2018（H30)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）

200点満点，150分

$\boxed{1}$ (30点)

0でない実数a，b，c は次の条件(ｉ)と(ⅱ)を満たしながら動くものとする．

(ｉ) $1+c^2 \leqq 2a$

(ⅱ) ２つの放物線C_1：$y=ax^2$とC_2：$y=b(x-1)^2+c$は接している．

ただし，２つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という．

(1) C_1とC_2の接点の座標をaとcを用いて表せ．

(2) C_1とC_2の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ．

＜解答＞

(1)

C_1とC_2の接点の座標を$(x_C\,,\,y_C)$とする。この座標はC_1とC_2上の点であるから，

$y_C=a{x_C}^2$　①

$y_C=b(x_C-1)^2+c$　②

C_1の導関数は$y'=2ax$，したがって接点での傾きは$2ax_C$

C_2の導関数は$y'=2b(x-1)$，したがって接点での傾きは$2b(x_C-1)$

２つの傾きは等しいから$ax_C=b(x_C-1)$　③　ただしa，$b\fallingdotseq 0$だから，$x_C \fallingdotseq 0\,,1$

①，②，③から，$x_C=\dfrac{c}{a}$　④，$y_C=\dfrac{c^2}{a}$　⑤，したがってC_1とC_2の接点の座標は$\left(\dfrac{c}{a}\,,\dfrac{c^2}{a}\right)$　（答）

(2)

④，⑤から，$a=\dfrac{y_C}{{x_C}^2}$，$c^2=\dfrac{{y_C}^2}{{x_C}^2}$

これを条件(ｉ)に代入すると，$1+\dfrac{{y_C}^2}{{x_C}^2}\leqq\dfrac{2y_C}{{x_C}^2}$

したがって，${x_C}^2+{y_C}^2-2y_C\leqq 0$，$\therefore\ {x_C}^2+(y_C-1)^2\leqq 1$

以上によって，C_1とC_2の接点$(x_C\,,\,y_C)$は

図１に示す$x^2+(y-1)^2=1$の円とその内側（打点部），

ただし$x_C\fallingdotseq 0\,,1$，$y_C\fallingdotseq 0$だから，○とy軸は含まない。

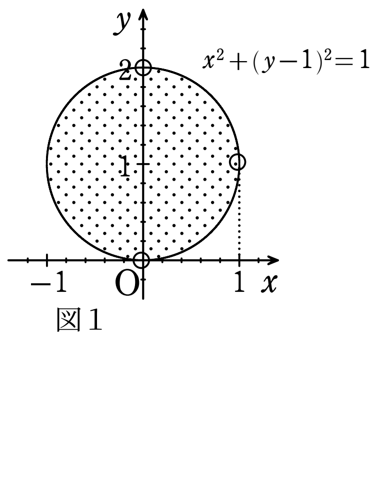

図１

<解説>

(1)

①，②から$a{x_C}^2=b(x_C-1)^2+c$　④'

③から，$x_C\fallingdotseq 0,1$が明らかである。③の両辺にx_Cを乗じて，$a{x_C}^2=bx_C(x_C-1)$　⑤'

④'－⑤'から，$0=b-bx_C+c$，$\therefore\ x_C=1+\dfrac{c}{b}$，③から$ax_C=c$，$\therefore\ x_C=\dfrac{c}{a}$，①に代入して$y_C=\dfrac{c^2}{a}$

③に$x_C=\dfrac{c}{a}$を代入して，$b=\dfrac{ac}{c-a}$

(2)

$x_C=\dfrac{c}{a}$，$y_C=\dfrac{c^2}{a}$から，a，c^2を求め，条件(ｉ)に代入する。a，$c\fallingdotseq 0$とされているので，x_C，$y_C\fallingdotseq 0$である。

${x_C}^2+(y_C-1)^2\leqq 1$は容易に求まるが，$x_C\fallingdotseq 0,1$，$y_C\fallingdotseq 0$であることに注意する。原点，y軸，点(1, 1)は含まれない。

$\boxed{2}$

(30点)

n^3-7n+9が素数となるような整数nをすべて求めよ.

<解答>

$N(n)=n^3-7n+9=n(n^2-1)-3(2n-3)=(n-1)n(n+1)-3(2n-3)$　①　とおく。

$n=0,\pm 1$のとき①は$-3(2n-3)$となって3の倍数，したがって素数になるのは$N(n)=3$のみ

それ以外では，$(n-1)n(n+1)$は連続する３つの整数の積だから3の倍数，したがって$N(n)$は3の倍数

したがって，$N(n)$が素数になるのは，$N(n)=3$　②

②を満たす整数nを求めればよい。

$n^3-7n+9=3$とおけば，$n^3-7n+6=(n-1)(n-2)(n+3)=0$

したがって，$n=-3$，1，2　（答）

<解説>

問題設定が具象的でないので，どのように手をつければ良いのか，解答方針に戸惑う。こういう場合には，あれやこれや思い惑うよりも，与えられた式がどのような数になるのか，具体的に調べて，解答方針の手がかりを得ることだ。

