2018 (H30) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部･医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻･検査技術科学専攻）
･歯学部･薬学部･工学部･農学部　　試験時間 150分

$\boxed{1}$　xy 平面における２つの放物線 C：$y=(x-a)^2+b$，D：$y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる2点で交わり，その2 交点の x 座標の差が1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a\,,b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

＜解答＞

(1)

$y=(x-a)^2+b$ と $y=-x^2$ を連立させた2 次方程式 $(x-a)^2+b=-x^2$ から，

$x^2-ax+\dfrac{a^2+b}{2}=0$　①

①が２つの実数解をもつためには，解の判別式 $D=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$，$\therefore\ b<-\dfrac{a^2}{2}$　②

また２つの解の差は $\sqrt{-a^2-2b}=1$，$\therefore\ b=-\dfrac{1}{2}(a^2+1)$　③

③ は明らかに ② を満たす。③ を図１に示す。

(2)

２つの交点の座標を $(p_1\,,q_1)$，$(p_2\,,q_2)$ とする。

p_1，p_2 は ① の解だから，p_1，$p_2=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$，　$q_1=-{p_1}^2$，$q_2=-{p_2}^2$

２つの交点を結ぶ直線は

$$y-q_1=\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}(x-p_1)=-\frac{{p_1}^2-{p_2}^2}{p_1-p_2}(x-p_1)=-(p_1+p_2)(x-p_1)=-a(x-p_1)$$

$$y=-a(x-p_1)+q_1=-a(x-p_1)-{p_1}^2=-ax-({p_1}^2-ap_1)=-ax+\frac{a^2+b}{2}$$

$$=-ax+\frac{a^2}{2}-\frac{1}{4}(a^2+1)=-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}$$

したがって，$a^2-4xa-y-1=0$　④

a が実数であることを必要とするから，a に関する2 次方程式 ④ の解の判別式 $D=4x^2+y+1\geqq 0$

$\therefore\ y\geqq -4x^2-1$　⑤

⑤ の領域を図２の打点部として示す。放物線を含む。

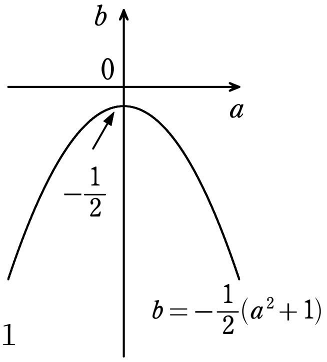

図１

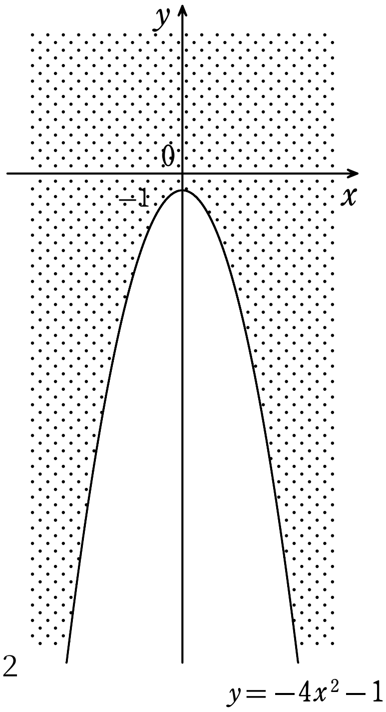

図２

＜解説＞

(1)

２つの放物線が2 点で交わるということは，それらを連立させてできる2 次方程式が２つの実数解をもつことと等価である。

(2)

a，bを２つの交点を結ぶ直線上の点$(x,\ y)$の変数x，yによって表し，a，bが満たすべき条件③をx，yが満たすべき条件に置き換える。

$\boxed{2}$　nを２以上，aを1 以上の整数とする。箱の中に，１からnまでの番号札がそれぞれ1 枚ずつ，合計n枚入っている。この箱から，１枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行をa回繰り返す。ちょうどa回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめてn以上となる確率を$p(a)$とする。

(1) $p(1)$と$p(n)$を求めよ。

(2) $p(2)$を求めよ。

(3) nが３以上の整数のとき$p(3)$を求めよ。

＜解答＞

(1)

$p(1)$とは，1回の試行で札の和がn以上となる事象の確率だから，$p(1)=\dfrac{1}{n}$　（答）

$p(n)$とは，試行を$a=n$回繰り返したとき，札の番号の和がはじめてn以上となる事象の確率

その事象のためには，$(a-1)=(n-1)$ 回までの試行の札の和が $(n-1)$ 以下でなければならない。

これは毎回の試行で札の番号1 が出る事象で，その確率は $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{a-1}=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$

n回目の試行の札の番号は何でも良いから $p(a=n)=p(n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\times 1=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ （答）

