文字列が存在するので，上記のような考え方では不十分になってしまう。

そこで，A_nのうち，(*) を満たす要素のうち，末尾がaまたはbであるものをX_nとし，末尾がcであるものをY_nとすればどうか。すると，

$X_n=(X_{n-1}, a\ or\ b)$ または $(Y_{n-1}, a\ or\ b)$

$Y_n=(X_{n-1}, c)$

X_nとY_nは排反事象だから，$P(n)=P(X_n\cup Y_n)=P(X_n)+P(Y_n)$

$(X_{n-1}, a\ or\ b)$ と$(Y_{n-1}, a\ or\ b)$は排反事象だから，以下の確率漸化式が求まる。

$P(X_n)=\dfrac{2}{3}P(X_{n-1})+\dfrac{2}{3}P(Y_{n-1})=\dfrac{2}{3}P(X_{n-1})+\dfrac{2}{9}P(X_{n-2})$　③

$P(Y_n)=\dfrac{1}{3}P(X_{n-1})$　④

確率漸化式③，④を解けば良い。これは，上記の解答と同じ結果を得るのだが，確率として扱うため係数$\dfrac{1}{3}$が計算についてまわり，煩瑣になる。これを避けるためには，上記の解答のように，事象の数の漸化式を扱い，結果を事象の全数 3^nで除して，確率とすることが良い。

次に，漸化式$B_{n+1}=2B_n+2B_{n-1}$ の解法が問題となる。

$B_{n+1}-\alpha B_n=\beta(B_n-\alpha B_{n-1})$

$B_{n+1}-\beta B_n=\alpha(B_n-\beta B_{n-1})$

とおいて，①，②を導き，②−①により，B_nを求めるという真にスマートな方法がある。覚えておいて損はない。これを知らない（気づかない）場合，

$B_{n+1}-\alpha B_n=\beta(B_n-\alpha B_{n-1})=\beta^2(B_{n-1}-\alpha B_{n-2})=...=\beta^n(B_1-\alpha B_0)=\beta^n(2-\alpha)=\beta^{n+1}$

$B_{n+1}=\alpha B_n+\beta^{n+1}=\alpha\{\alpha B_{n-1}+\beta^n\}+\beta^{n+1}=\alpha^2\{\alpha B_{n-2}+\beta^{n-1}\}+\alpha\beta^n+\beta^{n+1}$

$=\alpha^3B_{n-2}+\alpha^2\beta^{n-1}+\alpha\beta^n+\beta^{n+1}$

$=\cdots=\alpha^nB_1+(\alpha^{n-1}\beta^2+\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots+\beta^{n+1})$

$=2\alpha^n+\{1+(\beta/\alpha)+(\beta/\alpha)^2+\cdots+(\beta/\alpha)^{n-1}\}\alpha^{n-1}\beta^2=2\alpha^n+\dfrac{1-(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)}\alpha^{n-1}\beta^2$

$=2\alpha^n+\dfrac{\alpha^n\beta^2-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}}{\beta-\alpha}$

などと，かなり煩瑣な計算を誤りなく進めなくてはならない。

また，ここで，$B_1=2$，$B_0=1$とおくことも意味がある。$B_1=2$は問題なかろう。１文字の列でaまたはbとなるのはaおよびbの２つの文字列である。$B_0=1$となるのはなぜか。

これは，$B_1=2B_0+C_0=2$，$C_1=B_0=1$を満たすためである。

(2)

まずは題意を的確に把握しよう。7番目の文字がcである文字列の中で10番目の文字がcである文字列の確率を求めるということから，7番目の文字がcであることを前提（条件）とした確率を考えることになる。条件付き確率であることを直ちに気づこう。

すると，7番目の文字cであるn個の文字列の数，7番目と10番目の文字がcであるn個の文字列の数を求めれば良いことがわかる。

$\boxed{5}$ (60点)