$N(1)=3$，$N(2)=3$，$N(3)=15$，$N(4)=45$，．．．

$N(-1)=15$，$N(-2)=15$，$N(-3)=3$，$N(-4)=-27$，．．．

こうしてみると，$N(n)$は3の倍数であり，とり得る素数は3のみ，という推論を得る。

そこで，$N(n)$の表式を変換して，3との関係を調べてみようと思い立ちたい。

$N(n)$を3の倍数で表現することを試みる。nの3次式だから，nの一次式の積で表すことにより，3の倍数で表現することを考える。n^3を含む式を3の倍数で表す最も単純なnの一次式の積は$(n-1)n(n+1)$である。このように考えれば，容易に①の表式に至る。

$\boxed{3}$ (35点)

αは$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とし，四角形ABCDに関する次の２つの条件を考える．

(ｉ) 四角形ABCDは半径1の円に内接する．

(ⅱ) $\angle ABC=\angle DAB=\alpha$

条件(ｉ)と(ⅱ)を満たす四角形のなかで，４辺の長さの積

$$k=AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$$

が最大となるものについて，kの値を求めよ．

＜解答＞

図１を参照する。

$\angle BAC=\beta$とおく。$\angle ACB=\angle ADB$だから，$\triangle ABC\equiv\triangle ABD$，$\therefore\ \angle ABD=\beta$

$AB=l_1$，$BC=l_2$，$CD=l_3$，$DA=l_4$とおく。

$\triangle ABC$，$\triangle ACD$は半径1の円に内接しているから，正弦定理により，

$l_1=2\sin(\pi-\alpha-\beta)=2\sin(\alpha+\beta)$，$l_2=l_4=2\sin\beta$，$l_3=2\sin(\alpha-\beta)$　①

$k=AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA=l_1l_2l_3l_4=16\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sin^2\beta=8(\cos2\beta-\cos2\alpha)\sin^2\beta$

$f_\alpha(\beta)=(\cos2\beta-\cos2\alpha)\sin^2\beta$　②　とおく。

$f_\alpha'(\beta)=-2\sin2\beta\sin^2\beta+2(\cos2\beta-\cos2\alpha)\sin\beta\cos\beta$

$\qquad=-\sin2\beta(1-\cos2\beta)+(\cos2\beta-\cos2\alpha)\sin2\beta$

$\qquad=\sin2\beta(2\cos2\beta-\cos2\alpha-1)$

$f_\alpha'(\beta)=0$とすれば，$0<\sin2\beta<1$だから$2\cos2\beta-\cos2\alpha-1=0$

$\cos2\beta=\dfrac{\cos2\alpha+1}{2}$を満たす$\beta$を$\beta_C$とすれば，

$f_\alpha(\beta)$のβに関する変化は図２のようになる。

したがって，$\beta=\beta_C$で$f_\alpha(\beta)$は

最大値 $f_\alpha(\beta_C)=(\cos2\beta_C-\cos2\alpha)\sin^2\beta_C$　③　をとる。

$\cos2\beta_C=\dfrac{\cos2\alpha+1}{2}$　④

$\sin^2\beta_C=\dfrac{1-\cos2\beta_C}{2}=\dfrac{1}{4}(1-\cos2\alpha)$　⑤

④，⑤を③に代入して整理すると

$f_\alpha(\beta_C)=(\cos2\beta_C-\cos2\alpha)\sin^2\beta_C=\dfrac{1}{8}(1-\cos2\alpha)^2$

したがって最大となるkは

$k_{max}=(1-\cos2\alpha)^2=4\sin^4\alpha$　(答)

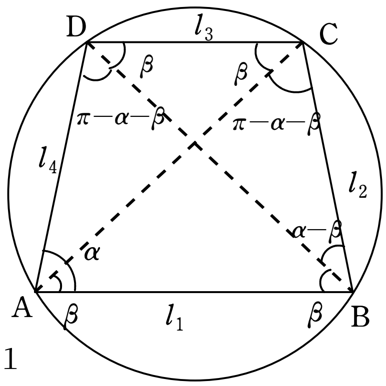

図１

β	0		β_C		$\frac{\pi}{2}$
$f'_{\alpha}(\beta)$		$+$	0	$-$	
$f_{\alpha}(\beta)$		↗		↘	

図２

＜解説＞

まずは，図１のような図を描いて，図を見つめよう。円に内接し，$\angle$ABC$=\angle$DAB$=\alpha$ということから，四角形ABCDは等脚台形ということがわかる。そのように図を描こう。そして，題意は何かを的確に把握し，解答方針を考えよう。各辺を何らかの変数によって表し，kと変数の関係を調べて最大のkを求めるという，常套手段の解答方針を速やかに思い浮かべたい。