(2)

$p(2)$は2 回の試行で札の番号の和がはじめて n 以上となる事象の確率

この事象は，1 回目の試行の札の番号 $j_1\leqq n-1$，2 回目の試行の札の番号 $j_2\geqq n-j_1$ となる事象

その事象の数 M_2 は $1\leqq j_1\leqq n-1$，$n-j_1\leqq j_2\leqq n$ なる (j_1, j_2) の数だから，

$$M_2=\sum_{j_1=1}^{n-1}\{n-(n-j_1)+1\}=\sum_{j_1=1}^{n-1}(j_1+1)=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

(j_1, j_2) のすべての事象の数はn^2だから，$p(2)=\dfrac{M_2}{n^2}=\dfrac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$ （答）

(3)

$p(3)$は3 回の試行で札の番号の和がはじめて n 以上となる事象の確率

このとき2 回の試行の札の番号の和N_2は $2\leqq N_2=j_1+j_2\leqq n-1$

事象N_2の場合の数は $N_2=j_1+j_2$ なる (j_1, j_2) の組の数だから (N_2-1)

また3 回目の札の番号j_3 は $n-N_2\leqq j_3\leqq n$だから，

3 回の試行で札の番号の和がはじめて n 以上となる事象の数は

$$M_3=\sum_{N_2=2}^{n-1}(N_2-1)\{n-(n-N_2)+1\}=\sum_{N_2=2}^{n-1}(N_2{}^2-1)=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n+3)$$

(j_1, j_2, j_3) のすべての事象の数はn^3だから，$p(3)=\dfrac{M_3}{n^3}=\dfrac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$ （答）

＜解説＞

計算としては複雑ではない確率の問題。だが，試行の回数aを札の番号n（札の枚数にも等しい），札の番号の和をn，などとn を多用するので，頭の中をよく整理しないと，混乱する。

(1)

$p(1)$，$p(n)$などの定義を明確にしておこう。

(2)

$p(2)$の定義を明確にした上で，1枚目，2枚目の札の番号に対する条件を考える。そのような条件を満たす事象の数を考察する。

(3)

公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$を利用する。

ここでは，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(k^2-1)=\sum_{k=2}^{n-1}k^2-(n-2)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-1-(n-2)=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1)$

$$=\frac{1}{6}(n-1)(2n^2-n-6)=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n+3)$$

$\boxed{3}$ 整数a，bは等式

$$3^a-2^b=1 \quad ①$$

を満たしているとする。

(1) a，b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，aは偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a\ ,\ b)$ をすべてあげよ。

<解答>

(1)

整数bに対し$2^b>0$であるから，整数aに対し $3^a=1+2^b>1$，$\therefore\ a\geqq 1$

$2^b=3^a-1\geqq 3-1=2$，$\therefore\ b\geqq 1$

以上によって，a，b はともに正となる。

(2)

$2^b=3^a-1=3^a-1^a=(3-1)\,(3^{a-1}\times 1^0+3^{a-2}\times 1^1+\cdots+3^1\times 1^{a-2}+3^0\times 1^{a-1})$

したがって$2^{b-1}=3^{a-1}\times 1^0+3^{a-2}\times 1^1+\cdots+3^1\times 1^{a-2}+3^0\times 1^{a-1}$　②

②において，bは$b>1$なる整数とすれば，左辺は偶数，右辺は項数がa個の奇数の和

したがって，右辺が偶数であるためには，aは偶数でなければならない。

(3)

$a=1$，$b=1$は①を満たす。

$b>1$ ならば，aは偶数だから，$a=2m$とおく。mは正の整数。

$3^a-1=3^{2m}-1=(3^m+1)\,(3^m-1)=2^b$

nを正の整数として，bが奇数のとき$b=2n+1$，偶数のとき$b=2n$とおく。

bが奇数のとき，$(3^m+1)\,(3^m-1)=2^b=2^{2n+1}$

2^{2n+1}の最小差の２因数は2^{n+1}と2^nであり，$2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n\geqq 2$だから，

