2017（H29)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

実数a，bに対して

$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$と$g(\theta)$を$x=\cos\theta$の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ。
　また，条件を満たす点$(a,\ b)$が描く図形を座標平面上に図示せよ。

＜解答＞

(1)

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$だから，

$f(\theta)=4\cos^3\theta+2a\cos^2\theta+(b-3)\cos\theta-a=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a$　（答）

$f(0)=4+2a+(b-3)-a=a+b+1$

$f(\theta)-f(0)=4x^3+2ax^2+(b-3)x-2a-b-1=(x-1)\{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1\}$

$g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}=4x^2+2(a+2)x+2a+b+1$　（答）

(2)

$0<\theta<\pi$のとき，$-1<x<1$である。

$g(\theta)=4x^2+2(a+2)x+2a+b+1=G(x)$とおく。

$$G(x)=4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2-\left(\frac{a+2}{2}\right)^2+(2a+b+1)$$

$$=4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a+b$$

$G(x)$は，$x=-\dfrac{a+2}{4}$のとき，

最小値$-\dfrac{a^2}{4}+a+b$をとる。

$-1<x<1$だから，$-1<-\dfrac{a+2}{4}<1$，

すなわち$-6<a<2$のときのみ，最小値をとる。

$-\dfrac{a^2}{4}+a+b=0$とおけば，

最小値 0 をとるための条件は $b=\dfrac{a^2}{4}-a$　（$-6<a<2$）　（答）

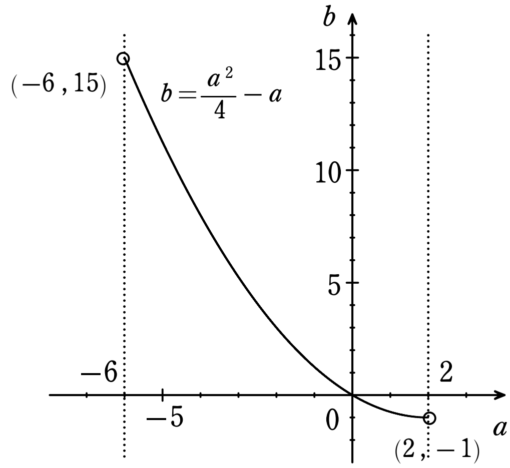

図１

条件を満たす点$(a,\ b)$が描く図形は図１である。ただし○は除く。

<解説>

(1)

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$ を利用する。

(2)

$-1<x<1$ における最小値だから，$G(x)$の最小値を与える x がこの範囲にない場合は，最小値は存在しないことに注意する。

第　2　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m\ ,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1\ ,\ n)$，$(m\ ,\ n+1)$，$(m-1\ ,\ n)$，$(m\ ,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

<解答>

(1)

点Pが格子点 $(m\ ,\ n)$ にあるとき

a) 右の格子点 $(m+1\ ,\ n)$，下の格子点 $(m\ ,\ n-1)$ への移動により，$(x-y)$ は1増加

b) 左の格子点 $(m-1\ ,\ n)$，上の格子点 $(m\ ,\ n+1)$ への移動により，$(x-y)$ は1減少

したがって，a) とb) の移動を同数繰り返せば，$(x-y)$は不変

したがって，a)とb) の移動を3回ずつ繰り返せば，

原点O $(0\ ,\ 0)$ からスタートして6秒後に $x-y=0$ 上の格子点 $(m\ ,\ m)$ に点Pがくる。

6回の移動のうちa)，b) がそれぞれ3回となる場合の数は ${}_6C_3$

毎回の移動における，a) の移動か b) の移動かの確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$

したがって点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^6{}_6C_3=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$　（答）

(2)

c) 右と左の格子点への移動回数が等しければ，x 方向への移動がない。

d) 上と下の格子点への移動回数が等しければ，y 方向への移動がない。

すると，原点O $(0\ ,\ 0)$からスタートした点Pは原点に戻る。

6秒のc)，d) の移動には以下の４つの場合がある。

ⅰ) c) が6回，d) が0回の移動

左と右への移動が3回ずつだから，場合の数は ${}_6C_3=20$

ⅱ) c) が4回，d) が2回の移動

左と右への移動が2 回ずつ，上と下への移動が1 回ずつだから，

6 回の移動から4 回の左右への移動を選ぶ場合の数が ${}_6C_4$

4 回の左右への移動から左右のいずれかを選ぶ場合の数が ${}_4C_2$

2 回の上下の移動から上下のいずれかを選ぶ場合の数が ${}_2C_1$

したがって，c) が4 回，d) が2 回の移動の場合の数はこれらの積で

${}_6C_4\times{}_4C_2\times{}_2C_1=15\times6\times2=180$

iii) c) が2 回，d) が4 回の移動

ii)と同じで，場合の数は ${}_6C_4\times{}_4C_2\times{}_2C_1=180$

iv) c) が0 回，d) が6 回の移動

i)と同じで，場合の数は ${}_6C_3=20$

原点O (0 , 0)からスタートした点P が 6 秒後に原点にある場合の数は，$20\times2+180\times2=400$

一方，各回の移動の発生確率は $\frac{1}{4}$ だから，6 秒後に原点にある確率は $400\times\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{25}{256}$ （答）