円に内接するという条件から，正弦定理によって，辺長をαによって表現して扱うのではないかと直感が働く。αは所与だから，四辺形ABCDを決定する他の変数があるはずだ。

点Aを任意に定めると，所与αは弦AC上の円周角だから点Cが定まる。すると点Bは弧$\overset{\frown}{AC}$上の任意の点でよく，$\angle$ABC$=\alpha$となる。また点Dは弦ACに関して点Bと反対側の弧（Bのある弧を優弧とすれば劣弧）上のAC$=$BDとなる点で，$\angle$ADC$=\pi-\alpha$となる。

このように四角形ABCDを作成する思考過程で，Bを決めればDは自動的に定めるので，点Bを決める変数によって，各辺長を定めれば良いと考える。Bを定める変数として，$\angle$BAC$=\beta$が一番単純そうである。このβによって，図１のように四角形ABCD，△ABC，△ACDの内角を表現し，①，②式を導けば，解答は近い。

計算に際しては，正弦定理，三角関数の加法定理，倍角公式等をスムーズにミスなく使いこなしたい。また，kの最大値を与える$\beta=\beta_C$を具体的に求めることは困難でも，$\beta=\beta_C$でkが極値をもち最大となることを，一次導関数の正負変化によって示すことは普通に行うことと同じである。幸い，β_Cの具体的表現は求まられていない。

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$のとき，④から$\cos 2\beta_C=0$となって，$\beta_C=\dfrac{\pi}{4}$となる。①から$l_1=l_2=l_3=l_4=\sqrt{2}$，$k=4$となって，直感と一致する。四角形ABCDは正方形となる。

$\boxed{4}$ （35点）

コインをn回投げて複素数z_1，z_2，$\cdots$，z_nを次のように定める.

(ⅰ) 1回目に表が出れば$z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とし，裏が出れば$z_1=1$とする.

(ⅱ) $k=2$，3，$\cdots$，nのとき，k回目に表が出れば$z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$とし，裏が出れば$z_k=\overline{z_{k-1}}$とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$は$z_{k-1}$の共役複素数である.

このとき，$z_n=1$となる確率を求めよ.

＜解答＞

図１に示す複素数平面で，点A $(1, 0)$，B $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，C $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とする。

すると，z_kはA，B，Cいずれかの点の複素数である。

なぜなら，$z_k=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$および$z_k=\overline{z_{k-1}}$ によって，z_kはA，B，Cいずれかの点となる。

すなわち，

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\quad \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$\overline{1}=1,\quad \overline{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\quad \overline{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

z_kがA，B，Cに来る事象の確率を$P_k(A)$，$P_k(B)$，$P_k(C)$とする。

コインを投げて表裏が出たときの演算の規則から，①～③が成立する。

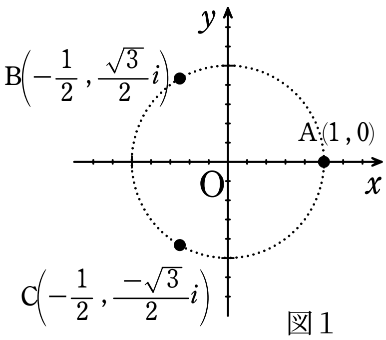

図１

$P_k(A)=\frac{1}{2}P_{k-1}(A)+\frac{1}{2}P_{k-1}(C)$　①

$P_k(B)=\frac{1}{2}P_{k-1}(A)+\frac{1}{2}P_{k-1}(C)$　②

$P_k(C)=P_{k-1}(B)$　③

また確率の前提として，$P_k(A)+P_k(B)+P_k(C)=1$　④

①，②から $P_k(A)=P_k(B)$　⑤

④，⑤から$P_k(C)=1-2P_k(A)$　⑥

したがって，$P_{k-1}(C)=1-2P_{k-1}(A)$，これを①に代入して整理すると

$P_k(A)=\frac{1}{2}\{1-P_{k-1}(A)\}$，これを変形し，$P_1(A)=\frac{1}{2}$を用いて

$$P_k(A)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left\{P_{k-1}(A)-\frac{1}{3}\right\}=\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left\{P_{k-2}(A)-\frac{1}{3}\right\}=\cdots=\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}\left\{P_1(A)-\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}$$

$$P_k(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right\}$$

$k=n$として，$P_n(A)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right\}$　（答）

＜解説＞

複素数を扱うことから，z_kが複素数平面でどのような点に来るのかを確認しよう。与えられたコイン投げの表裏の演算規則から，z_kがA，B，Cの３点にくること，加えてA，B，Cの３点に存在する確率漸化式が明らかになる。

確率漸化式を解く場合，全事象の確率は1であることを忘れないこと。

$\boxed{5}$ (35点)

