2018（H30）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$（60点）

a，b，c を実数とし，３つの2次方程式

$x^2+ax+1=0$　①

$x^2+bx+2=0$　②

$x^2+cx+3=0$　③

の解を複素数平面上で考察する．

(1)　２つの方程式①，②がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径をa，bを用いて表せ．

(2)　３つの方程式①，②，③がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件をa，b，c を用いて表せ．

＜解答＞

(1)

①が実数解を持たないので，解の判別式 $a^2-4<0$，$\therefore -2<a<2$

このとき，①は２つの複素数解z_a，$\overline{z_a}$をもつ。

解と係数の関係から $z_a+\overline{z_a}=-a$，$z_a\overline{z_a}=1$

②が実数解を持たないので，解の判別式 $b^2-8<0$，$\therefore -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

このとき，②は２つの複素数解z_b，$\overline{z_b}$をもつ。

解と係数の関係から $z_b+\overline{z_b}=-b$，$z_b\overline{z_b}=2$

複素数平面上の点z_aと$\overline{z_a}$を結ぶ線分の垂直2等分線は実数軸

同様に点z_bと$\overline{z_b}$を結ぶ線分の垂直2等分線は実数軸

したがって，点z_aと$\overline{z_a}$ の２点を円周上にもつ円の中心は実数軸上にある。

同様に，点z_bと$\overline{z_b}$ の２点を円周上にもつ円の中心は実数軸上にある。

点z_aとz_bを結ぶ線分の垂直2等分線が実数軸と交わる場合，その交点をP$(\alpha, 0)$とする。

すると$|z_a-\alpha|=|z_b-\alpha|$

$|z_a-\alpha|=\sqrt{(z_a-\alpha)\overline{(z_a-\alpha)}}=\sqrt{(z_a-\alpha)(\overline{z_a}-\alpha)}=\sqrt{(\overline{z_a}-\alpha)\overline{(\overline{z_a}-\alpha)}}=|\overline{z_a}-\alpha|$

同様に，$|z_b-\alpha|=|\overline{z_b}-\alpha|$

以上によって，$|z_a-\alpha|=|z_b-\alpha|=|\overline{z_a}-\alpha|=|\overline{z_b}-\alpha|$

したがって，4点 z_a，$\overline{z_a}$，z_b，$\overline{z_b}$ は交点 P$(\alpha, 0)$を中心とする円の円周上にある。

$|z_a-\alpha|=|z_b-\alpha|$だから，$(z_a-\alpha)(\overline{z_a}-\alpha)=(z_b-\alpha)(\overline{z_b}-\alpha)$

$(z_a-\alpha)(\overline{z_a}-\alpha)=z_a\overline{z_a}-(z_a+\overline{z_a})\alpha+\alpha^2=1+a\alpha+\alpha^2$

同様に$(z_b-\alpha)(\overline{z_b}-\alpha)=2+b\alpha+\alpha^2$

したがって$1+a\alpha+\alpha^2=2+b\alpha+\alpha^2$，$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{a-b}$，ただし$a\fallingdotseq b$

$|z_a-\alpha|=\sqrt{(z_a-\alpha)(\overline{z_a}-\alpha)}\ =\sqrt{1+a\alpha+\alpha^2}=\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+a(a-b)+1}}{|a-b|}$

以上によって，①，②のいずれも実数解をもたないとき，それらの解がすべて同一円周上にある場合，その円の中心は$\left(\dfrac{1}{a-b}\ ,0\right)$，半径は$\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+a(a-b)+1}}{|a-b|}$　（答）

点z_aとz_bを結ぶ線分の垂直2 等分線が実数軸と交わらない場合，その垂直2 等分線が実数軸と平行，すなわちz_aとz_bの実数部が等しいことになる。したがって，４点z_a，$\overline{z_a}$，z_b，$\overline{z_b}$の実数部が等しいので，４点は虚数軸と平行な同一直線上にある。

(2)

③が実数解を持たないためには，解の判別式 $c^2-12<0$，$\therefore\ -2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$