実数a，b，c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく．

また，複素数平面内の単位円周から 2点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ．

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点(a,b)の範囲を座標平面上に図示せよ．

＜解答＞

(1)

$f(x)=x^2+cx+1=0$の解がT上にあるとすれば，実数ではない。

したがって，2 次方程式の解の判別式 $D=c^2-4<0$，$\therefore\ -2<c<2$

$-2<c<2$であれば，$f(x)=x^2+cx+1=0$ の解の判別式 $D=c^2-4<0$ だから，

$f(x)=x^2+cx+1=0$は，実数解はもたず，複素数解 z，および共役な複素数解$\overline{z}$をもつ。

解と係数の関係から，$z\overline{z}=|z|^2=1$ だから，z，$\overline{z}$ は T 上にある。

以上によって，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は $-2<c<2$ （答）

(2)

zを$F(x)=0$ の解とする。$F(z)=z^4+az^3+bz^2+az+1=0$

$\overline{F(z)}=\overline{z^4}+\overline{a}\,\overline{z^3}+\overline{b}\,\overline{z^2}+\overline{a}\,\overline{z}+1=(\overline{z})^4+a(\overline{z})^3+b(\overline{z})^2+a\overline{z}+1=F(\overline{z})=0$

したがって，zが$F(x)=0$ の解であれば，$\overline{z}$も$F(x)=0$の解である。

$F(x)=0$ は実数係数の 4 次方程式で，解はすべて T 上にあれば，４つの複素数の解をもつ。

それらをz_1，$\overline{z_1}$，z_2，$\overline{z_2}$とおくことができるから，

$F(x)=(x-z_1)(x-\overline{z_1})(x-z_2)(x-\overline{z_2})=\{x^2-(z_1+\overline{z_1})+z_1\overline{z_1}\}\{x^2-(z_2+\overline{z_2})+z_2\overline{z_2}\}$

$=\{x^2-(z_1+\overline{z_1})+1\}\{x^2-(z_2+\overline{z_2})+1\}$

実数 c_1，c_2 を，$c_1=-(z_1+\overline{z_1})$，$c_2=-(z_2+\overline{z_2})$とすれば，$c_1$，$c_2$ とも実数で

$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$が成立する。

(3)

$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)=0$の解がすべて$T$上にあるための必要十分条件は，(1)から

$-2<c_1<2$，$-2<c_2<2$ ①

$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(2+c_1c_2)x^2+(c_1+c_2)x+1$

したがって，$a=c_1+c_2$，$b=2+c_1c_2$

c_1，c_2 は 2 次方程式 $g(t)=t^2-(c_1+c_2)t+c_1c_2=t^2-at+b-2=0$ ② の解である。

②が①を満たす実数解をもつためには，

解の判別式 $D=a^2-4(b-2)\geqq 0$，$\therefore\ b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$ ③

解の範囲が$(-2, 2)$であるための条件として，

$g(-2)=2a+b+2>0$，$b>-2a-2$ ④

$g(2)=-2a+b+2>0$，$b>2a-2$ ⑤

③，④，⑤を満たす(a, b)の範囲は図１の打点部であり，境界線は曲線部のみ含む。

したがって，$F(x)=0$の解がすべてT上にあれば，(a, b)の範囲は図１の打点部である。

逆に図１の打点部の(a, b)であれば，c_1，c_2 は①を満たす実数であるから，$F(x)=0$の解がすべてT上にある。

以上をまとめると，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は，③，④，⑤であり，それらを満たす(a, b)の範囲は図１の打点部であり，境界線は曲線部のみ含む。