$n=1$のときのみ$(3^m+1)-(3^m-1)=2$となる２因数をつくる。

したがって$b=2n+1=3$，$3^a=2^b+1=2^3+1=3^2$，$\therefore\ a=2$

bが偶数のとき，$(3^m+1)\,(3^m-1)=2^b=2^{2n}$

2^{2n}の最小差の２因数は2^{n+1}と2^{n-1}であるが，$2^{n+1}-2^{n-1}=2^{n-1}(4-1)=3\times 2^{n-1}\geqq 3$だから，

差が$(3^m+1)-(3^m-1)=2$となる２因数をつくることができない。

以上によって，①を満たす整数の組 $(a\ ,\ b)$は $(1\ ,\ 1)$，$(2\ ,\ 3)$　（答）

<解説>

一見，簡明そうな整数の問題。しかし手強い問題である。

(1)

当たり前の問題であるが，きちんと答えよう。

(2)

着眼，着想が必要で難しい。解答のような着想を思いつかないと，いたずらに時間が経過しそうである。他の問題に移るか，(3)を考えるようにしたい。

(3)

(2)が解からなくても，(3)を読んで考えよう。まず式①を目視すると，２つの解 $(1, 1)$，$(2, 3)$が直ちに浮かぶ。aを増やしながらその他の解を考えても，妥当なbはなさそうだ。

すると，ポイントはその２つの解に限定されることを示すことだ。問題は誘導的に構成される場合が多いことを忘れずに，aが偶数という(2)の結果を活用することを着想しよう。

$3^a-1=3^{2m}-1=(3^m+1)(3^m-1)=2^b$という表現を思いつけば，解答方針が決まりそうだ。

$\boxed{4}$　三角形ABCの内接円の半径をr，外接円の半径をRとし，$h=\dfrac{r}{R}$とする。

また，$\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，$\angle C=2\gamma$とおく。

(1) $h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$となることを示せ。

(2) 三角形ABCが直角三角形のとき $h\leqq\sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。

　また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形ABCに対して $h\leqq\dfrac{1}{2}$が成り立つことを示せ。

　また，等号が成り立つのはどのような場合か。

＜解答＞

(1)

図１において，三角形ABCに対する正弦定理によって，$a=2R\sin 2\alpha$　①

一方，$a=r\left(\dfrac{1}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\gamma}\right)=r\left(\dfrac{\cos\beta\sin\gamma+\cos\gamma\sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma}\right)=r\left\{\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\right\}$　②

①，②から$h=\dfrac{r}{R}=\dfrac{2\sin 2\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}=\dfrac{2\sin 2\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\pi/2-\alpha)}$

$$=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

(2)

α，β，γを入れ替えてもhは変わらない。

したがって$\angle A$が直角すなわち$2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$として扱っても一般性を失わない。

$2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$だから，$\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$

$$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=2\sqrt{2}\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\frac{\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right\}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$0<2\beta<\dfrac{\pi}{4}$だから，$-\dfrac{\pi}{4}<2\beta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(2\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

したがって，$h\leqq\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$

等号が成り立つのは，$\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{4}\right)=1$，すなわち$2\beta-\frac{\pi}{4}=0$，$\therefore\ 2\beta=\frac{\pi}{4}=2\gamma$

すなわち，等号が成り立つのは直角2等辺三角形の場合

(3)

$$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right\}\sin\beta\sin\gamma=2\cos(\beta+\gamma)\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$

$p=\cos(\beta+\gamma)$，$q=\cos(\beta-\gamma)$とおけば，$h=2p(q-p)=-2\left(p-\frac{q}{2}\right)^2+\frac{q^2}{2}$

$p=\frac{q}{2}$のとき，hは最大値$\frac{q^2}{2}=\cos^2(\beta-\gamma)$をとる。

qは$\beta=\gamma$のとき，最大値１をとるので，$h\leqq\frac{1}{2}$

等号が成り立つとき，すなわち$h=\frac{1}{2}$のとき，

$\cos(\beta+\gamma)=\cos2\beta=\frac{1}{2}$，$\therefore\ 2\beta=\frac{\pi}{3}$，したがって$2\beta=2\gamma=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\ 2\alpha=\pi-2\alpha-2\beta=\frac{\pi}{3}$

したがって等号が成り立つのは，三角形ABCが正三角形の場合

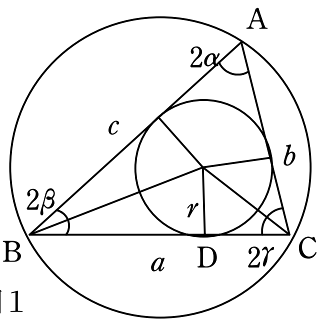

図１

<解説>

(1)

