2018（H30)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

（物理，化学，生物，地学のうち２科目受験で150分）

$\boxed{1}$

＜解答＞

問（１）(a)

円柱に働く浮力と重力がつり合っているから $F_0+Mg=0$

したがって，$F_0=-Mg$　（答）

浮力はアルキメデスの原理により，円柱が排除した液体の重力に等しいから

$F_0=-dS\rho g$，$\therefore\ d=-\dfrac{F_0}{S\rho g}=\dfrac{M}{S\rho}$　（答）

(b)

小球の力学的エネルギー保存の法則により，$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=mgh$，$\therefore\ v_0=\sqrt{2gh}$　（答）

小球と円柱の衝突の前後の運動量保存の法則により，$mv_0=mv+MV$　①

衝突は弾性衝突だから，$1=\dfrac{|v-V|}{|v_0-0|}=\dfrac{-v+V}{v_0}$，$-v+V=v_0$　②

①，②から $v=-\dfrac{M-m}{M+m}v_0=-\dfrac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}$　（答），$V=v_0+v=\dfrac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}$　（答）

(c)

衝突後の小球の力学的エネルギーの保存の法則により，

$mgH=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\left(-\dfrac{M-m}{M+m}v_0\right)^2=\dfrac{1}{2}m\left(-\dfrac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2$，$\therefore\ H=\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)^2h$　（答）

問（２）(a)

おもりと円柱の重力と，ばねと浮力の復元力とがつり合っているので，

$(m+M)g-\{kx_0+(d+x_0)S\rho g\}=-kx_0+mg-x_0S\rho g=0$，$\therefore\ x_0=\dfrac{mg}{k+\rho Sg}$　（答）

(b)

おもりと円柱はつり合いの位置から $\varDelta x$ 変位したとき，

ばねによる復元力は $-k\varDelta x$，浮力による復元力は $-\varDelta xS\rho g$

したがって，$F=-K\varDelta x=-(k+S\rho g)\varDelta x$，$\therefore\ K=k+S\rho g$　（答）

運動方程式は $F=(m+M)a=(m+M)\dfrac{d^2}{dt^2}(\varDelta x)=-K\varDelta x$

変位に比例した逆方向の力が働くので，おもりと円柱は単振動をする。

単振動の角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m+M}}=\sqrt{\dfrac{k+\rho Sg}{m+M}}$，周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k+S\rho g}}$　（答）

(c)

おもりと円柱はつり合いの位置 $x=x_0$ を中心とする単振動をする。

$x=x_0$ における力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}(m+M)u^2+\dfrac{1}{2}K{x_0}^2$

ただしuは速さで，振動の中心$x=x_0$では，$u=x_0\omega$

$x=x_0$でおもりを取り除いたときの円柱の力学的エネルギーは$\dfrac{1}{2}Mu^2+\dfrac{1}{2}Kx_0{}^2$

このとき，円柱はつり合いの位置 $x=0$ を中心とし，振幅がAの単振動をする。

したがって，$x=A$ における円柱の力学的エネルギーは，ばねと浮力による弾性エネルギー$\dfrac{1}{2}KA^2$

力学的エネルギー保存の法則により，$\dfrac{1}{2}KA^2=\dfrac{1}{2}Mu^2+\dfrac{1}{2}Kx_0{}^2$

$KA^2=Mx_0{}^2\omega^2+Kx_0{}^2=(M\omega^2+K)x_0{}^2=\dfrac{m+2M}{m+M}Kx_0{}^2$，$\therefore\ A=\sqrt{\dfrac{m+2M}{m+M}}\,x_0$　（答）

＜解説＞

問（１）(b)

運動量保存の法則とはねかえり係数1を示す式とから求める。

問（２）(a)

働く力として重力，ばねの弾性力，浮力を計算する。

(b)

(a)の計算において，つり合いの位置から変位したとき，変位に比例し向きが逆の力が働くことを理解する。問題文に記載の通りである。その運動方程式を書き下してみると，ばねの弾性力と浮力とが，(a)の通り，$\varDelta x$に比例した力として扱えることがわかる。そこで，ここでは $K=k+S\rho g$ として両者を一体的に扱う。

$\varDelta x=(x-x_0)=x_0\cos\omega t$，$\dfrac{d}{dt}(\varDelta x)=-x_0\omega\sin\omega t$，$\dfrac{d^2}{dt^2}(\varDelta x)=-x_0\omega^2\cos\omega t$，として考えれば良い。

ここでややこしいのは，振動の中心 $x=x_0$ と，振動の振幅 x_0と同じことである。注意して理解してほしい。

(c)