曲線$y=\log x$上の点A$(t, \log t)$における法線上に，点BをAB$=1$となるようにとる．ただしBのx座標はtより大きいとする．

(1) 点Bの座標$(u(t), v(t))$を求めよ．また$\left(\dfrac{du}{dt}, \dfrac{dv}{dt}\right)$を求めよ．

(2) 実数rは$0<r<1$を満たすとし，tがrから1まで動くときに点Aと点Bが描く曲線の長さをそれぞれ$L_1(r)$，$L_2(r)$とする．このとき，極限$\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))$を求めよ．

＜解答＞

(1)

$y=\log x$，$y'=\dfrac{1}{x}$だから，

点Aにおける法線の方程式は，$y-\log t=-t(x-t)$ ①

点Bはこの直線上の点だから，$v(t)-\log t=-t(u(t)-t)$ ②

$(\mathrm{AB})^2=(u(t)-t)^2+(v(t)-\log t)^2=1$ ③

②，③から$(u(t), v(t))=\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \log t-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ (答)

$\dfrac{du}{dt}=1-\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$

したがって$\left(\dfrac{du}{dt}, \dfrac{dv}{dt}\right)=\left\{1-\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right\}$ (答)

(2)

tがrから1まで動くときに

$y=\log x$上の点A$(t, \log t)$が描く曲線の長さは$L_1(r)=\displaystyle\int_r^1\sqrt{1+y'^2}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt$

点B$(u(t), v(t))$が描く曲線の長さは

$$L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\left\{1-\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}\right\}dt$$

したがって$L_1(r)-L_2(r)=\displaystyle\int_r^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$t=\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$とおけば，$\dfrac{1}{1+t^2}=\cos^2\theta$，$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，

$\therefore\displaystyle\int\frac{1}{1+t^2}dt=\int d\theta=\theta+Const.$，$t=1$のとき$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$t=r$のとき$\theta=\tan^{-1}r$だから，

$$L_1(r)-L_2(r)=\int_r^1\frac{1}{1+t^2}dt=\Big[\theta\Big]_{\tan^{-1}r}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}r$$

$\delta=\tan^{-1}r$とすれば，$r=\tan\delta$，$\displaystyle\lim_{r\to+0}\tan\delta=0$，$\therefore\displaystyle\lim_{r\to+0}\delta=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\lim_{r\to+0}\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)=\frac{\pi}{4}$ (答)

＜解説＞

図１のようなグラフを描いて，題意を把握し考察する。

(1)

法線とは接点を通り接線に垂直な直線である。数学IIIの教科書に「微分法の応用・導関数の応用」などとして記載されている。これらを理解していることが解答には欠かせない。

(2)

曲線の長さの求め方については，同じく数学IIIの教科書に「積分法の応用・曲線の長さ」などとして記載されている。これらを理解し，記憶していることが解答には欠かせない。

定積分では変数変換によって実行可能となる。この方法も知っていないと難しい。

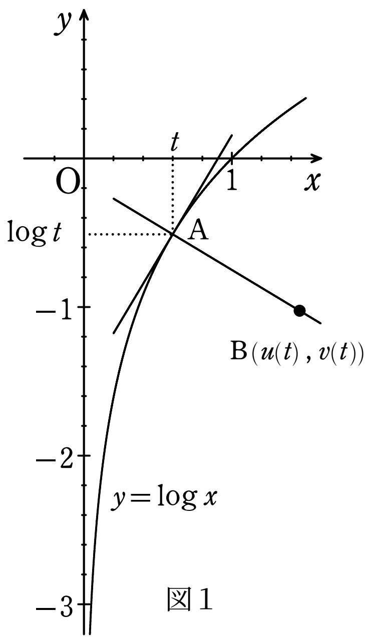

図１

$\boxed{6}$ (35点)

四面体ABCDはAC＝BD，AD＝BCを満たすとし，辺ABの中点をP，辺CDの中点をQとする．

(1) 辺ABと線分PQは垂直であることを示せ.

(2) 線分PQを含む平面αで四面体ABCDを切って２つの部分に分ける．このとき，２つの部分の体積は等しいことを示せ.

＜解答＞

(1)

図１は題意に沿って描いた四面体の略図である。

以下で，長さが線分ABに等しくAからBに向かうベクトルを$\overrightarrow{AB}$のように表わす。

点Qは△PCDにおいて辺CDの中点だから，$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$

点Pは△ABCにおいて辺ABの中点だから，$\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{CP}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

また，点Pは△ABDにおいて辺ABの中点だから，$\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{DP}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{4}\{\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})\}$　①

△ABCと△ABDにおいて，AC＝BD，BC＝ADだから，△ABC≡△ABD

したがって∠BAC＝∠ABD，∠ABC＝∠BADだから，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$，$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}$　②