図１のような略図を描いて考える。さて証明の着想がほしい。Rは正弦定理によってaとαによって表すことができることは直ぐに思いつく。そこで，rを同様にaとαによって表せば，Rとrの関係を導けると着想しよう。

$\mathrm{BD}=\frac{r}{\tan\beta}$，$\mathrm{DC}=\frac{r}{\tan\gamma}$，$a=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}+\mathrm{DC}=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}$

すると簡明な式によって，$h=\frac{r}{R}$を表現でき，三角関数の計算によって証明にいたる。

(2)

どの角を直角として扱っても一般性を失わないことを最初に断って，考察する。

(3)

$\alpha=\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)$によって$\alpha$を消去すると，$h$は$p=\cos(\beta+\gamma)$の2次式になることに着目する。

$\boxed{5}$　αを複素数とする。複素数zの方程式

$$z^2-\alpha z+2i=0 \quad ①$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式 ① が絶対値 1の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

＜解答＞

(1)

p，q を ① の解とすれば，$z^2-\alpha z+2i=(z-p)(z-q)=0$

したがって，$p+q=\alpha$，$pq=2i$

p を実数解とすれば，$q=\dfrac{2}{p}i$，$\alpha=p+\dfrac{2}{p}i=x+yi$ とすれば $y=\dfrac{2}{x}$

したがって，点α が複素数平面上に描く図形は図１の$y=\dfrac{2}{x}$　（答）

(2)

p を絶対値 1 の複素数解とすれば，$p=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくことができる。

$p+q=\cos\theta+i\sin\theta+q=\alpha$　②

$pq=(\cos\theta+i\sin\theta)q=2i$　③

③から$q=\dfrac{2i}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{2i}{\cos\theta+i\sin\theta}\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=2(\sin\theta+i\cos\theta)$

②から$\alpha=(2\sin\theta+\cos\theta)+i(\sin\theta+2\cos\theta)$

$\beta=\alpha(\sin\dfrac{\pi}{4}+i\cos\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha(1+i)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\{(2\sin\theta+\cos\theta)+i(\sin\theta+2\cos\theta)\}(1+i)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)i=x+yi$ とすれば，

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)$，$y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2x^2+\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2y^2=2x^2+\dfrac{2}{9}y^2=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

したがって，点β が複素数平面上に描く図形は

図１の $x^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=1$　（答）

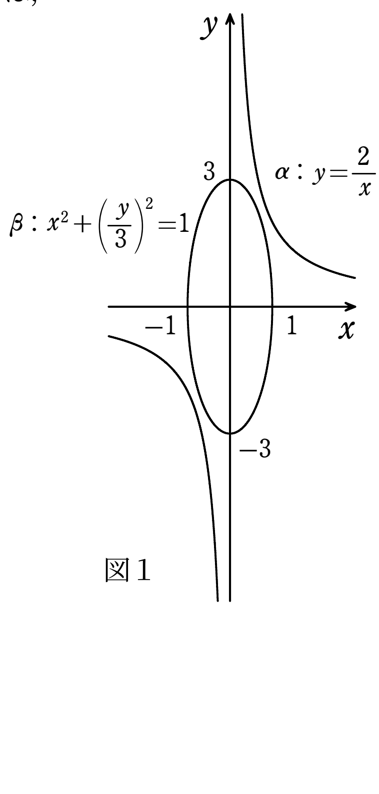

図１

＜解説＞

複素数平面の問題。解と係数の関係に着目して，複素数 α がそなえるべき条件を求める。

(1)

１つの解を実数とおけば，容易に α を複素数として表現できる。

(2)

絶対値 1の複素数解を $p=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくことで，容易に α を複素数として表現できる。

α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点とは，α に複素数 $(\sin\dfrac{\pi}{4}+i\cos\dfrac{\pi}{4})$ を乗じた複素数が示す点である。

$\boxed{6}$ xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2\leqq 2 \\ x+y\geqq 0 \\ x-y\leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面内に図示せよ。

(2) V を求めよ。

＜解答＞

(1)

図 1 の打点部が S である。

(2)

$x=2-y^2$ ① 上の点 $(2-q^2, q)$ と直線 $x+y=0$ の距離は $l=\dfrac{|2-q^2+q|}{\sqrt{2}}$

S を通り回転軸 $y=-x$ と直交する直線は $y=x+\sqrt{2}\,t-2$，$0\leqq t\leqq 3\sqrt{2}$ ②

$(2-q^2, q)$ は②上の点でもあるから，$q=2-q^2+\sqrt{2}\,t-2=-q^2+\sqrt{2}\,t$，$\therefore\ t=\dfrac{q^2+q}{\sqrt{2}}$

