2018（H30）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$　OA＝$\sqrt{7}$，OB＝$\sqrt{5}$，AB＝$\sqrt{6}$の△OABの外接円の中心をCとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として，次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$を求めよ。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$をみたす実数$s$，$t$を求めよ。

(3) 点Oを座標平面上の原点にとり，点Aの座標を$(0,\sqrt{7})$とする。このとき点B，Cの座標をそれぞれ求めよ。ただし，点Bは第1象限にあるとする。

＜解答＞

(1)

△OABにおける余弦定理を利用して，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos O=\frac{(\vec{a})^2+(\vec{b})^2-(AB)^2}{2}=3\quad（答）$$

△OACにおける余弦定理を利用して，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle AOC=\frac{(\vec{a})^2+(\vec{c})^2-(AC)^2}{2}=\frac{7}{2}\quad（答）$$

△OBCにおける余弦定理を利用して，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC=\frac{(\vec{b})^2+(\vec{c})^2-(BC)^2}{2}=\frac{5}{2}\quad（答）$$

(2)

(1)の結果を利用して，

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\,(s\vec{a}+t\vec{b})=s\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b},\ \therefore\ \frac{7}{2}=7s+3t\quad ①$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\,(s\vec{a}+t\vec{b})=s\vec{b}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{b},\ \therefore\ \frac{5}{2}=3s+5t\quad ②$$

①，②から$s=\dfrac{5}{13}$，$t=\dfrac{7}{26}$　（答）

(3)

点Bの座標を$(b_x,\ b_y)$とする。$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$だから，(1)の結果を利用して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}=\sqrt{7}\,b_y=3,\ b_y=\frac{3\sqrt{7}}{7},\ b_x=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{182}}{7}$$

したがって，$(b_x,\ b_y)=\left(\dfrac{\sqrt{182}}{7},\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right)$　（答）

点Cの座標を$(c_x,\ c_y)$とする。$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}$だから，(2)の結果を利用して

$$\vec{c} = s\vec{a}+t\vec{b}=\frac{5}{13}\vec{a}+\frac{7}{26}\vec{b}=\frac{5}{13}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{7}\end{pmatrix}+\frac{7}{26}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{182}}{7}\\ \frac{3\sqrt{7}}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{182}}{26}\\ \frac{\sqrt{7}}{2}\end{pmatrix}$$

したがって，$(c_x,\ c_y) = \left(\frac{\sqrt{182}}{26}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$　（答）

＜解説＞

図１のような概略図を描いて考える（ここでは，ソフトを使って描いたので正確な図だが，必要な図を大雑把に手書きする訓練をしておくことが図形問題には大事である）。

(1)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は△OABの余弦定理から，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ は△OACの余弦定理から，$\vec{b}\cdot\vec{c}$は△OBCの余弦定理から求まることに気づけば，容易に計算できる。

Cは△OABの外接円の中心だから，OC＝AC＝BC＝$|\overrightarrow{OC}|=|\vec{c}|$である。

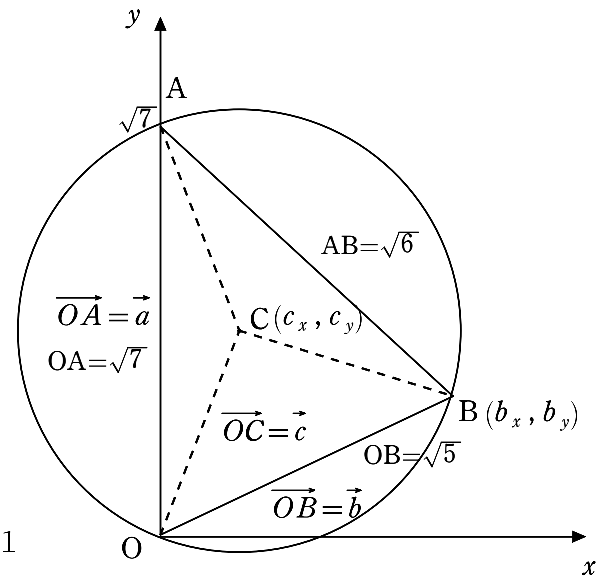

図１

(2)

(1)で$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めたのだから，これらを利用することを予測する。

(3)