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$　③

②，③から①の右辺＝0，$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，したがって両ベクトルは直交

したがって辺ABと線分PQは垂直である。

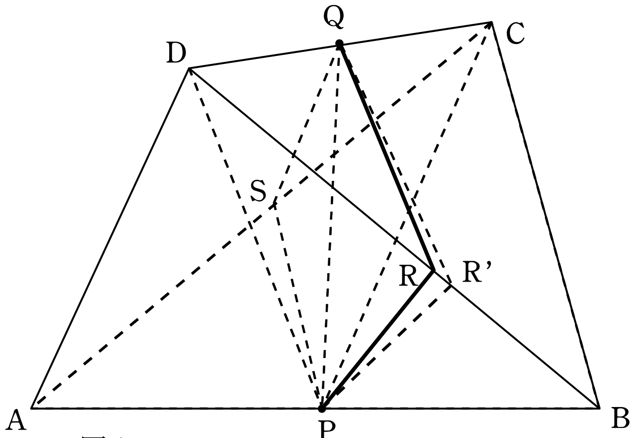

図１

(2)

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{4}\{\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})\}$　④

△ACD≡△BCDだから，(1)と同様に

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}$

したがって，④の右辺は0，$\therefore\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，したがって辺CDと線分PQは垂直である。

PQ を軸に180° 回転すると，頂点AとB，CとD が入れ替わるので，回転によって形成された四面体は元の四面体と同じである。

線分PQ を含む平面α によって四面体ABCD を切ると，図１のように２つの五面体 ADPRQSとBCPRQS に分割される。このとき，頂点 SとR 以外は重なり合う。もし点SがRに重ならないで，辺 BC 上のR’に来たとする。すると平面 PR’QS は平面 αとは別の平面になる。平面内の直線を軸に180°回転すると，元の平面に一致するはずだから，矛盾である。すなわちSはRに重なる。

以上によって，五面体ADPRQSとBCPRQSの頂点はPQを軸とする180°の回転によって一致するから，２つの五面体は合同である。すなわち，線分PQを含む平面αで四面体ABCDを切ってできる２つの部分の体積は等しい。

＜解説＞

(1)

立体図形の問題。四面体は最も単純な立体であり，入試数学で頻出される。ベクトルによって扱う場合が多いので，ベクトルによって扱おうと思った読者も多いことだろう。略図を描いて題意を把握すると，やはりベクトルを使うと容易だろうと気づく。ABとPQは垂直ということは，ベクトルの内積が0をいえば良い。また中点と頂点を結ぶ線分ベクトルは頂角をはさむ両辺のベクトルの結合によって表されることも知っているはずだ。これらは数学Ｂの教科書の「平面上のベクトル」「空間のベクトル」などに記載されている。

上の解答で，△ABC≡△ABDから$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$を導いた。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle BAC)$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cos(\angle ABD)$

ここでは，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$，∠BAC＝∠ABDだから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

当たり前のことだが，合同な三角形の対応する辺ベクトルの内積は等しい。このことを，この問題で利用する。また与えられた条件から，△ABC≡△ABD，△ACD≡△BCDに気づきたい。

(2)

題意は簡明だが，解答方針には着眼，着想が必要だ。体積が等しいことの証明ということだから，立体の体積を計算しよう，などと考えると迷路に入る。そこまでいかなくても，底面積や高さが等しいなど，体積を決めるパラメータが等しいことを考える，なども迷路に入る。

まずは(1)の利用を意識することが，着想に結びつくであろう。PQ⊥ABと同様にPQ⊥CDであることは容易に気づく。次にチョットした気づきが必要である。PQを軸に180°回転すると，四面体の頂点はどのように動くかである。AP＝PB，CQ＝QDかつAB⊥PQ，CD⊥PQだから，明らかにAとB，CとDは重なる。すると，この回転によって，四面体は元のままであることがわかる。

したがって回転軸PQを含む平面αで切ってできる２つの立体は同じとして良いか，という疑問が残る。ここではさらに解答のように，頂点SとRが重なることを示せば完全である。そのためには平面内の直線で平面を180°回転すると元の平面に重なるという，当たり前の論理に気づくことが必要である。

＜理系総評＞

例年同様，手強い問題がそろっている。受験者それぞれに得手不得手があろうから，一読して，大雑把に題意と難易を把握して，解答順序を決めたい。私は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$の順序で扱いたいと思った。

$\boxed{1}$

２つの放物線の接点が動く範囲を求める問題。2次関数の接点，接線，共有点等を取り扱うが，特段に難しい問題ではない。ただし，除外すべき特異点のあることに注意が必要である。難易度はＢ。

$\boxed{2}$

整数の問題は個別性が高いので，まずは解答方針の案出が必要となる。具象性を欠く問題なので，

解答方針の案出に戸惑う。そのような場合には，具体的に数値をあてはめてみて，結果から解答方針の手がかりを得ることが賢いやりかたである。

このようにして与えられた式が3の倍数となることを明らかにすれば，容易に扱うことができる。

難易度はＢ＋。

$\boxed{3}$

図形の問題で，三角関数による表式と計算，導関数の変化による最大値の計算等を含む。解答方針の案出では，四角形を決める変数を何にするかがポイントとなる。その変数によって求める量を表現できれば，常套的方法によって最大値を求めることができる。難易度はＢ＋。