②は $t=0$ のとき $y=x-2$ となり，$t=3\sqrt{2}$ のとき $y=x+4$ となって S の頂点を通る。したがって，回転軸に垂直な断面の微小円板の体積 (円の面積×Δt) を積算すれば回転体の体積を得る。

$$V=\int_0^{3\sqrt{2}}\pi l^2(t)dt=\pi\int_0^2 l^2(q)\left(\frac{dt}{dq}\right)dq=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\int_0^2 l^2(q)(2q+1)dq$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^2(2-q^2+q)^2(2q+1)dq=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left[\frac{q^6}{3}-\frac{3q^5}{5}-2q^4+\frac{5}{3}q^3+6q^2+4q\right]_0^2$$

$$=\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi$$ （答）

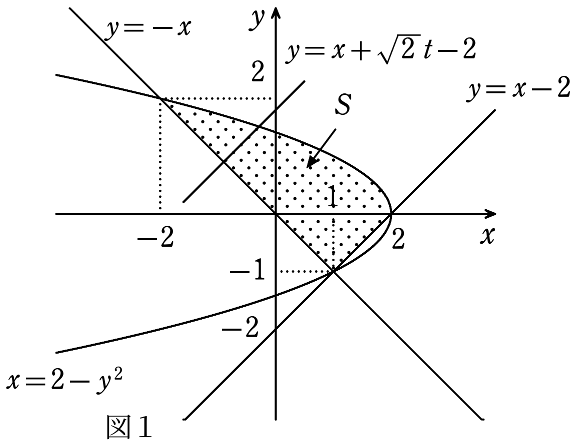

図１

＜解説＞

簡単な関数のグラフだから，(1)は容易に描ける。(2)も題意は簡明だから，解答方針は容易に立てることができる。

図１のSを$y=-x$を回転軸として回転してできる立体の回転軸に垂直な断面は回転軸との交点を中心とする円となる。その半径は$x=2-y^2$上の点から回転軸に下ろした垂線の長さだから，それを半径とする微小厚さの円板の体積を回転軸方向に積算していけば，立体の体積を得る。

回転軸と直交する直線は $y=x+\sqrt{2}\,t-2$ と表すことができ，$t=0$ のときは$y=x-2$ に一致し，$t=3\sqrt{2}$ のときは$y=x+4$となり，Sの頂点を通る。すなわち，t は垂線の足を点$(1\,,\,-1)$から $(-2,\ 2)$まで回転軸に沿って動かす変数である。したがって，微小厚さ円板の体積は（円の面積×Δt)と表すことができる。

そこで$x=2-y^2$上の点から回転軸に下ろした垂線の長さをt の関数として求め，微小円板の体積π(垂線の長さ$)^2\Delta t$を積算する。ところが垂線の長さをt の関数として陽に求めることは，かなり煩雑になる。具体的には,

$y=-x$と$y=x+\sqrt{2}\,t-2$の交点はP$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\,,\,\dfrac{\sqrt{2}\,t}{2}-1\right)$

$y^2=2-x$と$y=x+\sqrt{2}\,t-2$の交点はQ $(q_X\,,\,q_Y)$

$$q_X=\frac{3-2\sqrt{2}\,t+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2},\quad q_Y=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}$$

距離PQをlとすれば,

$$l^2=\left(q_X-1+\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right)^2+\left(q_Y+1-\frac{\sqrt{2}\,t}{2}\right)^2=\frac{(1-\sqrt{2}\,t+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,)^2}{2}$$

$$=(t^2+\sqrt{2}\,t+1)+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}-t\sqrt{2+8\sqrt{2}\,t}$$

$$V=\pi\int_0^{3\sqrt{2}} l^2(t)dt=V_1+V_2-V_3$$

$$V_1=\pi\int_0^{3\sqrt{2}}(t^2+\sqrt{2}\,t+1)dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t\right]_0^{3\sqrt{2}}=18\sqrt{2}+9\sqrt{2}+3\sqrt{2}=30\sqrt{2}\,\pi$$

$$V_2=\pi\int_0^{3\sqrt{2}}\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt=\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big[(1+4\sqrt{2}\,t)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{3\sqrt{2}}=\frac{31\sqrt{2}}{3}\pi$$

$$V_3=\sqrt{2}\,\pi\int_0^{3\sqrt{2}}t(1+4\sqrt{2}\,t)^{\frac{1}{2}}dt=\sqrt{2}\,\pi\left[\frac{t(1+4\sqrt{2}\,t)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}}-\frac{(1+4\sqrt{2}\,t)^{\frac{5}{2}}}{120}\right]_0^{3\sqrt{2}}=\frac{547\sqrt{2}}{15}\pi$$