ここで起きる物理現象を的確に把握することが必要である。まず，おもりをつけて$x=0$で手を離したとき，おもりと円柱とはつり合いの位置$x=x_0$を中心とした単振動をする。

$x=x_0$でおもりを取り除いたとき，円柱はつり合いの位置$x=0$を中心とした単振動をする。この単振動の振幅は，おもりを取り除いたときの円柱のもつ力学エネルギーに依存するので，エネルギー保存の法則から求めることを着想したい。

おもりを取り除いたとき円柱は$x=x_0$を中心とした単振動の速さによる運動エネルギーと（ばねと浮力）による弾性エネルギーとをもつ。

振幅Aとは円柱が最も下方（あるいは上方）へ振れたときの変位だから，その位置は$x=A$である。この位置では円柱の速さは0で，（ばねと浮力）による弾性エネルギーのみをもつ。エネルギー保存の法則により，$x=x_0$と$x=A$における力学的エネルギーが等しいとして振幅Aを求める。

ここで問題はエネルギー保存の法則を考えるとき，円柱とおもりの重力による位置エネルギーを考える必要がないか，ということである。これをまともに考え始めると，時間がかかって収拾がつかなくなる。本来は，ここまで考えた上で解答することが物理をまともに考えたということなのだが，そのようにすると，おそらく正答にはいたらず，試験の成績は下がってしまうだろう。矛盾である。

円柱の位置エネルギーの変動は液体の位置エネルギーの変動によって相殺されるので，ここでは（ばねの弾性力と浮力）による弾性エネルギーのみを考えれば良い，ということである。さらには液面と円柱表面に働く大気圧については，同じ大気圧なので運動には影響しない。

$\boxed{2}$

＜解答＞

問（1）(a)

$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}$　（答）

(b)

$a \leqq x \leqq b$のとき，コンデンサー１に蓄えられる

電気量は $Q_1=C_1V=\dfrac{\varepsilon_0 S}{x}V$　（答）

静電エネルギーは $U_1=\dfrac{1}{2}Q_1V=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2x}V^2$　（答）

$b<x<c$のとき，コンデンサー１に蓄えられている電荷はどこにも移動しないので，

電気量は$x=b$のときの電気量と同じで，$Q_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}V$　（答）

静電エネルギーは $U_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{{Q_1}^2}{C_1}=\dfrac{\varepsilon_0 Sx}{2b^2}V^2$　（答）

(c)

間隔xが$x=a$から$x=b$まで変化するとき，関係する仕事は,

- ピストンを上昇させるために外部からした仕事　W
- 電池がコンデンサー１に電気量を供給するときに電池がした仕事

  $x=b$では電気量が $\dfrac{\varepsilon_0 S}{a}V$から$\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}V$に減少するので，電池がした仕事は$\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}V^2-\dfrac{\varepsilon_0 S}{a}V^2$
- コンデンサー１に蓄積される静電エネルギーの変化

  $\dfrac{\varepsilon_0 S}{2b}V^2-\dfrac{\varepsilon_0 S}{2a}V^2$

ピストンを上昇させる仕事をして静電容量が変化し，電池が仕事をした結果，静電エネルギーが変化したのだから,

エネルギー保存の法則により，$W+\dfrac{\varepsilon_0 S}{b}V^2-\dfrac{\varepsilon_0 S}{a}V^2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2b}V^2-\dfrac{\varepsilon_0 S}{2a}V^2$

$W=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2a}V^2-\dfrac{\varepsilon_0 S}{2b}V^2=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)V^2$　（答）

問（2）(a)

C_1とC_2は並列接続だから，合成容量$C_{GP}=C_c+C_2$　（答）

(b)

C_1には$x=b$において電気量$Q_1=Q_b$が蓄積，$x=c$においても電気量はそのまま

スイッチを閉じると，その電気量がC_2に流れ込み，２つのコンデンサーの両端電圧が同じになる。

その両端電圧をV_{c2}とすれば，

C_1に蓄積された電気量はC_cV_{c2}，C_2に蓄積された電気量はC_2V_{c2}

したがって$Q_b=C_cV_{c2}+C_2V_{c2}$，$\therefore V_{c2}=\dfrac{Q_b}{C_c+C_2}$，$\therefore Q_2=C_2V_{c2}=\dfrac{C_2Q_b}{C_c+C_2}$　（答）

(c)

コンデンサー２の電位差が変化しなくなるということは，その電気量も変化しなくなる。

ということはコンデンサー１との間の電気量の移動もないので，コンデンサー１の電気量も変化しない。すると，コンデンサー１の電位差も変化なく，コンデンサー２の電位差に等しくなる。