$\boxed{4}$

コイン投げの表裏によって，複素数平面上の点を決める問題。まずは簡単な複素数演算が実行できなければならない。その上で，コイン投げによって３点を次々に選んでいくので，点が選ばれる事象の確率を確率漸化式によって表現する。確率漸化式も簡明なものであり，その解に至る計算も難しくはない。難易度はＢ＋。

$\boxed{5}$

微分，積分の応用問題。対数関数の微分，法線の方程式，曲線の長さ，など微分積分の応用の基本的な問題である。題意は簡明であり，紛れは少ない。公式を記憶していないと，曲線の長さを求めることは難しい。定積分の具体的な変数変換も知っていなければならない。難易度はA。

$\boxed{6}$

空間図形の問題で，ベクトルによって取り扱う。⑴はベクトルによる図形の取り扱いについて教科書に記載されている事項を応用すれば，容易に解くことができよう。⑵はチョットした気づき，着眼が必要であり，迷路に入りやすいので要注意である。⑴から⑵が誘導的に構成されていることに気づきたい。難易度はＢ＋。

このような証明問題の採点をどのように行うのか，どのような記述があれば満点とするのか，難しいだけに，興味深い。採点作業に苦労しているだろうが，大学の知性と責任感を信頼したい。

大学が解答例を提示すべきだとする議論があるが，私は反対である。このような証明問題で正解例はこうだ，と大学が言えばさまざまな議論が世間に生じて，収拾がつかない。説明責任があるとして，議論に終わりがなくなる。そして不公平議論に至り，受験生の救済などの話しが持ち上がる。

解答例の提示は，高等学校や塾関係者がすれば良いのである。要は当該の大学がこの問題から受験生の能力を判定するに相応しい解答をどの程度とするか，大学の責任の範囲だからである。そこを信頼しないと，入試は始まらない。これは様々な不正入試や出題ミスとは次元の違うテーマである。

181030

数学（文系）　　150点満点　120分

$\boxed{1}$　　(30点)

aは正の実数とし，座標平面内の点(x_0, y_0)は２つの曲線

$$C_1 : y=|x^2-1|,\ C_2 : y=x^2-2ax+2$$

の共有点であり，$|x_0| \fallingdotseq 1$を満たすとする．C_1とC_2が(x_0, y_0)で共通の接線をもつとき，C_1とC_2で囲まれる部分の面積を求めよ．

＜解答＞

共有点(x_0, y_0)で共通の接線をもつためには，共有点でC_1とC_2は接しなければならない。

ｉ) $x^2 \leqq 1$のとき

$C_1 : y=1-x^2$とC_2を連立させて$2x^2-2ax+1=0$　①

C_1とC_2が接するとき，①は重解をもつから，判別式$D=4a^2-8=0$，$a=\sqrt{2}$

共有点は$(x_0, y_0)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

ii) $x^2 \geqq 1$のとき

$C_1 : y=x^2-1$，$y'=2x$

$C_2 : y=x^2-2ax+2$，$y'=2x-2a$

a は正の実数だから $2x \fallingdotseq 2x-2a$，したがって両者が接することはない。

C_1とC_2を連立させると $2ax=3$，$\therefore\ x=\dfrac{3}{2a}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$，$y=\left(\dfrac{3}{2a}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}$

図１に$a=\sqrt{2}$として，C_1，C_2を示す。C_1とC_2で囲まれる部分の面積は

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(1-x^2)\}dx+\int_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}\{(x^2-2\sqrt{2}x+2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\sqrt{2}x^2+x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}+\left[-\sqrt{2}x^2+3x\right]_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}=\frac{23}{24}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\quad\text{（答）}$$

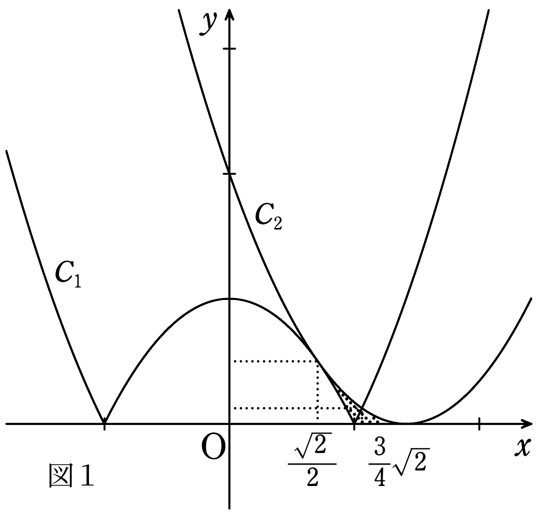

図１

＜解説＞

C_1とC_2が共有点(x_0, y_0)で共通の接線をもつ，ということから，C_1とC_2が(x_0, y_0)で接していると理解しなければならない。そこで，C_1とC_2が接する条件を考える。$x^2 \leqq 1$と$x^2 \geqq 1$とでは二次関数の表式が異なるので，場合分けして考えねばならない。