原点から点へのベクトルは点の座標であることに注意する。(1)，(2)の結果を利用する。

$\boxed{2}$　袋Aには赤玉2個と白玉5個，袋Bには赤玉2個が入っている。まず，袋Aから3個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋Bに入れ，よくかき混ぜて，袋Bから2個の玉を同時に取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋Aから取り出された3個の玉が，赤玉1個と白玉2個である確率，白玉3個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋Bから取り出された玉が2個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋Bから取り出された玉が2個とも白玉であったとき，袋Bに白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

Aの袋に入っている7個の玉から3個の玉を取り出す場合の数は${}_7C_3=35$通り

赤玉2個から1個を取り出す場合の数は${}_2C_1=2$通り

白玉5個から2個を取り出す場合の数は${}_5C_2=10$通り

Aの袋から赤玉1個，白玉2個を取り出す場合の数は${}_2C_1\times{}_5C_2=20$通り

Aの袋から白玉3個を取り出す場合の数は${}_5C_3=10$通り

したがって，袋Aから取り出された3個の玉が，赤玉1個と白玉2個である確率は

$$\frac{{}_2C_1\times{}_5C_2}{{}_7C_3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$ （答）

したがって，袋Aから取り出された3個の玉が，白玉3個である確率は$\dfrac{{}_5C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$ （答）

(2)

Bの袋には2個以上の白玉が入っている必要があるから，Bの袋に入っている玉の組み合わせは

a. 赤玉3個，白玉2個（袋Aから赤玉1個，白玉2個を袋Bに移動）

b. 赤玉2個，白玉3個（袋Aから白玉3個を袋Bに移動）

(1)の結果を利用して，

a. の場合で白玉2個を取り出す場合の確率$=\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times$(a.の確率) $=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{2}{35}$

b. の場合で白玉2個を取り出す場合の確率$=\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times$(b.の確率) $=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{35}$

両者は排反事象だから，袋Bから取り出された玉が2個とも白玉である確率 $=\dfrac{2}{35}+\dfrac{3}{35}=\dfrac{1}{7}$ （答）

(3)

白玉が残るのはb. の場合だから，袋Bから取り出された玉が2個とも白玉であったとき，袋Bに白玉が残っている条件付き確率は，

$$\frac{b.\text{の確率}}{\text{袋}B\text{から取り出された玉が2個とも白玉である確率}}=\frac{(3/35)}{(1/7)}=\frac{3}{5}$$ （答）

＜解説＞

確率の基礎的な知識と思考力を問う問題である。

(1)

特定の事象の確率は，その事象の発生する場合の数を発生する事象の場合の総数で除することによって求まる。このとき，すべての場合の発生は同じ確からしさで発生するとする。

ここでは，7個の玉が入っている袋Aから，3個の玉を取り出すという事象を扱う。この事象に含まれる赤玉2個，白玉1個という事象の確率を求める。さらに白玉3個という事象の確率を求める。

(2)

(1)の過程を経た後の袋Bから玉2個を取り出すという事象の中で，2個とも白玉である事象の確率を求める。2個とも白玉であるためには，(1)で扱った袋Aから袋Bへの玉の移動である。

(3)

条件付き確率の考え方をしっかり理解していること。

$\boxed{3}$　座標平面上に点O$(0\,,0)$，A$(0\,,1)$，B$(-1\,,1)$，C$(-1\,,0)$，P$(t\,,0)$がある。ただし，tは正の実数である。また，線分OA上の点および線分BC上の点を通る直線l：$y=ax+b$がある。

次の問いに答えよ。

(1) 直線 l が正方形 OABC の面積を2等分するとき，aをbを用いて表せ。

(2) 直線 l が正方形 OABC の面積を2等分し，さらに直角三角形OAPの面積を2等分するとき，bをtを用いて表せ。

(3) $t\to+0$および$t\to\infty$のときの(2)で求めたbの極限値をそれぞれ求めよ。

＜解答＞

(1)

図１を参照する。

直線lが線分OA上の点およびBC上の点を通って正方形OABCの面積を2等分するので，正方形OABCの対角線の交点 $\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$を通る。

したがって，$\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}a+b$，$\therefore\ a=2b-1$　（答）

(2)