２つの複素数解をz_c，$\overline{z_c}$とし，点z_aとz_cを結ぶ線分の垂直2等分線が実数軸と交わる場合，その交点をQ$(\beta, 0)$　とする。(1)と同様に，

$(z_a-\beta)(\overline{z_a}-\beta)=z_a\overline{z_a}-(z_a+\overline{z_a})\beta+\beta^2=1+a\beta+\beta^2$

$(z_c-\beta)(\overline{z_c}-\beta)=3+c\beta+\beta^2$，したがって$1+a\beta+\beta^2=3+c\beta+\beta^2$，$\therefore\ \beta=\dfrac{2}{a-c}$，ただし$a\fallingdotseq c$

したがって，６点 z_a，$\overline{z_a}$，z_b，$\overline{z_b}$，z_c，$\overline{z_c}$ が同一円周上にあれば

$\alpha=\beta$，$\therefore\ \dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2}{a-c}$，$\therefore\ a+c=2b$

逆に$a+c=2b$であれば，$\alpha=\beta$となって，６点 z_a，$\overline{z_a}$，z_b，$\overline{z_b}$，z_c，$\overline{z_c}$ が同一円周上にある。

以上によって，求める必要十分条件は

$-2<a<2$，$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$，$a+c=2b$，$a\fallingdotseq b$，$a\fallingdotseq c$

ここで，$a\fallingdotseq b$ならば$a\fallingdotseq c$，$a\fallingdotseq c$ならば$a\fallingdotseq b$なので，$a\fallingdotseq b$か$a\fallingdotseq c$のみでよい。

また，$-2\sqrt{2}<-1-\sqrt{3}<b=\dfrac{a+c}{2}<1+\sqrt{3}<2\sqrt{2}$だから，$b$の範囲に関する条件は不要である。

以上によって，必要十分条件は，$-2<a<2$，$-2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$，$a+c=2b$，$a\fallingdotseq c$　（答）

＜解説＞

複素数平面に関する問題。

(1)

実数解を持たないということは２つの解が複素数解ということ。しかも，それらは共役複素数の関係にある。実数部が同じで，虚数部の符号が逆の複素数である。したがって，それらは実数軸に関して対称な点である。

したがって，①の２つの複素数解の点を結ぶ線分の垂直2 等分線，②の複素数解の点を結ぶ線分の垂直2 等分線とも実数軸だから，実数軸上のどこかに４つの複素数点からの距離が等しい点がありそうだと，直感できる。

その点は，①の解z_aと②の解z_bを結ぶ線分の垂直2 等分線と実数軸の交点である。４つの複素数解

が同一円周上にある円の中心がその交点となる。

(2)

同様のことを①と③の複素数解について行えば良い。

$\boxed{2}$ （60点）

次の問に答えよ.

(1) $35x+91y+65z=3$を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$を一組求めよ.

(2) $35x+91y+65z=3$を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の中でx^2+y^2の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ.

＜解答＞

(1)

$35x+91y+65z=3$ ①

$91y+65z=7\cdot13y+13\cdot5z=3-5\cdot7x$

mを整数として$3-5\cdot7x=13m$とおくと，$5\cdot7x=3-13m$，$m=11$のとき，$x=-4$

$7\cdot13y+13\cdot5z=3-5\cdot7x=143$，$7y+5z=11$，$5z=11-7y$，$y=3$のとき，$z=-2$

したがって①を満たす整数の組の一つは$(x,\ y,\ z)=(-4,3,-2)$ ②

(2)

①を変形して，$5\cdot7x+7\cdot13y+13\cdot5z=3$ ①’

①を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)=(-4,3,-2)+n(a,b,c)=(-4+na,3+nb,-2+nc)$ ③