ここで$a=4\sqrt{2}$として，下記の部分分数法を用いた。

$$\int t(1+at)^{\frac{1}{2}}dt=t\int(1+at)^{\frac{1}{2}}dt-\frac{2}{3a}\int(1+at)^{\frac{3}{2}}dt=t\frac{2}{3}\frac{1}{a}(1+at)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3a}\frac{2}{5a}(1+at)^{\frac{5}{2}}$$

$$V=V_1+V_2-V_3=\sqrt{2}\,\pi\left(30+\frac{31}{3}-\frac{547}{15}\right)=\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi \quad （答）$$

ていねいに計算すれば良いが，やや煩雑なので，ミスしやすいので要注意である。

したがって，解答のように$l^2(t)dt=l^2(q)\left(\dfrac{dt}{dq}\right)dq$として置換積分法のように扱えば，計算はよほど容易になる。$l^2(t)$を求めなくても計算可能になる。

＜総評＞

例年同様，一定のレベル以上の問題を取り揃えている。易から難へと解答したいところだ。私としては，$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$の順に扱いたいと思った。簡単な考察によって解答できる設問もあるから，適切な時間配分が必要である。

$\boxed{1}$

2次方程式の解の条件を満たす係数に関する問題。標準レベルの問題で難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

確率の問題。計算は難しくないが，札の番号nと試行の回数aの関係について混乱しないこと。確率の定義を明確にして，各試行での札の番号の条件を求め事象の数を数えること。難易度はＢ＋。

$\boxed{3}$

整数の問題。解答方針の着想が必要な問題。(2)の結果を利用すれ，(3)は解ける可能性があるので，簡単には引き下がらないこと。難易度Ａ。

$\boxed{4}$

正弦定理や三角関数の計算を含む平面図形の問題。証明の着想が必要だが，難しいものではない。計算も複雑なものではなく，標準レベルの問題だから難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

複素数平面の問題。2次方程式の解に与えられる条件から，複素数係数が複素数平面上で表す図形を描く。着目点がわかりやすく，煩雑な計算を必要としない。去年の複素数の問題に比較して容易化し，標準的なレベルなので難易度Ｂ。

$\boxed{6}$

題意は簡明だから，解答方針の案出には苦労はないだろう。しかし，体積計算の被積分関数の算出では煩雑さに遭遇する。解説のように，真っ正直に扱うと計算ミスしそうだ。解答のような方法を着想できれば，スムーズに記述できよう。この着想が難しいので，難易度はＡ－。

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$　xy 平面における 2 つの放物線 C：$y=(x-a)^2+b$，D：$y=-x^2$ を考える。

(1) 理系の問題 $\boxed{1}$ の(1)に同じ。

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たすとき，C と D の2 交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接することを示せ。

<解答>

(1) 理系の問題 $\boxed{1}$ の (1) の解答を参照。

(2) 理系の問題 $\boxed{1}$ の (2) の解答に示すように，C と D の2 交点を結ぶ直線は,

$y=-ax+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{1}{4}$　①

放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$　② と連立させると，2 次方程式 $x^2-ax+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2=0$を得る。

この 2 次方程式は重解 $x=\dfrac{a}{2}$ をもつから，① と ② は接する。

<解説>

理系の問題 $\boxed{1}$ の 解説を参照。

$\boxed{2}$　n を 2 以上，aを1 以上の整数とする。箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ1 枚ずつ，合計 n 枚入っている。この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を$p(a)$とする。