＜解説＞

ある事象が発生する確率の問題は，ある事象を発生させる場合の数を，全事象を発生させる場合の数で除することによって求める。この場合，それぞれの場合は同じ発生確率であることを前提とする。この場合の数を求める考え方は，当然，個々の問題ごとに考案しなければならないため，時間を要することになる。

(1)

(0, 0)からスタートして，左右，上下の移動を6 回行って，$y=x$上の点にある，という事象のためには，どのような移動をすべきかを着想しなければならない。

そこで，格子点にあるP が左右，上下の格子点に移動した場合，格子点の座標がどのように変化するかを，まず考える。$y=x$ 上の点ということは，$x-y=0$ ということだから，$(x-y)$ の変化に着目する。すると，右と下の格子点への移動により，$(x-y)$ は1 増加し，左と上への移動により1 減少することがわかる。

6 回の移動のうち，右と下への移動と左と上への移動を同数，すなわち3 回ずつ行えば，原点からスタートした点P の座標に関して，$x-y=0$ が成立することになる。

上下左右の格子点への移動を，（ a) 右と下への移動），（ b) 左と上への移動）の 2 つに分けると，それぞれの発生確率は$\frac{1}{2}$，6 回の移動のうち3回がa) の移動となる場合の数は，6 回のうち3 回をa) の移動とする組合せの数である。

(2)

同じように，(0 , 0) からスタートして，6 秒後に (0 , 0) に戻る移動は，どのような移動かを考える。左右への移動回数が同じ，上下への移動回数が同じ移動であることがわかる。

第　3　問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を0 でない複素数とし，点α と原点O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点z が直線 L 上を動くとき，点w の軌跡は円から1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3 乗根のうち，虚部が正であるものをβ とする。点β と点β^2 を結ぶ線分上を点z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

＜解答＞

(1)

L 上の点 z は，$|z-(0+0i)|=|z|=|z-\alpha|$ を満たす。ゆえに $\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|=\left|\dfrac{1-\alpha w}{w}\right|$　①

①の両辺に$|w|$を乗じて，$|w\alpha-1|=1$，両辺を$|\alpha|$で除して，$\left|w-\dfrac{1}{\alpha}\right|=\dfrac{1}{|\alpha|}$　②，ただし$w\fallingdotseq 0$

②は円の方程式であり，中心は$\dfrac{1}{\alpha}$，半径は$\dfrac{1}{|\alpha|}$　（答）

(2)

$\beta=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\beta^2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