と表現する。n，a，b，cは整数

③を①’に代入して整理すると，$5\cdot7na+7\cdot13nb+13\cdot5nc=0$ ④

$n=1$，$a=0$，$b=5$，$c=-7$とすれば④が成立

$n=1$，$a=13$，$b=0$，$c=-7$とすれば④が成立

すると$(x,\ y,\ z)=(-4,3,-2)+n_1(0,5,-7)+n_2(13,0,-7)$

$=(13n_2-4,5n_1+3,-7n_1-7n_2-2)$，$n_1$，$n_2$は整数 ⑤

⑤は①を満たす一般解である。

$x^2+y^2=(13n_2-4)^2+(5n_1+3)^2$ ⑥

⑥の最小値は$n_1=-1$，$n_2=0$のとき$x^2+y^2=(-4)^2+(-5+3)^2=20$ （答）

このとき，$(x,\ y,\ z)=(-4,\ -2,\ 5)$ （答）

＜解説＞

整数の問題で，解答方針の着想を必要とするので，着想に時間がとられると辛い。式を見つめると，整数問題だから，係数を素因数に分解しようという気になる。すると$5\cdot7x+7\cdot13y+13\cdot5z=3$という意味ありげな式であることがわかる。

このことから，整数の組$(x,\ y,\ z)$の一般的な表現が求められそうだが，考えているうちに時間ばかり経過しそうである。(1)では①を満たす一組を求めれば良いのだから，まずは試行錯誤で求めてしまうほうが速そうである。ということで，(1)では$(3-5\cdot7x)$が13の倍数にならないか，数字を入れてみる。

すると幸いにも-4で143となって13の倍数になる。直ぐに一組の解を求めることができる。

(2)

①式は三次元空間における平面を表すから，その平面上の点はすべて①を満たす。ここで求めた点の他に①を満たす２つの点を求めることができれば，ベクトル的に考えれば，①を満たす平面上の点をすべて求めることができるではないかと着想できる。

①を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の一般形を求める必要がある。①の左辺=0となるような$(a,\ b,\ c)$を２つ求める。すると，$(-4,\ 3,\ -2)+n_1(a_1,\ b_1,\ c_1)+n_2(a_2,\ b_2,\ c_2)$は①を満たす。$n_1$，$n_2$を選ぶことにより，一般の整数の組 $(x,\ y,\ z)$を表すことができる。

①式を①'式のように係数を素因数の積に変形すると，①の左辺=0となるような$(a,\ b,\ c)$を容易に求めることができる。

以上のような解答を記載したのだが，①の係数が素数5，7，13の循環的な組合わせからなる特徴的な形式となっていることを上手に利用した解答とはいえない。何か腑に落ちない。整数や素数の特徴を活かした別解を考えてみよう。

$5\cdot7x+7\cdot13y+13\cdot5z=3$　①'

①'から $5\cdot7x=13m+3$とおける。$5\cdot7=35=13\cdot2+9$，$x=13p_x+r_x$とおけば,

$5\cdot7x=(13\cdot2+9)(13p_x+r_x)=13m+3$，ただし m，p_x，r_x は整数

$\therefore\ 9r_x=13m_x+3$，これを満たす一つは $r_x=-4$，ただしm_xは整数

したがって $x=13p_x-4$，これを満たす一つは $x=-4$

①'から $7\cdot13y=5n+3$とおける。$7\cdot13=91=5\cdot18+1$，$y=5p_y+r_y$とおけば

$7\cdot13y=(5\cdot18+1)(5p_y+r_y)=5n+3$，ただし n，p_y，r_yは整数

$\therefore\ r_y=5n_y+3$，これを満たす一つは $r_y=3$，ただし n_yは整数

したがって $y=5p_y+3$，これを満たす一つは $y=3$

$x=-4$，$y=3$ のとき，$13\cdot5z=-130$，$z=-2$，したがって$(-4,3,-2)$が一つの整数の組

$x^2+y^2=(13p_x-4)^2+(5p_y+3)^2$，$p_x=0$，$p_y=-1$のとき最小値 20，このとき$(-4,-2,5)$

この方法の方が，意外に容易に扱えることがわかった。つまりxを 13 の倍数と剰余で表し，yを5の倍数と剰余で表すということである。

$\boxed{3}$ (60点)

方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ.