すなわち，$V_F=V_1=\dfrac{Q_b}{C_c}=\dfrac{\varepsilon_0S}{b}V\div\dfrac{\varepsilon_0S}{c}=\dfrac{c}{b}V$　（答）

＜解説＞

可動極板をもつコンデンサー回路に関する問題。

問（１）(c)

この過程で関わる仕事をすべて考慮に入れよう。電池がする仕事を忘れないこと。ここでは，ピストン板の質量についての記載がないので，重力について考慮する必要はない。

問（２）(c)

毎回の操作による電位差を計算する別解を紹介する。

n回の操作でコンデンサー２の電位差がV_nであったとすれば，

そのときコンデンサー２の電気量はC_2V_n，次の操作でコンデンサー１は電気量Q_bを運び，

コンデンサー１，２の電位差はV_{n+1}になる。すなわち

$(C_c+C_2)V_{n+1}=Q_b+C_2V_n$　①

ここで$C_c+C_2=p$，$C_2=q$，とおいて，$p(V_{n+1}-r)=q(V_n-r)$　②とおけば，$r=\dfrac{Q_b}{p-q}=\dfrac{Q_b}{C_c}$

②式で$n=1$から$(n-1)$まで左辺，右辺どうしをかけて，整理すると

$p^{n-1}(V_n-r)=q^{n-1}(V_1-r)$，$V_n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}(V_1-r)+r$，$\dfrac{q}{p}<1$だから

$V_F=\lim\limits_{n\to\infty}V_n=r=\dfrac{Q_b}{C_c}$，　$Q_b=\dfrac{\varepsilon_0S}{b}V$，$C_c=\dfrac{\varepsilon_0S}{c}$だから，$V_F=\lim\limits_{n\to\infty}V_n=r=\dfrac{Q_b}{C_c}=\dfrac{c}{b}V$　（答）

$\boxed{3}$

＜解答＞

問（１）(a)

$l_A=\sqrt{l^2+\left(Y-\dfrac{d}{2}\right)^2}$，$l_B=\sqrt{l^2+\left(Y+\dfrac{d}{2}\right)^2}$　（答）

(b)

$$l_A=\sqrt{l^2+\left(Y-\frac{d}{2}\right)^2}=l\sqrt{1+\frac{1}{l^2}\left(Y-\frac{d}{2}\right)^2}\fallingdotseq l+\frac{1}{2l}\left(Y-\frac{d}{2}\right)^2$$

$$l_B=\sqrt{l^2+\left(Y+\frac{d}{2}\right)^2}=l\sqrt{1+\frac{1}{l^2}\left(Y+\frac{d}{2}\right)^2}\fallingdotseq l+\frac{1}{2l}\left(Y+\frac{d}{2}\right)^2$$

音波の経路長の差 $l_B-l_A=m\lambda$ のとき，音が強めあう。

したがって $l_B-l_A\fallingdotseq\frac{Yd}{l}=\frac{Y_m d}{l}=m\lambda$，$\therefore Y_m=\frac{l}{d}m\lambda$　（答）

(c)

音源S’から穴A，Bまでの距離をL_A，L_Bとする。

$$L_A=\sqrt{L^2+\left(D-\frac{d}{2}\right)^2}=L\sqrt{1+\frac{1}{L^2}\left(D-\frac{d}{2}\right)^2}\fallingdotseq L+\frac{1}{2L}\left(D-\frac{d}{2}\right)^2$$

$$L_B=\sqrt{L^2+\left(D+\frac{d}{2}\right)^2}=L\sqrt{1+\frac{1}{L^2}\left(D+\frac{d}{2}\right)^2}\fallingdotseq L+\frac{1}{2L}\left(D+\frac{d}{2}\right)^2$$

$$L_B-L_A\fallingdotseq\frac{Dd}{L}$$

したがって音が強め合う条件は，マイクの位置Y_m'について経路長の差が$m\lambda$になるとき

$$(L_B+l_B)-(L_A+l_A)=(L_B-L_A)+(l_B-l_A)\fallingdotseq\frac{Dd}{L}+\frac{Yd}{l}=\frac{Dd}{L}+\frac{Y_m'd}{l}=m\lambda$$

$\therefore Y_m'=\frac{l}{d}m\lambda-\frac{D}{L}l=Y_m-\frac{D}{L}l=Y_m-\Delta Y$，したがって，$\Delta Y=-\frac{D}{L}l$　（答）

問（２）(a)