(1) $p(1)$ と$p(n)$ を求めよ。：理系の問題 $\boxed{2}$ (1)に同じ。

(2) $p(2)$ を求めよ。：理系の問題 $\boxed{2}$ (2)に同じ。

(3) $p(n-1)$ を求めよ。

<解答>

(1)，(2)は理系の問題 $\boxed{2}$ (1)，(2)の解答を参照。

(3)

k回目の試行の札の番号をj_k， k回の試行の札の番号の和をN_kとする。

$p(a=n-1)=p(n-1)$とは$(n-1)$回目の試行で初めて札の番号の和がn以上となる確率

このためには$(n-2)$回の試行での札の和 $n-2 \leqq N_{n-2} \leqq n-1$かつ $n-1 \leqq N_{n-1}$　①

①を満たすためには,

$N_{n-2}=n-2$のとき，$j_k=1$ $(1 \leqq k \leqq n-2)$，$2 \leqq j_{n-1} \leqq n$　②

$N_{n-2}=n-1$のとき，$j_i=2$，$j_k=1$　$(1 \leqq k \leqq n-2,\ k \neq i)$，$1 \leqq j_{n-1} \leqq n$　③

②の事象の数は$(n-1)$

③の事象の数は${}_{n-2}C_1\times n=(n-2)n$

したがって$(n-1)$回目の試行で初めて札の番号の和がn以上となる事象の数は両者の合計で,

$(n-1)+(n-2)n=n^2-n-1$

1回の試行でn枚のうちの1枚を選ぶのだから，1回の試行で出る事象の数はn

したがって$(n-1)$回の試行で出る全ての事象の数はn^{n-1}

したがって，$p(n-1)=\dfrac{n^2-n-1}{n^{n-1}}$　（答）

＜解説＞

(1)，(2)は理系の解説を参照。

(3)は一見難しそうだが，慌てず考えよう。すると，$(n-2)$回の試行での札の番号の和が$n-2\leqq N_{n-2}\leqq n-1$となって，$N_{n-2}=n-2$，$n-1$の２つの場合しかないことがわかる。それぞれについて，j_{n-1}の条件を含めて，事象の数を求めればよい。

$N_{n-2}=n-2$のとき，$2\leqq j_{n-1}\leqq n$だから，$n-1$通りの事象がある。

$N_{n-2}=n-1$のとき，$j_i=2$，$j_k=1$　$(1\leqq k\leqq n-2,\ k\neq i)$，だから$i$の選択について${}_{n-2}C_1$通り，$1\leqq j_{n-1}\leqq n$だから，$j_{n-1}$について$n$通りの事象がある。

$\boxed{3}$　実数aは$0<a<4$を満たすとする。xy平面の直線l：$y=ax$と曲線

$$C:\ y=\begin{cases}-x^2+4x & (x<4\text{のとき})\\ 9a(x-4) & (x\geqq 4\text{のとき})\end{cases}$$

を考える。Cとlで囲まれた図形の面積を$S(a)$とおく。

(1) Cとlの交点の座標を求めよ。

(2) $S(a)$を求めよ。

(3) $S(a)$の最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$x<4$のとき

$y=-x^2+4x$と$y=ax$を連立させると，$x^2+(a-4)x=x(x+a-4)=0$

したがって交点の座標は$(0,0)$，$(-a+4,\ -a^2+4a)$

$x\geqq 4$のとき

$y=9a(x-4)$と$y=ax$を連立させると$x=\dfrac{9}{2}$，したがって交点の座標は$\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{9}{2}a\right)$

(2)

Cとlを図示すると図１のようになる。

$$S(a)=\int_0^{-a+4}\{(-x^2+4x)-ax\}dx+\int_{-a+4}^{4}\{ax-(-x^2+4x)\}dx+\int_4^{\frac{9}{2}}\{ax-9a(x-4)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{-a+4}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{a}{2}x^2\right]_{-a+4}^{4}+\left[-4ax^2+36ax\right]_4^{\frac{9}{2}}$$

$$=2\left\{\frac{(a-4)^3}{3}+2(a-4)^2-\frac{a}{2}(a-4)^2\right\}+\left(\frac{4^3}{3}-2\times4^2+\frac{a}{2}\times4^2\right)+a$$

$$=\frac{(4-a)^3}{3}+9a-\frac{32}{3}$$ （答）

(3)