図１に点β と点β^2を結ぶ線分を示す。

点β とβ^2 を結ぶ線分は原点Oと点$(-1,0)$ の垂直2 等分線の一部で，

$|z|=|z+1|$，$\dfrac{2\pi}{3}\leqq \arg z\leqq\dfrac{4\pi}{3}$

$w=\dfrac{1}{z}$，$z=\dfrac{1}{w}$ とおけば，(1)の結果から，$|w+1|=1$　③

$\arg w=-\arg z$，$\therefore -\dfrac{4\pi}{3}\leqq\arg w\leqq-\dfrac{2\pi}{3}$　④

③，④から，求める軌跡は中心が-1，半径が1 の円で偏角が④の範囲である。複素平面上に図示すると図２のようになる。

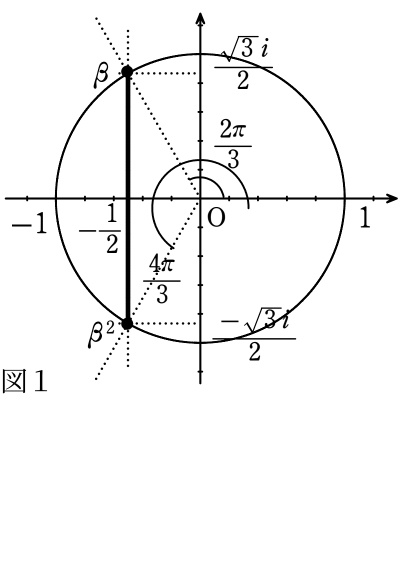

図１

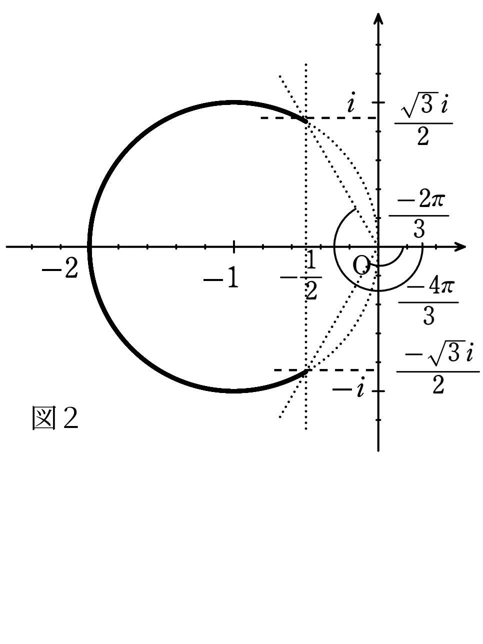

図２

＜解説＞

(1)

２点の垂直2 等分線の複素数表現は教科書にも記載されている。$|z|$は原点と点z との距離，$|z-\alpha|$は点α と点z との距離だから，これが等しい点の集まりは，原点と点α とから等距離の点の集まりということになるので，原点と点α との垂直2 等分線である。

①を変形して②を求める。複素数の絶対値の演算に関する定理を①に利用した。具体的には，

両辺に$|w|$を乗じるとき，$|w|\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|w\dfrac{1}{w}\right|=1$

$|w|\left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|=\left|w\left(\dfrac{1}{w}\right)-\alpha w\right|=|1-\alpha w|=|\alpha|\left|\dfrac{1}{\alpha}-w\right|$ の関係である。

②式の意味するところは，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ との距離が $\dfrac{1}{|\alpha|}$ である点の集合である。これは，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円となる。

(2)

(1)を活用する問題と見抜くかどうかが，考察上のポイントとなる。点 βと点 β^2を結ぶ線分が(1)のようにある2 点の垂直2 等分線になっていれば，容易にw の軌跡が円であり，その中心と半径を求めることができる

しかし，考えてみれば，いかなる直線も必ずある2 点の垂直2 等分線であり，しかもその2 点は無数にあるのだから，(1)を活用することは非常に容易なはずである。このことは，言われてみれば，ごく当たりまえのことだが，気づかずに別の方法を考えたりするのではないか。それは，1の3 乗根の点 βと点β^2 などという，いわくあり気な複素数が登場するからで，頭が別の方向へ働いてしまいそうである。

β，β^2を具体的に複素数表現して，点βと点β^2を結ぶ線分を描いてみれば，$z=-\dfrac{1}{2}+yi$ という虚数軸に平行な直線であることがわかる。図１のような図を描いて考える。すると，$z=0$と$z=-1$の2点を結ぶ線分の垂直2 等分線であることがわかるから，(1)の結果が直ちに使えると閃くであろう。

第　4　問

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1}とa_{n-1}を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} とa_n の最大公約数を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$a_1=p-\frac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=4 \qquad \text{（答）}$$

$$a_2=p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=18 \qquad \text{（答）}$$

(2)

$$a_1=p-\frac{1}{p}$$

$$a_1a_n=\left(p-\frac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}=p^{n+1}-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)^n-\frac{p^n}{p}+p\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

$$=p^{n+1}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}-p^{n-1}-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}=a_{n+1}-a_{n-1} \qquad \text{（答）}$$

(3)

a_k $(k=1, 2, 3, . . , n-1, n)$ は自然数とする。

$k=2$のとき，$a_3=a_1a_2+a_1=72+4=76$ で a_3 も自然数。

$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}=4a_n+a_{n-1}$，$a_n$ とa_{n-1} は自然数，したがってa_{n+1} も自然数

$k=1, 2, 3, . . , n-1, n$ に対してa_k が自然数ならば，a_{n+1} も自然数であり，

a_1, a_2, a_3 が自然数だから，数学的帰納法によりa_n は自然数である。

(4)

a_{n+1} とa_n の最大公約数をgとする。すると$a_{n+1}=gb_{n+1}$，$a_n=gb_n$，b_{n+1} とb_n は互いに素

$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}$ だから，$gb_{n+1}=4gb_n+a_{n-1}$，したがってg はa_{n-1} の約数