(1)　この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ.

(2)　この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べてa_1，a_2，a_3，･･･とし，

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$とおく．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$を求めよ.

＜解答＞

(1)

$y=g(x)=e^{x}(1-\sin x)-1$とおく。

$g'(x)=e^{x}(1-\sin x-\cos x)=e^{x}\left\{1-\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\right\}=e^{x}\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$g'(x)=0$とすれば，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore\ x=2l\pi$または$2l\pi+\dfrac{\pi}{2}$　$(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

図１に$l=-2$から$l=2$までの$g(x)$の変化を示す。$x=2l\pi$で極大値，$x=2l\pi+\dfrac{\pi}{2}$で極小値をもつ。

$g(2l\pi)=e^{2l\pi}-1<0$,（$l<0$）

$\qquad=0$,（$l=0$）

$\qquad=e^{2l\pi}-1>1$,（$l>0$）

$g\left(2l\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1<0$

したがって，$x<0$では，極大値でも負だから，$g(x)<0$となり，負の実数解をもたない。

$x>0$では，$g\left(2l\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，$g(2l\pi+2\pi)=e^{2(l+1)\pi}-1>1$,（$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）

$2l\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2(l+1)\pi$で$g(x)$は単調増加，$2(l+1)\pi<x<2(l+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$で$g(x)$は単調減少，

したがって，$g(x)$は$2l\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2(l+1)\pi$で1回，$2(l+1)\pi<x<2(l+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$で1回，$x$軸と交わる。

したがって，$x>0$では$g(x)$はx軸と無限回交わるから，$g(x)=0$は正の実数解を無限個持つ。

x	$-\dfrac{7\pi}{2}$		-2π		$-\dfrac{3\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		2π		$\dfrac{5\pi}{2}$		4π
$g'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$g(x)$	<0	↗	<0	↘	<0	↗	0	↘	<0	↗	>0	↘	<0	↗	>0

図１

(2)

$k=1,\ 2,\ 3,\cdots$として

$l=2k-1$のとき，$2(k-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}<a_l=a_{2k-1}<2k\pi$

$l=2k$のとき，$2k\pi<a_l=a_{2k}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$4k\pi-\dfrac{3\pi}{2}<a_{2k-1}+a_{2k}<4k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

mを自然数として，$n=2m$のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left(4k-\frac{3}{2}\right)\pi<\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})<\sum_{k=1}^{m}\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi$

$2m(m+1)\pi-\dfrac{3}{2}m\pi<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n<2m(m+1)\pi+\frac{1}{2}m\pi$

$$\frac{1}{n^2}\left\{2m(m+1)-\frac{3}{2}m\right\}\pi=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4}\right\}\pi=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right\}\pi$$

$$\frac{1}{n^2}\left\{2m(m+1)+\frac{1}{2}m\right\}\pi=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n^2}{2}+\frac{5}{4}n\right\}\pi=\left\{\frac{1}{2}+\frac{5}{4n}\right\}\pi$$

したがって，$\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right\}\pi < \frac{S_n}{n^2} < \left\{\frac{1}{2}+\frac{5}{4n}\right\}\pi$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right\}\pi=\frac{1}{2}\pi<\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}<\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{5}{4n}\right\}\pi=\frac{1}{2}\pi$$

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}\pi$

$n=2m+1$のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})+a_{2m+1}$

$$2m\pi+\frac{\pi}{2}<a_{2m+1}<2(m+1)\pi$$

したがって，$2m(m+1)\pi-\frac{3}{2}m\pi+2m\pi+\frac{\pi}{2}<S_n<2m(m+1)\pi+\frac{1}{2}m\pi+2(m+1)\pi$

さらに整理すると，$\left(2m^2+\frac{5}{2}m+\frac{1}{2}\right)\pi<S_n<\left(2m^2+\frac{9}{2}m+2\right)\pi$

$\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<S_n<\left(\frac{n^2}{2}+\frac{5n}{4}+\frac{1}{4}\right)\pi$，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}\pi$