$S'(a)=-(a-1)(a-7)$

$0<a<4$のaに対して，$S(a)$は図２のように変化する。

したがって$a=1$のとき，$S(a)$は最小値$S(1)=\frac{22}{3}$ （答）

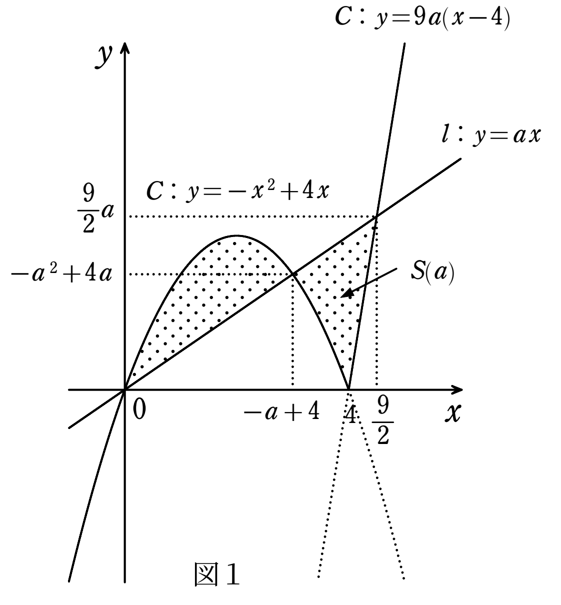

図１

a	0		1		4
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

図２

＜解説＞

2次関数と直線とが作る図形の面積を求める問題。題意は簡明であり，解答方針も容易に決まる。

(1)

図１のような図形を描いて考える。

(2)

図１から$S(a)$の具体的な形状等を把握し，(1)で求めた交点の座標から$S(a)$の面積積分を書き下す。計算はやや煩瑣であるので，ミスのないように。

(3)

最大値，最小値問題の常套的な方法を用いる。

$\boxed{4}$　空間内に四面体ABCDがある。辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする。
tを0でない実数とし，点Gを

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+(t-2)\overrightarrow{GC}+t\,\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$$

を満たす点とする。

(1) $\overrightarrow{DG}$を$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$で表せ。

(2) 点Gは点Nと一致しないことを示せ。

(3) 直線NGと直線MCは平行であることを示せ。

<解答>

(1)

$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DG}$，$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG}$，$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DG}$を与えられた条件式に代入すると，

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+(t-2)\overrightarrow{GC}+t\,\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DG}+(t-2)(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DG})-t\,\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}$$

したがって，$\overrightarrow{DG}=\dfrac{1}{2t}\{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}\}$　（答）

(2)

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

もし点Gと点Nが一致すると仮定すれば，$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DN}$だから，(1)を利用して，

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2t}\{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}\},\ \therefore\ \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$$

これは４つの点 A，B，C，D が同一平面上にあることを意味する。しかしABCDは四面体だから矛盾である。

すなわち，点Gと点Nが一致するとの仮定が誤りで，点Gと点Nは一致しない。

(3)

$$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2t}\{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+(t-2)\overrightarrow{DC}\}$$

$$=\frac{1}{2t}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC})\quad ①$$

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA})+(-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$$

$$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC})\quad ②$$

①，②から$\overrightarrow{NG}=\dfrac{-1}{t}\overrightarrow{MC}$，$\therefore\ \overrightarrow{NG}\parallel\overrightarrow{MC}$ すなわち NG∥MC である。

<解説>

ベクトルによる立体図形の表現の問題。図１のような四面体ABCDの図形を描いて，考察する。

(1)

図１を見つめると，$\overrightarrow{GA}$は$\overrightarrow{DA}$と$\overrightarrow{DG}$によって，同様に$\overrightarrow{GB}$は$\overrightarrow{DB}$と$\overrightarrow{DG}$，$\overrightarrow{GC}$は$\overrightarrow{DC}$と$\overrightarrow{DG}$によって表されることがわかる。それらを条件式に代入してやれば，$\overrightarrow{DG}$が$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$で表されるこ

とが予想される。

(2)

　背理法による証明が閃くと良い。一致するとしたら，矛盾が発生することをいう。

(3)

　２つの直線が平行であることをいうには，両者が同じベクトルによって表現されることをいえば良い。

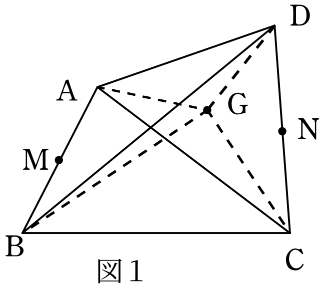

図１

＜総評＞

$\boxed{1}$

　(1)は理系の問題 $\boxed{1}$ (1)と同じ問題。題意は簡明であり，難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

　理系の問題 $\boxed{2}$ とほぼ同じ確率の問題。文系の問題としては難しい。難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

　2次関数と直線がつくる図形の面積の問題。積分計算がやや煩瑣なので，ミスしないこと。
難易度はＢ。

$\boxed{4}$

　立体図形のベクトルによる取扱いの問題で，図形の辺等のベクトル表示とベクトルの加減算についての理解が必要である。難解なところはない問題なので，Ｂ。

190611