そこで$gb_{n+1}=4gb_n+a_{n-1}=4gb_n+gb_{n-1}=g(4b_n+b_{n-1})$とおいたとき，

$b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}$ で，b_{n+1}とb_n は互いに素だから，b_nとb_{n-1} は互いに素，

したがってgはa_nとa_{n-1}の最大公約数

$a_n=4a_{n-1}+a_{n-2}$ から，$gb_n=4gb_{n-1}+a_{n-2}$ だから，同様にしてg はa_{n-1}とa_{n-2}の最大公約数

同様にnを小さくしていくと，$a_3=4a_2+a_1$においてg は a_3，a_2，a_1 の最大公約数，

すなわち76，18，4　の最大公約数だから，$g=2$　（答）

＜解説＞

(1)

$$a_1=p-\frac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=2+\sqrt{5}+(2-\sqrt{5})=4$$

$$a_2=p^2+\left(-\frac{1}{p}\right)^2=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=18$$

(2)

a_1a_nを単純に計算すれば良い。

(3)

この種の問題は数学的帰納法による場合が多い。

(4)

難しく考えないこと。(2)において求めた関係を利用することを考える。ポイントはgがa_2とa_1の最大公約数でもあることを導くこと。

$b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}$で，b_{n+1}とb_nが互いに素のとき，b_nとb_{n-1}は互いに素である理由を考えてみる。b_nとb_{n-1}が互いに素でなければ，b_nと$(4b_n+b_{n-1})=b_{n+1}$は互いに素ではない。これは矛盾である。したがって，b_nとb_{n-1}は互いに素である。

第　5　問

kを実数とし，座標平面上で次の２つの放物線C，Dの共通接線について考える。

$$C: y = x^2+k$$
$$D: x = y^2+k$$

(1) 直線$y=ax+b$が共通接線であるとき，aを用いてkとbを表せ。ただし$a \fallingdotseq -1$とする。

(2) 傾きが2の共通接線が存在するようにkの値を定める。このとき，共通接線が3本存在することを示し，それらの傾きとy切片を求めよ。

＜解答＞

(1)

$C: y = x^2+k$　①

$D: x = y^2+k$　②

$y=ax+b$　③

$a=0$のとき，$y=b$はCにもDにも接することはないので，$a \fallingdotseq 0$

③がCに接するので，①と③を連立させた2次方程式$x^2-ax+k-b=0$　④は重解をもつ。

③がDに接するので，②と③を連立させた2次方程式$ay^2-y+ak+b=0$　⑤は重解をもつ。

④が重解をもつ条件は，2次方程式の解の判別式$D=a^2-4(k-b)=0$　⑥

⑤が重解をもつ条件は，$D=1-4a(ak+b)=0$　⑦

⑥，⑦から，$k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$，$b=\dfrac{-a^3+a^2-a+1}{4a}$，ただし$a \fallingdotseq 0$　（答）

(2)

$a=2$とすれば，$k=\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{5}{8}$

$k=\dfrac{3}{8}$とすれば，⑥は$a^2+4b-\dfrac{3}{2}=0$　⑧，⑦は$\dfrac{3}{2}a^2+4ab-1=0$　⑨

⑧，⑨から$a^3-\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{3}{2}a+1=(a+1)(a-2)\left(a-\dfrac{1}{2}\right)=0$，$\therefore\ a=-1, \dfrac{1}{2}, 2$

aの３つの解に対応して，共通接線が3本ある。

$a=-1$のとき，⑧から$b=\dfrac{1}{8}$，したがって接線は$y=-x+\dfrac{1}{8}$，傾きは-1，y切片は$\dfrac{1}{8}$　（答）

$a=\dfrac{1}{2}$のとき，⑧から$b=\dfrac{5}{16}$，したがって接線は$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{16}$，傾きは$\dfrac{1}{2}$，$y$切片は$\dfrac{5}{16}$　（答）

$a=2$ のとき，⑧ から $b=-\dfrac{5}{8}$，したがって接線は$y=2x-\dfrac{5}{8}$，傾きは 2，y 切片は $-\dfrac{5}{8}$　（答）

＜解説＞

2次方程式の解に関する問題。考え方の方針は立てやすく，計算も難しくない。

(1)

放物線に直線が接するとき，放物線の方程式と直線の方程式とを連立させたとき，重解をもつ，ということは，読者はよく承知のことだろう。

(2)

$a=2$なる直線が接線となるようにkを定めたとき，接線となるaの値が3つあることを示せば良い。

第　6　問

点O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A (1 , 0 , 0) に対して，∠AOP をθとおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点Q が (0 , 0 , 1) にあるとき，点P のx 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲をK とする。K の体積を求めよ。

＜解答＞

(1)