以上によって，$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}\pi$　（答）

＜解説＞

指数関数と三角関数を含む方程式の解に関する問題。導関数の変化によって，関数の変化を考察し，解についての知見を明らかにするという常套的手法を丁寧に行えば対応できる。

(1)

与式$e^x(1-\sin x)=1$を変形して，$y=g(x)=e^x(1-\sin x)-1$とし，$y=g(x)=0$となるxについて考察すればよい。$y=g(x)$のグラフの極値を与えるxを一般的に求め，極大値および極小値とxとの関係を考察すれば，$x<0$では$y=g(x)<0$となってx軸と交わらないので，実数解を持たないことがわかる。

一方，$x>0$では，極小値は負，極大値は正となり，極小値と極大値は無限個存在するから，グラフは無限回x軸と交わることになる。

(2)

方程式$g(x)=0$となる解a_kの表式を求めることは困難なので，S_nの表式を求めることも困難である。そこで，a_kが極小値と極大値を与えるxの間にあることに着目すれば，S_nの範囲を決めることができるとの着想に至る。kが奇数のときは，a_kは極小値と極大値を与えるxの間にあり，偶数のときは，極大値と極小値を与えるxの間にあることに注意する。

別解を紹介しよう。この問題はグラフを利用することによって，容易に扱えるのではないかと直感する。

(1)

与えられた式を変形して，$e^{-x}=1-\sin x$　①

２つの関数を $y=f_1(x)=e^{-x}$　②，$y=f_2(x)=1-\sin x$　③　とおく。

図２に２つの関数のグラフを示す。

②，③のグラフの共通点のx座標が方程式①の解

$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=e^{-x}-(1-\sin x)$とおく。

$f'(x)=-e^{-x}+\cos x$

$x<0$のとき，$e^{-x}>1$だから $f'(x)<0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$，$f(0)=0$だから，

$f(x)=f_1(x)-f_2(x)>0$，$\therefore\ f_1(x)\fallingdotseq f_2(x)$

したがって，②，③のグラフは共通点を持たないから方程式①は負の実数解を持たない。

$f_1{}'(x)=-e^{-x}<0$だから，$f_1(x)$は単調減少で$f_1(0)=1$

したがって$x>0$のとき，$f_1(x)$は $0<f_1(x)<1$ の単調減少関数で，xの増大とともに0に漸近する。

$0\leqq 1-\sin x\leqq 2$だから，$f_2(x)$は$0\leqq f_2(x)\leqq 2$で無限に振動する正弦波関数

したがって，$x>0$のとき$f_1(x)$は$f_2(x)$と無限個の共通点をもつ。

したがって，方程式①は正の実数解を無限個持つ。

①式の左辺と右辺の２つのグラフが，$x<0$では共通点を持たず，$x>0$では無限個の共通点をもつことをいえばよい。

(2)

xが大きくなると，e^{-x}は1より十分小さく，$f_1{}'(x)=-e^{-x}$だから$f_1{}'(x)\fallingdotseq 0$，したがって図３に示すように$y=f_1(x)$と$y=f_2(x)$は$y=0$の近傍で共通点をもつ。図３から明らかに，

$2(k-3)\pi+\dfrac{3}{2}\pi<a_{2k-1}<2(k-1)\pi+\dfrac{3}{2}\pi$　④

$2(k-1)\pi+\dfrac{3}{2}\pi<a_{2k}<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$　⑤

④，⑤の左辺どうし、右辺どうしを足せば，

$2(k-3)\pi+\dfrac{3}{2}\pi+2(k-1)\pi+\dfrac{3}{2}\pi<a_{2k-1}+a_{2k}<2(k-1)\pi+\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$

したがって，$(4k-5)\pi<a_{2k-1}+a_{2k}<(4k+1)\pi$

$n=2m$のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$\sum_{k=1}^{m}(4k-5)\pi<S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})<\sum_{k=1}^{m}(4k+1)\pi$