図１のような図を描いて，題意を把握しよう。C_1は直ぐに描ける。$a>0$だから，C_2の軸は$x=a>0$である。したがって図１のように，C_1とC_2が接する。

$\boxed{2}$ (30点)

1辺の長さが1の正方形ABCDにおいて，辺BC上にBとは異なる点Pを取り，線分APの垂直2等分線が辺AB，辺ADまたはその延長と交わる点をそれぞれQ，Rとする．

(1) 線分QRの長さをsin∠BAPを用いて表せ．

(2) 点Pが動くときの線分QRの最小値を求めよ．

＜解答＞

(1)

図１において，$\angle\mathrm{BAP}=\theta$，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$とおく。MをAPの中点とする。

$\mathrm{AM}=\dfrac{AP}{2}$，$\mathrm{AQ}=\dfrac{AM}{\cos\theta}=\dfrac{AP}{2\cos\theta}$，$\sin\theta=\dfrac{BP}{AP}$，$\cos\theta=\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{1}{AP}$

$\mathrm{QR}=\dfrac{AQ}{\sin\theta}=\dfrac{AP}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{2\sin\theta\cos^2\theta}=\dfrac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}$

$\sin\angle\mathrm{BAP}=\sin\theta=t$とおけば，$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2t(1-t^2)}$　（答）

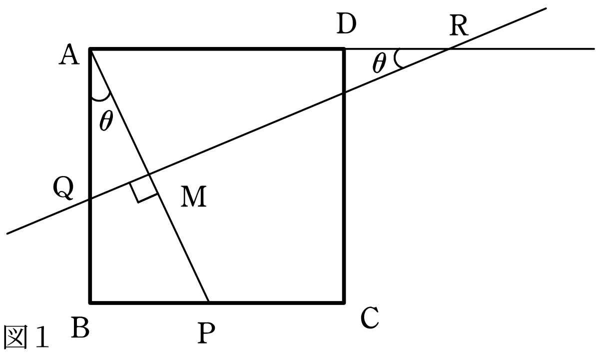

図１

(2)

点PがBC上をBからCまで動くとき，θとtは単調に$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$，$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$のように変化

$f(t)=2t(1-t^2)$とおけば，$f(t)$が最大値をとるとき，QRは最小値をとる。

$f'(t)=2-6t^2=0$のとき，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，したがって$f(t)$は図２のように変化する。

これより，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$において，$f(t)$は最大値をとる。$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

したがって，線分QRの最小値は$\dfrac{1}{f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\dfrac{9}{4\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　（答）

t	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$		$-$	
$f(t)$		↗		↘	

図１

＜解説＞

図１のような図を描いて考える。

(1)

$\angle$ARQ＝$\angle$BAPであることに容易に気づくから，QRをAQと$\angle$BAPによって，表現すれば良いと考える。$\angle$BAP$=\theta$とおき$\sin\angle$BAP$=\sin\theta=t$によってQRを表現すれば良い。

(2)

QRの式を見つめて，分子が最大値ととるとき，QRが最小値をとることに気づく。

$\boxed{3}$

(30点)

n^3-7n+9が素数となるような整数nをすべて求めよ.

理系の問題$\boxed{2}$に同じ。

$\boxed{4}$

(30点)

四面体ABCDはAC＝BD，AD＝BCを満たすとし，辺ABの中点をP，辺CDの中点をQとする.

(1) 辺ABと線分PQは垂直であることを示せ.

(2) 線分PQを含む平面αで四面体ABCDを切って２つの部分に分ける．このとき，２つの部分の体積は等しいことを示せ.

理系の問題$\boxed{6}$に同じ。

$\boxed{5}$

(30点)

整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える．ただし各球に書かれている整数は１つのみとする.

(ｉ) 袋から無作為に球を1個取り出し，その球に書かれている整数をkとする.

(ⅱ) $k \fallingdotseq 0$の場合，整数kが書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す.

(ⅲ) $k=0$の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より1大きい整数が書かれた球を1個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す.

整数0が書かれている球が1個入っており他の球が入っていない袋を用意する．この袋に上の一連の操作を繰り返しn回行った後に，袋の中にある球に書かれている$n+1$個の数の合計をX_nとする.例えばX_1は常に1である．以下$n \geqq 2$として次の問に答えよ.

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$である確率を求めよ.

(2) $X_n \leqq n+1$である確率を求めよ.