点P を(x , y , z)とする。

OP =1 だから，$x^2+y^2+z^2=1$　①，QP =1 だから，$x^2+y^2+(z-1)^2=1$　②

①，②から，$z=\dfrac{1}{2}$，$x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$　③

したがって，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（答）

点P は $\left(x , y , \dfrac{1}{2}\right)$ だから，$\cos\theta = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=x$，したがって$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$30° \leqq \theta \leqq 150°$　（答）

(2)

(1)によって，図 1 のように点P はz 軸を回転軸として回転するので，OP は原点O を頂点とする円錐面を描く。円錐の底面は (0 , 0 , 1/2) を中心とする円である。

点Q はx 軸を回転軸として回転するので，OP が描く円錐面も回転する。その円錐面が$x-y$ 平面と交わる図形は図 2 のように半径 1，中心線がy 軸の扇形で，Q の回転に連れて，中心角が 0° から 150°まで増加する。Q の回転の増加により，いったん円錐面は$x-y$ 平面と交わらなくなるが，さらに増加するとy 軸負方向を中心線とする扇形が発生する。

以上によって，点Q の回転によりOP が描く立体の$x-y$ 平面の断面は図 2 の扇形であるから，OP が通過する範囲 K の体積は扇形をx 軸の周りに回転した立体の体積となる。

この立体の体積は，x 軸に垂直な断面内の面積をx 軸方向に加算していけばよい。

立体はy軸に関して対称だから，立体の体積は$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(x)dx$

$S(x)$は立体の$x-y$平面の断面の面積で，$S(x)=\pi {y_1}^2-\pi {y_2}^2=\pi(1-x^2)-\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2$

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}({y_1}^2-{y_2}^2)dx=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)dx=2\pi\left[x-\frac{4}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \quad （答）$$

＜解説＞

問題文によって形成される立体はどのようなものか，脳裏に描き，略図を紙に描いて，問題を把握しよう。(1) における立体は底面が接している２つの円錐からなる立体である（ちょうど算盤の玉）。

(2) では(1) の立体がx軸のまわりに回転する。(1)でOPは円錐面を形成するから，ここでは，円錐面が回転することにより形成する立体を理解しなければならない。円錐面が回転して作る立体の体積を求めるのだから，回転軸（x軸）を含む平面における立体の断面が解れば，その断面の回転体が立体ということになるので，容易に体積が求まる。

x軸を含む平面として，$x-y$平面における立体の断面を考えると良い。円錐はz軸のまわりに回転してできたものだから。円錐は30° 回転するまでは，$x-y$平面に接触しない。その後，半径 1，中心線がy軸の扇形が中心角 0°から150° まで拡がる（この間のx軸の回転角は30° から150 まで）。x軸の回転が150° から210° までは円錐は$x-y$平面から離れる。210° から330° までは扇形の断面が再びy軸負方向を中心線として表れる。この断面図形が図２の打点部である。