原点Oでは，初めは経路長差は0だから，$m=0$で音は強めあう。

BB’内の空気を温めて波長を長くして3回音が強めあったということは,

AA’を通過する波の数とBB’を通過する波の数がちょうど３つ変化したということ

すなわち$\frac{w}{\lambda'}=10$，$\frac{w}{\lambda_B}=10-3=7$，ただし$\lambda_B$はBB’を通過する音波の波長

$\frac{V_B}{V_A}=\frac{\lambda_B}{\lambda'}=\frac{10}{7}$，したがって音速$V_B$は音速$V_A$の$\frac{10}{7}$倍　（答）

(b)

波長λ'のときAA’の経路長は波長を単位として $\frac{w}{\lambda'}$

BB’の経路長は波長を単位として $w\div\left(\frac{10}{7}\lambda'\right)=\frac{7w}{10\lambda'}$

BOの経路長とAOの経路長の差は原点Oでの波長λ'を単位として，$\frac{7w}{10\lambda'}-\frac{w}{\lambda'}=7-10=-3$

すなわち，問１(b)から経路長BO－経路長AO$=-3\lambda'=m\lambda'$，$\therefore m=-3$

波長を$\lambda'-\Delta\lambda'$ にしたとき，音が強めあう位置がy 軸方向に原点Oからδ ずれたとすれば,

$-3(\lambda'-\Delta\lambda')=-3\lambda'+\frac{\delta d}{l}$，$\therefore \delta=\frac{3l}{d}\Delta\lambda'$

波長 λ'から $(\lambda'-\Delta\lambda')$ への変化によって，ＢＯの経路長が短くなることに相当する。

したがって，音が強めあう条件を満たす点はBからの経路が長くなる方向，すなわちy軸の正方向へ移動する。$\varDelta Y'=\delta=\dfrac{3l}{d}\varDelta\lambda'$　（答）

＜解説＞

問１(b)

経路長の差が音波の波長の整数倍のとき，波の干渉により音が強めあう。示されている近似式を適用する。

(c)

(b)と同様の計算を行えばよい。

問２

はじめBOとAO の経路長は等しいから$m=0$ で音は強めあう。BB’を通る音の波長を長くすると，原点O の音が弱強を3 回繰り返すということは，BB’の経路長が3 波長短くなったことに相当する。

(a)

空気中の音速と温度の関係は問題文に示されているように，温度が高くなるほど音速は大きくなる。このことは，記載されていなくても既知でなければならない。

（振動数×波長＝音速）だから，波長は音速に比例して大きくなる。

(b)

原点Oで強めあっていた音の波長を短くすると，音が強めあう位置がy軸上を動いていく。

波長$\lambda'-\varDelta\lambda'$のときAA’の経路長は波長を単位として $\dfrac{w}{\lambda'-\varDelta\lambda'}$

BB’の経路長は波長を単位として $w\div\dfrac{10}{7}(\lambda'-\varDelta\lambda')=\dfrac{7}{10}\dfrac{w}{\lambda'-\varDelta\lambda'}$

$$\frac{7}{10}\frac{w}{\lambda'-\varDelta\lambda'}-\frac{w}{\lambda'-\varDelta\lambda'}=-\frac{3}{10}\frac{w}{\lambda'-\varDelta\lambda'}=-\frac{3}{10}\frac{w/\lambda'}{1-\varDelta\lambda'/\lambda'}=-3\times\frac{1}{1-\varDelta\lambda'/\lambda'}<-3$$

したがってBB’の経路長は短くなったことに相当する。音が強めあう位置は，この短くなった経路長と同じだけBからの経路長が長くなるように，すなわちy軸正方向へ移動する。

＜総評＞

力学，電磁気（電気回路），波動（音波）の３分野からの出題。昨年より易化したような気がする。この「解答と解説」が昨年は8ページ半だったが，今年は6ページと2ページ半も減っているのは、そのことの反映だろうか。設問数も20から17に減っている。

しかし，設問が進むに連れ，難しい問題が含まれている。それだけに基本的な問題，容易な問題は着実に正答することが必要だ。

$\boxed{1}$

ばねの弾性力と浮力とを組み合わせた力学の問題。浮力が変位に比例し方向が逆の復元力として働くことから，ばねの弾性力と同様に扱うことができる，との考え方が基本にある。問（２）(c)は２つの単振動とエネルギー保存の法則等を考慮して考察する必要があり，やや難しいので，難易度はＢ＋。

$\boxed{2}$

　コンデンサー回路の電気容量，電気量，静電エネルギー等を考える問題。特別難しいところはないので，難易度はＢ。

$\boxed{3}$

　音波の干渉の問題。光の干渉とも共通する問題である。音波の場合，経路の途中の空気の温度を変えて，波長を変えることが容易である。問２(b)がやや難しく，難易度はＢ＋。

190731