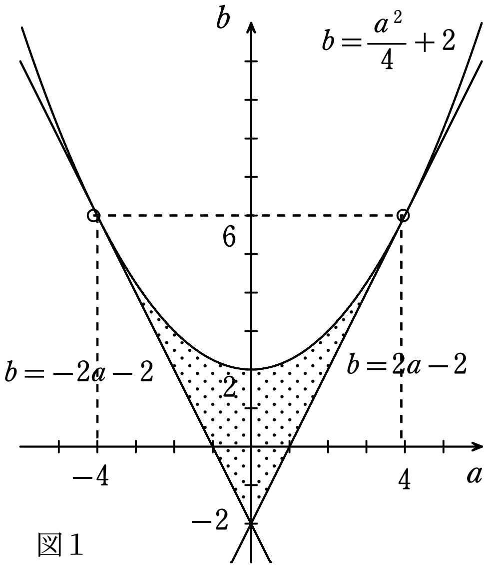


図１

<解説>

(1)

直ぐに思いつく方法を記載しよう。

$f(x) = x^2+cx+1 =0$ の解は$x=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}$，これが$T$上にあるということは$x$が実数を除く複素数であるということだから，$c^2-4<0$，$\therefore -2<c<2$

$-2<c<2$であれば，$\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}=\dfrac{-c}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4-c^2}}{2}i=\alpha+i\beta$ とおくと，

$\alpha^2+\beta^2=\left(\dfrac{-c}{2}\right)^2+\left(\pm\dfrac{\sqrt{4-c^2}}{2}\right)^2=1$ だから，この複素数はT上にある。

以上によって，$f(x)=0$ の解がすべてT上にあるための必要十分条件は $-2<c<2$　（答）

(2)

ここでの前提は4次方程式は４つの解をもつということである。そして，実数係数の4次方程式で複素数解をもつ場合には，それと共役な複素数も解となる。このことは，解答中で説明した。したがって，４つの複素数解をもつということは，２つの複素数解とそれらと共役な２つの複素数解をもつということである。

共役な複素数の和と積は実数である。一方が単位円上にあれば，他方もまた単位円上にある。両者の積は1である。

(3)

解答方針を考えるとき，(1)，(2)が誘導問題となっていることに気づかなければならない。
(c_1, c_2)の条件から(a, b)の条件を検討する。(c_1, c_2)と(a, b)の関係は容易に求まる。この関係が2次方程式の解と係数の関係になることに着眼できるかが，その後の取り扱いの難易を左右する。

＜総評＞

５問で180分，300点満点だけに，なかなか骨の折れる問題が揃っている。解答方針を構想するだけで，時間を消費してしまいそうである。だから，大雑把に解答方針を考え，解答を具体的に書き下しながら，方針を点検、修正しつつ，解答するという柔軟な姿勢が必要である。1問 60 点配点だから，部分点を少しでも多く積み上げることが重要になろう。

私は$\boxed{4}$が特に難しいと感じた。解答順序は２，３，５，１，４の順に手がけたいと思った。

$\boxed{1}$

整数の問題で，一読して解答方針が難しい印象を受ける。約数の個数ということから，整数の素因数分解が閃くようでありたい。約数が12ということから，素因数とその個数の条件が求まることに気づきたい。これらのことから，解答の流れを描きたい。難易度はＡ－。

$\boxed{2}$

題意は簡明で，解答方針も考え易い。まずは被積分関数がどのようなものか，図を描いて把握しよう。すると，大雑把に，最大値，最小値を与える条件が見えてくる。難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

図形の問題。図を描いて，題意を理解し，場合分けの必要なことを理解しよう。図形の問題としては，初歩的な考え方ですむ。計算も難しくはない。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

確率の問題で，確率漸化式の代わりに，場合の数の漸化式を立て，求める場合の数から確率を求める。解答方針の着想，計算方法等に難しさがある。(2)も解答式の算出に着想が必要であり，なかなか難しい問題である。難易度Ａ＋。

$\boxed{5}$

複素数の問題であるが，複素数の基本，方程式の解の特性，解と係数の関係，必要条件と十分条件など，数学的に幅広い知識と応用を問うている。解答方針に着眼，着想も必要であり，難易度はＡ－。

180516