＜解答＞

(1)

毎回，整数 0 の球を取り出すと，n 回の操作により，球の整数は，$0, 1, 2, \cdots, n-1, n$　①

このときX_nは最大値をとり $X_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

しかるに $\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}=1$

したがって，$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$となるのは$X_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$と$X_n=\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$の場合

ⅰ) $X_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$の場合（n 回の操作すべてで，0の球を取り出す場合）

袋には0の球が1個入っているからk 回目の操作で0の球を取り出す確率は$\dfrac{1}{k}$

したがって，袋の中の球が①になる確率は $\dfrac{1}{1}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\cdots\times\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$

ⅱ) $X_n=\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$となる場合

袋の中の球の整数は①のnを$n-1$として，$0, 1, 2, \cdots, n-1, n-1$　②

$(n-1)$ 回目まで0の球を出す確率は $\dfrac{1}{(n-1)!}$，次に$(n-1)$の球を出す確率は$\dfrac{1}{n}$だから,

②となる確率は $\dfrac{1}{(n-1)!}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$

ⅰ，ⅱの場合は排反事象だから，$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$の確率は $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{n!}=\dfrac{2}{n!}$　（答）

(2)

X_nが最小となるのは球が $0, 1, 1, \cdots, 1, 1$　③　のように0の球が1個，1の球がn個の場合

このとき，$X_n=n$と最小値をとる。

したがって，$X_n \leqq n+1$となるのは，$X_n=n$または$X_n=n+1$の場合

ⅰ) $X_n=n$となる場合（2回目以降の操作で0が1度も出ない場合）

k回目の操作で0の球を取り出さない確率は$\dfrac{k-1}{k}$

したがって③になる確率は$\dfrac{1}{1}\times\dfrac{2-1}{2}\times\dfrac{3-1}{3}\times\cdots\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}$

ii) $X_n=n+1$となる場合

$X_n=n+1$となるのは,

袋の中の球が 0, 1, 1,・・，2，・・,1，1　④　のように0の球が1個，2の球が1個，1の球が$n-1$個

このためにはk回目の操作で0を出し，それ以外では1のみを出すこと（$2\leqq k\leqq n$）

k回目の操作で0を出す確率は$\dfrac{1}{k}$，1を出す確率は$\dfrac{k-1}{k}$,

k回目の操作で0を出した後，$k+1$回目の操作で1のみを出す確率は$\dfrac{k-2}{k+1}$

したがって袋の中の球が④のようになる確率は

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{1}\times\frac{2-1}{2}\times\cdots\times\frac{k-2}{k-1}\times\frac{1}{k}\times\frac{k-1}{k+1}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{n\,!}=\frac{(n-2)!}{n\,!}\times(n-1)$$

$$=\frac{1}{n}$$

i，iiの場合は排反事象だから，$X_n\leqq n+1$である確率は$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{n}$　（答）

＜解説＞

(1)

確率の問題には解答方針のために，着眼，着想が必要である。$\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$の表式がもつ意味をまずは把握したい。$X_n\geqq\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ということだから，$X_n$の最大値は何かを求めて考えようと気づくことが重要だ。当然，最大値は$\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$以上だろうから。

最大値を与える操作を考えると，毎回の操作で0を出す場合であることは容易にわかる。すると，X_nの最大値は$\dfrac{n(n+1)}{2}$。この表式と$\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$との関係は何か。ここでは，両者の差をとることが有効だ。（その差+1）が条件を満足するX_nの場合の数のめやすになるからだ。

幸い1だから，$X_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$\dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$の２つの場合を考えれば良いことがわかる。

(2)

今度は最小値を含む問題だから，最小値となる場合とその値を考える。こちらは，2回目以降，1の球を取り出す場合であることは容易にわかる。したがって求める確率は，$X_n=n$と$n+1$の２つの場合であることも容易にわかる。

$X_n=n+1$となるのは，1個の1の球の代わりに2の球が入っている場合であることは容易にわかる。それが，どのような過程によって実現されるかを的確に考察すること。計算もミスしやすいので注意が必要だ。

＜文系総評＞

例年通り，文系の問題としては骨の折れる問題が揃っている。３，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ などは理系の問題としても十分な歯ごたえがある。

$\boxed{1}$

2次関数の接線と面積の問題。大雑把な図を描いて，題意を把握しよう。定積分の計算をミスしないようにしたい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

題意に沿って図を描いて考えれば容易に解答できよう。難易度Ｃ。

$\boxed{3}$

文系の問題としては，手強いであろう。ただし，複雑な計算や公式の暗記を必要としないので，直感や発想によって正解に近い解答を得たい。難易度Ｂ＋

$\boxed{4}$

文系の問題としては，手強いであろう。ただし，複雑な計算や公式の暗記を必要としないので，直感や発想によって正解に近い解答を得たい。難易度Ｂ＋

$\boxed{5}$

文系の確率の問題としては，十分過ぎるほど歯応えがある。解答方針の考案のために，着眼，着想が必要なのだが，それがあらぬ方向に向かってしまうと，盲点ができて解答方針を誤る。

ここは，確率漸化式などの難しい方向に行かないようにしたい。難易度Ａ。

181107