$0\leqq b\leqq 1$だから，直線lは線分OPと交わるか，線分APと交わるかのいずれかである。

交点をQとするとき，QがOP上にあれば$b<\dfrac{1}{2}$だから，△ODQの面積は明らかに△OAPの面積の半分より小さい。したがってQがAP上にある場合を考えれば良い。

直線lの方程式は$y=(2b-1)x+b$　①

線分APを含む直線の方程式は$y=-\dfrac{1}{t}(x-t)$　②

①，②から，直線lと線分APの交点Qのx座標 $q_x=\dfrac{(1-b)t}{(2b-1)t+1}$

△ADQの面積$=\dfrac{1}{2}q_x(1-b)=\dfrac{(1-b)^2t}{2(2b-1)t+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}t$，$\therefore\ b=\dfrac{2+t\pm\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$

$0\leqq b\leqq 1$だから，$b=\dfrac{2+t-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$　（答）

(3)

$$\lim_{t\to+0}b=\lim_{t\to+0}\left(\frac{2+t-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad（答）$$

$$\lim_{t\to\infty} b=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2+t-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2+t-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}\right)\left\{\frac{(2+t)+\sqrt{t^2+2t+2}}{(2+t)+\sqrt{t^2+2t+2}}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{(2+t)^2-(t^2+2t+2)}{(2+t)+\sqrt{t^2+2t+2}}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{t+1}{(2+t)+\sqrt{t^2+2t+2}}\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1+1/t}{(2/t+1)+\sqrt{1+2/t+2/t^2}}\right\}=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$ （答）

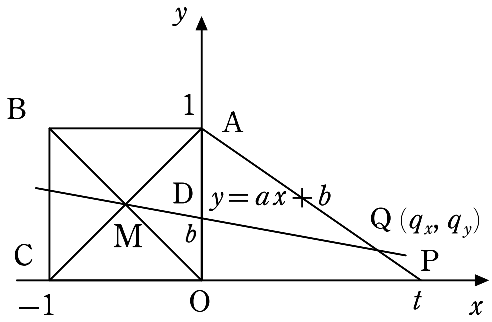

図１

＜解説＞

(1)

正方形の面積を2分する直線は正方形の対角線の交点Mを通るとして，始めると簡明である。これを証明抜きで使っても良いか，であるが容易な証明であるから，良いであろう。

もし，証明しなければならないとするなら，直線lが線分OA，BC上の点を通ることを前提にしているのだから，直接$a=2b-1$を導く方が簡単である。

すなわち，直線lと線分OAの交点をD$(0, d)$，直線lと線分BCの交点をE$(-1, e)$とする。

$y=ax+b$において，$x=0$とすれば$y=b$だから，$d=b$

$y=ax+b$において，$x=-1$とすれば$y=b-a$だから，$e=b-a$

EDは正方形 OABC の面積を2等分するので，$d+e=b+b-a=1$，$\therefore\ a=2b-1$

(2)

直線lが△OAPの辺OP，APのいずれと交わるかについて，まず議論しておかなければならない。OPと交わる場合には，△OAPを2等分することはないので，APと交わる場合のみ考えれば良い。

(3)

$t\to\infty$のとき，明らかにQはPに限りなく接近する。すると明らかに直線lはx軸に限りなく平行になる。したがって，bば限りなく$\frac{1}{2}$に近づく。

極限値を求める場合，分母，分子ともtを含む関数として計算することによって，分母が0になって発散するような形式を避けるテクニックが必要である。

$\boxed{4}$ 座標平面上の $x>0$ の領域において，２つの曲線 C_1：$y=\dfrac{\log x}{x}$ と C_2：$y=\dfrac{k}{x}$ を考える。

ここで，k は正の実数である。曲線 C_1と曲線 C_2 はただ１つの交点をもつので，そのx 座標をaとする。a が $1<a<e$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。また，必要ならば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x=1$ および直線 $x=e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。

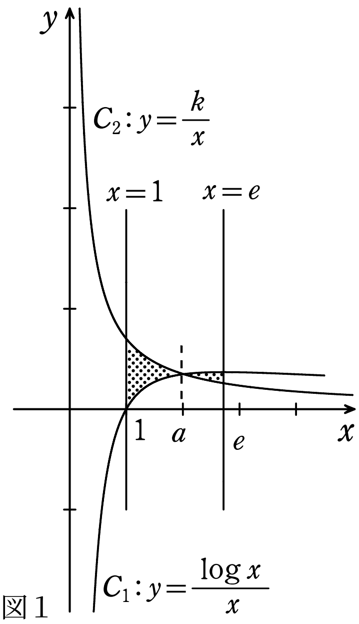

図１

＜解答＞

(1)

$$C_1 : y=\frac{\log x}{x}, \quad C_2 : y=\frac{k}{x}$$

$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{k}{x}$ として，$x=a=e^k$，$1 < e^k < e$