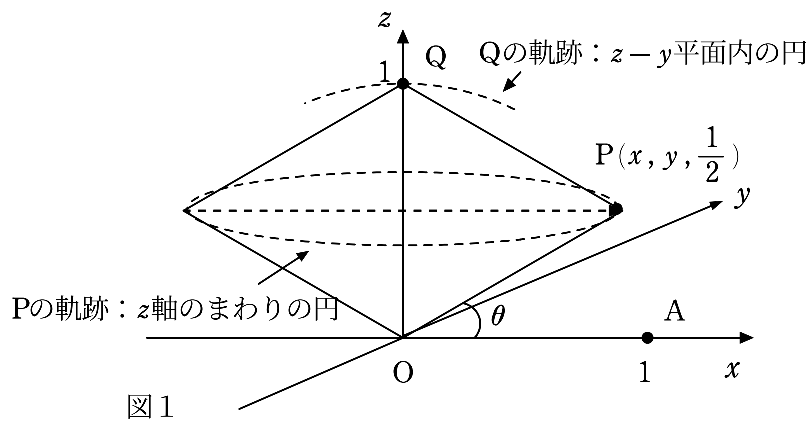

図１

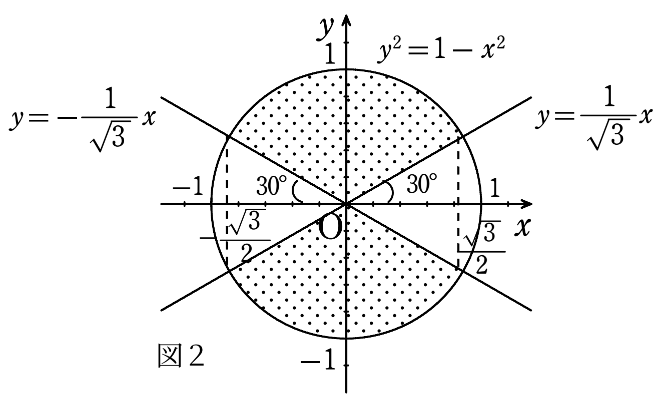

図２

<総評>

第１問，第５問は解答方針を考え易く，思考の過程も複雑ではないので，スムーズに解答したい。他の４問は，解答方針や思考の過程に着眼，着想が必要で，やや難しい。３，２，４，６の順に取り組みたいと思った。各問には小問が誘導的に構成されているから，それらに的確に解答していけば，部分点を得ることができるので，粘り強く取り組もう。

第１問

やや拍子抜けするくらい，紛れの少ない問題である。確実に解いて，気持ちを落ち着かせたいところだ。難易度Ｃ。

第２問

確率の問題。解答方針の着想が必要である。例年に比べて，やや容易な感じがする。ただし，よく出題される確率漸化式のような問題と捉えると，迷路にはまり込むので注意する。ここは単純に移動の組合せの問題として考えれば良い。難易度はＢ＋。

第３問

複素数平面での図形に関する問題。教科書を繰り返し読んで，理解していれば，肯ける問題であろう。このような問題を考えると，複素数によって，図形の取り扱いが実に簡単になることがわかる。⑴を活用して⑵を解くことに気づくかどうかが，正答への分かれ道だ。もちろん，気づかなくても，別解はあるのだが，いかにも泥臭く，計算に時間がかかる。難易度Ｂ＋。

第４問

整数の問題は解答方針の着想が必要になる。⑴，⑵，⑶は解答方針に迷う問題ではないので，着実に正答したい。⑷は難しく考えると迷路にはまり込む。⑵でせっかく導いた関係式を⑶では，十分に利用したわけではないことを思い，ここでも利用しようと考える。難易度Ａ－。

第５問

これも，東大には珍しく，考え方の方針が立てやすく，紛れのない問題である。このような問題は着実に完答しておきたい。気持ちに余裕が出てくるだろう。難易度Ｃ

第６問

昨年同様，立体図形の体積を求める積分の問題。点に与えられる移動によって，どのような立体図形が形成されるのか，把握しなければならない。その把握が，積分によって体積を求めるのに適切な形であることが重要である。この過程に難しさがあると感じ，難易度Ａ。

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

座標平面において２つの放物線A：$y=s(x-1)^2$とB：$y=-x^2+t^2$を考える。ただしs，tは実数で，$0<s$，$0<t<1$をみたすとする。放物線Aとx軸およびy軸で囲まれる領域の面積をPとし，放物線Bの$x\geqq 0$の部分とx軸，y軸で囲まれる領域の面積をQとする。AとBがただ１点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$の最大値を求めよ。

＜解答＞

２つの放物線AとBがただ１点を共有するとき，それらの方程式を連立させて得られる2 次方程式

$$(s+1)x^2-2sx+(s-t^2)=0$$

が重解をもつ。

解の判別式 $D=s^2-(s+1)(s-t^2)=0$，$\therefore\ t^2=\dfrac{s}{s+1}$　①

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=s\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2t^3}{s}$，①を用いて，$\dfrac{Q}{P}=2t(1-t^2)=f(t)$

$f'(t)=2-6t^2$，$f(t)$ は図１のように変化し，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で最大値 $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ をとる。

したがって，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値は $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　　（答）

t	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(t)$		$+$		$-$
$f(t)$		↗		↘

図１

＜解説＞

図２のような図を描いて題意を把握する。題意は簡明であり，解答方針に紛れがない。AとBがただ１点を共有するとは，両者が接するときであることを理解する。

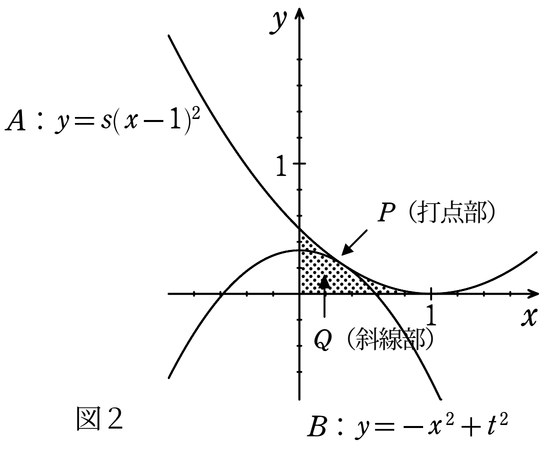

図２

第２問

１辺の長さが１の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2：1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

＜解答＞

図１を参照する。

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OD}+s\,\overrightarrow{OC}$　$(0\leqq s\leqq 1)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}+t\,\overrightarrow{OB}$　$(0\leqq t\leqq 1)$

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}s\,\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}t\,\overrightarrow{OB}$

$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$の範囲でs，tが動いたとき，$\frac{1}{3}s\,\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}t\,\overrightarrow{OB}$の範囲は図１の打点の平行四辺形。

点R が存在する範囲はこの平行四辺形を$\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$移動したものだから，その面積はこの平行四辺形の面積である。平行四辺形の面積は $\frac{1}{3}|\overrightarrow{OC}|\cdot\frac{2}{3}|\overrightarrow{OB}|\sin\angle COB=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$　（答）

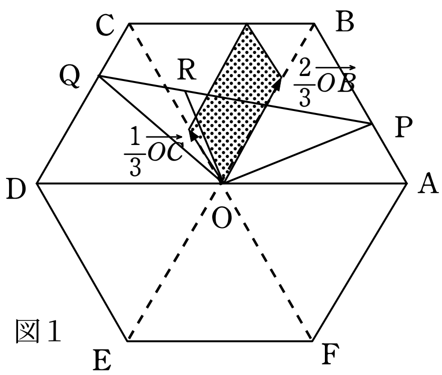

図１

＜解説＞

ベクトルを利用することによって，容易に正答を導くことができる。ここで，ベクトルを利用すると閃くことが重要だ。△OPQ に着目すると，辺PQ の内分点は辺 OP，OQ のベクトルの合成によって表されることを思い出せば，閃くかも知れない。

いろいろな解法がありそうだ。この閃きがなかった場合のために，考えてみよう。

図２のような正六角形で考えても一般性を失わない。

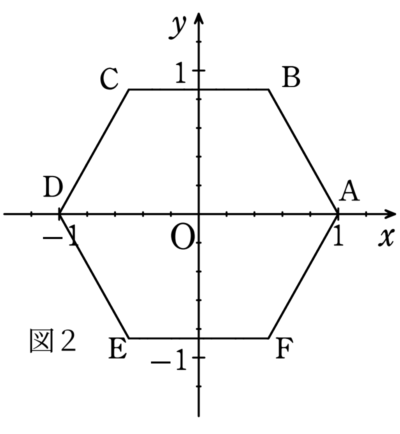

図２

各点の座標は$A(1,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$D(-1,0)$である。

直線 AB は$y=-\sqrt{3}(x-1)$

直線 CD は$y=\sqrt{3}(x+1)$

AB 上の点 $P(s,-\sqrt{3}(s-1))$，$\frac{1}{2}\leqq s\leqq 1$　①

CD 上の点 $Q(t,\sqrt{3}(t+1))$，$-1\leqq t\leqq -\frac{1}{2}$　②

すると，線分 PQ を 2：1 に内分する点 $R(X,Y)$ は

$X=\frac{s+2t}{3}$　③，$Y=\frac{-\sqrt{3}(s-1)+2\sqrt{3}(t+1)}{3}=\frac{\sqrt{3}(-s+2t+3)}{3}$　④

③，④から$s=\frac{1}{2}(3X-\sqrt{3}Y+3)$　⑤，$t=\frac{1}{4}(3X+\sqrt{3}Y-3)$　⑥

⑤を①に代入して，$\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}(3X-\sqrt{3}Y+3)\leqq 1$，$\therefore \sqrt{3}X+\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq Y\leqq\sqrt{3}X+\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑦

⑥を②に代入して，$-1\leqq\frac{1}{4}(3X+\sqrt{3}Y-3)\leqq-\frac{1}{2}$，$\therefore -\sqrt{3}X-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq Y\leqq-\sqrt{3}Y+\frac{\sqrt{3}}{3}$　⑧