$e^k=1$のとき，$k=0$，$\therefore 0 < k < 1$　（答）

(2)

$$S=\int_1^{e^k}\left(\frac{k}{x}-\frac{\log x}{x}\right)dx+\int_{e^k}^{e}\left(\frac{\log x}{x}-\frac{k}{x}\right)dx$$

$$=\left[k\log x-\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e^k}+\left[\frac{1}{2}(\log x)^2-k\log x\right]_{e^k}^{e}$$

$$=k^2-k+\frac{1}{2}$$　（答）

(3)

$S(k)=k^2-k+\dfrac{1}{2}=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，したがって$S$の最小値は$\dfrac{1}{4}$　（答）

そのときのkの値は$\dfrac{1}{2}$　（答）

＜解説＞

(2)

$x>0$において，

不定積分$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log x$

不定積分$\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx=\frac{1}{2}(\log x)^2$

を利用する。

$\boxed{5}$　自然数 n に対して，関数$f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき1とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$$

の和を求めよ。

＜解答＞

(1)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$は初項1，公比$(-x)^3$の等比数列の初項から$(n+1)$項までの和だから，

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=(1+x)\times\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{x^2-x+1}$$

したがって，$f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$

(2)

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqq\dfrac{3}{4}$，したがって$x^2-x+1$の最小値は$\dfrac{3}{4}$だから，

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\right|=|(-1)^{n+1}|\left|\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\right|=\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}x^{3n+3},\ \text{ただし}0\leqq x\leqq 1$$

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|\int_0^1(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|$$

$$=|(-1)^{n+1}|\left|\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^{3n+3}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$$

(3)

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)\right\}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{3k}(1+x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{\int_0^1 x^{3k}dx+\int_0^1 x^{3k+1}dx\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{\left[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^1+\left[\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\right]_0^1\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1 f_n(x)dx$$

$x-\dfrac{1}{2}=u$，$u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$と変数変換すると，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+\dfrac{3}{4}}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\int_0^1 f_n(x)dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\right\}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

$\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$だから，$-\dfrac{4}{3(3n+4)}\leqq\int_0^1 f_n(x)dx\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$

$n\to\infty$によって，$\int_0^1 f_n(x)dx$ の下限値，上限値とも0に収束するから，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$　（答）

＜解説＞

(1)

先ずは級数を整式によって表し，式を整理することを考える。

$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$を利用する。

(2)

(1)で得た$f_n(x)$の表式を適用して定積分の計算をすればよい。

$0\leqq x\leqq 1$において，$\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\geqq 0$を利用する。

(3)

(1)，(2)を活用して解く，誘導問題であることは容易に気づく。しかし，与えられた表式と(1)，(2)がどのように結びつくか，ちょっとした気づき（着眼，着想）がないと迷路にはまり込んでしまう。

$\dfrac{1}{3k+1}$，$\dfrac{2}{3k+1}$といった表式が(1)，(2)とどのように関係しているのか，試験場では冷静になって考えてみよう。このとき，直観的に$(-x)^{3k}$の不定積分から$\dfrac{1}{3k+1}$の表式が出てくると閃けばすばらしい。

すなわち$\int x^{3k}dx=\dfrac{x^{3k+1}}{3k+1}$，さらに$\int_0^1 x^{3k}dx=\left[\dfrac{x^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{3k+1}$を閃きたいのである。この閃きに通じる計算は，(2)で$\int_0^1\left(\dfrac{4}{3}x^{3n+3}\right)dx=\dfrac{4}{3}\left[\dfrac{x^{3n+4}}{3n+4}\right]_0^1=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{(3n+4)}$として行っている。すると，

$$\int_0^1(-x)^{3k}dx=(-1)^{3k}\int_0^1 x^{3k}dx=(-1)^k\left[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^1=\frac{(-1)^k}{3k+1}$$

$$\int_0^1(-x)^{3k}xdx=(-1)^{3k}\int_0^1 x^{3k+1}dx=(-1)^k\left[\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\right]_0^1=-\frac{(-1)^k}{3k+2}$$

であるから，$\int_0^1 f_n(x)dx$を考えれば，直ぐ(3)の表式が出てくることになる。

次なる問題は$\int_0^1\dfrac{1}{x^2-x+1}dx$の計算である。置換積分法を用いるのだが，試験場で具体的な変数変換を考案するのでは，時間不足で正答できないであろう。数IIIの教科書の「定積分の置換積分法」の

項に「被積分関数が$\dfrac{1}{x^2+a^2}$（$a>0$）の形のときは，$x=a\tan\theta$とおく置換積分法によって，

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$ において $x=\tan\theta$と置換するのと同様に計算できる」と記載がある。このことを理解し，

記憶しているかどうかが，正否を分けることになろう。

以下のような変数変換と不定積分の経過をたどる。

$$\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}},\quad u=x-\frac{1}{2},\quad x\,[0,\,1]\to u\,[-1/2\,,\,1/2]$$

$$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\text{とおくと，}\ \frac{du}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\tan^2\theta+1),\quad u\,[-1/2\,,\,1/2]\to\theta\,[-\pi/6\,,\,\pi/6]$$

$$\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{(\tan^2\theta+1)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(\tan^2\theta+1)}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\theta$$

<総評>

$\boxed{5}$以外は，例年に比して容易と思われるので，$\boxed{1}$～$\boxed{4}$は正答したい。その上で，$\boxed{5}$に取り組み(1)，(2)を正答したい。全体として8割ほどの点数を得たい。

$\boxed{1}$

平面図形のベクトルによる取扱いの問題。図形を大雑把に描きながら，問題文から余弦定理を使うと良さそうだ，などの気づきを得たい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

確率の基礎的な思考力を問う問題であり，解答方針の案出に着想を必要とするような複雑な問題ではない。場合の数，組合わせの数の表式と計算，確率および条件付き確率の求め方等の基礎的事項をしっかりと身に付けていること。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$

関数のグラフによる図形の取り扱いの問題。略図を描いて，問題の全体を理解し，解答方針を考えよう。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

対数関数など関数のグラフを描き，題意を把握しよう。対数関数の積分などを理解している必要がある。難易度Ｂ－。

$\boxed{5}$

数学の知識と思考力を幅広く問うことのできる良問と思う。数学を質量ともにしっかり勉強してこないと，扱いに苦労するであろう。

(1)では与えられた式を凝視し，解答方針を着想する。等比級数，因数分解等が問われる。(2)では2次関数の最小値，積分等が問われる。(3)では(1)，(2)を活用した解答方針への着眼着想と思考力，置換積分，三角関数の微分積分などが問われる。

(1)，(2)は難しくはないので，正答したい。(3)は解答方針を着想して，記載するところまでは辿り着

きたい。置換積分による定積分を実行して満点としたいが，部分点を得て全体として8割くらいの得点が得られるように粘りたい。(1)，(2)は難易度Ｂ－，(3)はＡ。全体として難易度Ａ。

＜人文，教育，経済，農，創生学部＞ （90分）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ をみたす θ の値をすべて求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) 不等式 $9^x-3^x<6$ をみたす x の値の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ をみたす x の値の範囲を求めよ。

＜解答＞

(1)

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$，$\sin\theta-2\fallingdotseq 0$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$，したがって $0\leqq\theta<2\pi$ では，$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ （答）

(2)

与式を変形して，

$9^x-3^x-6=3^{2x}-3^x-6=(3^x+2)(3^x-3)<0$，すべての実数 x に対して $0<3^x$ だから，$0<3^x<3^1$

関数 $f(x)=3^x$ は単調増加であるから，$x<1$ （答）

(3)

真数は正なので $x>0$，与式を変形して，

$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-8=(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x-8=(\log_{10}x-4)(\log_{10}x+2)\geqq 0$

$\therefore\ \log_{10}x\leqq-2=\log_{10}10^{-2}$，$\log_{10}x\geqq 4=\log_{10}10^4$