⑦，⑧が示す(X,Y)は，図３の斜線部であり，その面積は$\frac{\sqrt{3}}{9}$　（答）

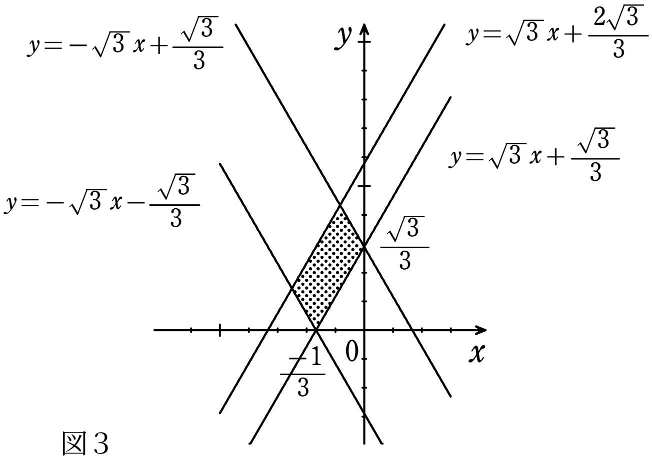

図３

上記のように座標平面上の計算によって求める方法は解答方針を立てやすいと思われる。しかし，やや煩瑣な計算を伴う。

さらに別解を示そう。図４を参照する。

Q が点C にあって，P がAB 上を動くとき，AC およびBC を2：1に内分する点R_1，R_2を結ぶ線分R_1R_2上を，R_1からR_2まで点R は移動する。$R_1R_2 /\!/ AB$，$R_1R_2=\frac{1}{3}AB$である。

Q が点D にあって，P がAB 上を動くとき，AD およびBD を2：1に内分する点R_3，R_4を結ぶ線分R_3R_4上を，R_3からR_4まで点R は移動する。$R_3R_4 /\!/ AB$，$R_3R_4=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}$である。

任意の線分 PQ を2：1に内分する点R は平行四辺形 $R_1R_2R_3R_4$ の内部に含まれることを示す。
QA と R_1R_3 との交点をT_1，QB と R_2R_4 の交点をT_2 とする。するとT_1 はAQ を2：1に内分する点,

T_2 はBQ を2：1 に内分する点である。線分 $T_1T_2 /\!/ AB$，$T_1T_2 = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{3}$

したがって，PQ を2：1に内分する点は線分はT_1T_2 上にある。

T_1 は R_1R_3 上の点，T_2 は R_2R_4 上の点だから，PQ を2：1 に内分する点は平行四辺形 $R_1R_2R_3R_4$ の内部に含まれる。$R_1R_3 = R_2R_4 = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{2}{3}$ だから,

平行四辺形 $R_1R_2R_3R_4$ の面積は $R_1R_3 \times R_3R_4 \sin 60° = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$　（答）

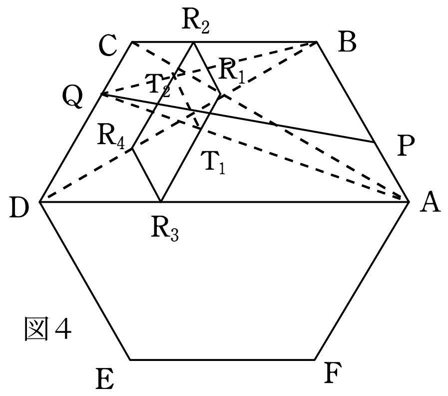

図4

第　3　問

座標平面上でx 座標とy 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a)，(b) に従って動く点P を考える。

(a) 最初に，点P は原点O にある。

(b) ある時刻で点P が格子点 (m , n) にあるとき，その1 秒後の点P の位置は，隣接する格子点 $(m+1 , n)$，$(m , n+1)$，$(m-1 , n)$，$(m , n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 最初から1秒後の点P の座標を (s, t) とする。$t-s = -1$となる確率を求めよ。

(2) 点P が，最初から6 秒後に直線 $y=x$ 上 にある確率を求めよ。

<解答>

理科の第２問とほぼ同じ問題。

(1)

原点O $(0 , 0)$から１秒後の点P (s, t) は$(1 , 0)$，$(0 , 1)$，$(-1 , 0)$，$(0 , -1)$ のいずれかである。
このうち，$t-s = -1$となるのは，$(1 , 0)$，$(0 , -1)$ の２点である。

それぞれの点に移る確率は $\dfrac{1}{4}$ だから，$t-s = -1$となる確率は $\dfrac{1}{2}$　（答）

(2)

理科の(1)に同じ。

＜解説＞

理科の第２問を参照すること。

第　４　問

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

（理科の第４問と同じ問題）

＜解答＞，＜解説＞

理科の第４問に同じ。

＜総評＞

第１問

題意簡明で方針を立てやすい問題だから，確実に正答して落ち着こう。難易度はＣ＋。

第２問

図形の問題。いろいろな解法がある。結果の見通しもつけ易いから，正答したい。難易度Ｂ

第３問

確率の問題。(1)は容易で難易度Ｃ。(2)は文科系の問題としては難しい。難易度Ａ。

第４問

数列と整数の問題。(1)，(2)，(3)は文科系といえども正答したい。難易度Ｂ。(3)は難易度Ａ。

170726