関数 $f(x)=\log_{10}x$ は単調増加であるから，$x\leqq 10^{-2}$，$x\geqq 10^4$

したがって，$0<x\leqq 10^{-2}$，$x\geqq 10^4$ （答）

＜解説＞

(1)

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ だから，$\sin\theta-2\fallingdotseq 0$ である。

(2)

$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2$ に気づくこと。

(3)

$\log_{10}x^2=2\log_{10}x$ に気づくこと。

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{3}$ 理系の $\boxed{2}$ に同じ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) 関数 $y=|x^2-a^2|$ のグラフの概形をかけ。

(2) 定積分 $S=\int_0^2|x^2-a^2|dx$ を a を用いて表せ。

(3) S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１の通り。

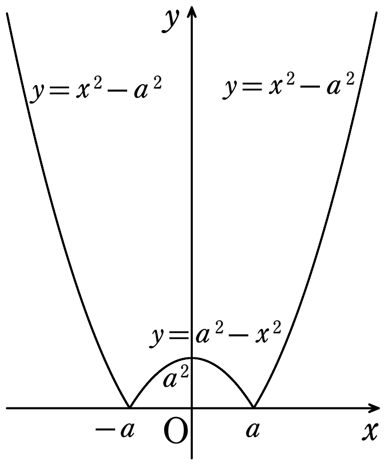

図１

(2)

ⅰ) $0<a\leqq 2$のとき

$$S=\int_0^2|x^2-a^2|dx=\int_0^a(a^2-x^2)dx+\int_a^2(x^2-a^2)dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^2$$

$$=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$

ⅱ) $2\leqq a$ のとき

$$S=\int_0^2|x^2-a^2|dx=\int_0^2(a^2-x^2)dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2a^2-\frac{8}{3}$$

以上によって，

$0<a\leqq 2$ のとき $S=\dfrac{4}{3}a^3-2a^2+\dfrac{8}{3}$　（答）

$2\leqq a$ のとき $S=2a^2-\dfrac{8}{3}$　（答）

(3)

ⅰ) $0<a\leqq 2$ のとき $S=\dfrac{4}{3}a^3-2a^2+\dfrac{8}{3}$

$S=\dfrac{4}{3}a^3-2a^2+\dfrac{8}{3}$，$S'=\dfrac{dS}{da}=4a^2-4a=4a(a-1)$

S は図２のように変化するから，$a=1$で最小値２をとる。

a	0		1		2
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

図２

ⅱ) $2\leqq a$ のとき

S は a とともに単調増加だから，$a=2$で最小値 $\dfrac{16}{3}$ をとる。

以上によって，S の最小値は２，そのとき $a=1$　（答）

＜解説＞

絶対値記号を含む2次関数のグラフと積分，微分に関する問題。

(1)

グラフの概形をかけ，ということだから，どの程度正確に描けば良いのか，などと考えて，時間を浪費することのないように。美しくも，正確でもなくても良い。

採点者が数学的な意味を理解できれば良い。すると，下記のようであれば良い。

•横にx軸直線，縦にy軸直線が描かれている。それらはほぼ真っ直ぐで直角に交わっている。

•原点O，x軸上に$-a$，aの点，y軸上にa^2の点が記号とともに記載されている。

•$x \leqq -a$，$x \geqq a$では，(x^2-a^2)を示す放物線らしい線が描かれている。

•$-a \leqq x \leqq a$では，(a^2-x^2)を示す放物線らしい線が描かれている。

解答に記載した図１を手書きすれば良いのだが，上記のような指針の下，ほぼ似ていれば良い。

(2)

$x=a$を境にグラフが変わるのだから，aと2の大小関係によって，取扱いを変えねばならないことはわかるであろう。

(3)

(2)で扱ったaの範囲に応じて最小値を求めて，まとめる。

＜総評＞

４問９０分。昨年は４問中３問が理系と同じだったが，今年は２問であった。

文系用の$\boxed{1}$，$\boxed{4}$は題意は簡明で，計算や思考に難しさはないのだから，スムーズに解答したい。

理系と同じ２問は文系の受験者には，骨がおれるかも知れないが，新大合格をめざすのだから，頑張りたいところだ。完答できなくても，$\boxed{2}$(1)，(2)，$\boxed{3}$(1)，(2)は正答したい。

こうして80%はほぼ正答して，70%以上の得点をめざしたい。

180820