したがって，$2m^2-3m<S_n<2m^2+3m$，$m=\dfrac{n}{2}$だから，

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{3n}{2}\right)\pi<\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}<\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}\right)\pi$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{3n}{2}\right)\pi=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{2}\right)\pi=\dfrac{\pi}{2}$だから，

はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=\dfrac{1}{2}\pi$

$n=2m+1$のとき，$2(m-1)\pi+\dfrac{3}{2}\pi<a_{2m+1}<2m\pi+\dfrac{3}{2}\pi$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2m-\dfrac{1}{2}\right)\pi=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2m+\dfrac{3}{2}\right)\pi=0$だから，はさみうちの原理により，

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2m+1}}{n^2}=0$，したがって$a_{2m+1}$の寄与は考えなくてよい。

以上の結果，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=\dfrac{1}{2}\pi$　（答）

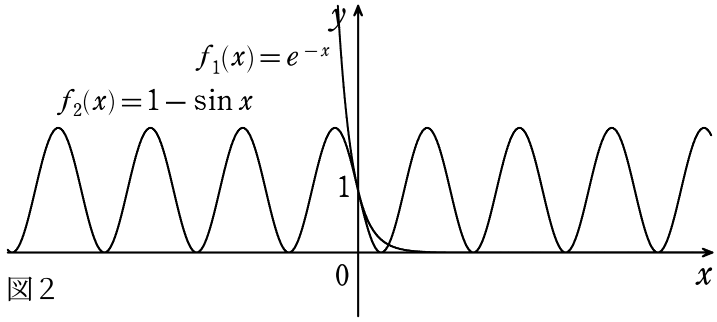

図２

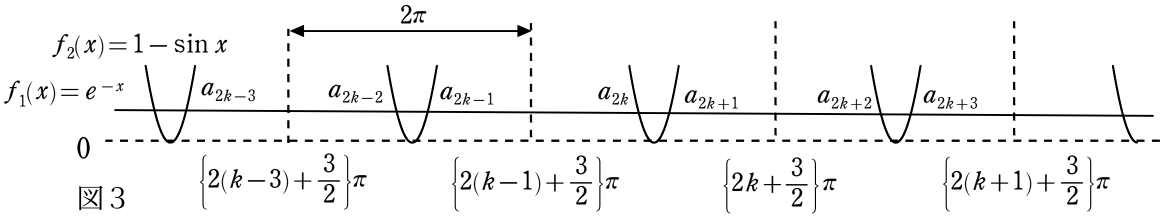

図３

図３のような図を描いてみれば，a_{2k-1}やa_{2k}の範囲を容易に設定できる。導関数の計算や極値を与えるxを求める必要がなく，直感的に扱える。解答時間短縮の効果があると思う。

$\boxed{4}$ (60点)

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\ |z|\leqq 6$$

により定まる領域をVとし，2点$(2,0,2)$，$(-2,0,-2)$を通る直線をlとする.

(1)　$|t|\leqq 2\sqrt{2}$を満たす実数tに対し，点$\mathrm{P_t}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},0,\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$を通り$l$に垂直な平面を$H_t$とする．また，実数$\theta$に対し，点$(2\cos\theta,\sin\theta,0)$を通り$z$軸に平行な直線を$L_\theta$とする．$L_\theta$と$H_t$との交点の$z$座標を$t$と$\theta$を用いて表せ.

(2) l を回転軸に持つ回転体でVに含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ．

＜解答＞

(1)

直線 l は$y=0$ の平面内の直線$z=x$ ①

点$\mathrm{P_t}$ はl 上の点だから，点$\mathrm{P_t}$ を通りl に垂直な平面H_t は$x+z=\sqrt{2}\,t$ ②

点$(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$を通り$z$ 軸に平行な直線 L_θ は$x=2\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$z=s$ ③

ただしsは連続変化する実数

②，③から，L_θ とH_t との交点のz 座標は $z=\sqrt{2}\,t-x=\sqrt{2}\,t-2\cos\theta$ （答）

(2)

点$(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$は，領域$V$を定める $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点である。

L_θ とH_t との交点をQとする。

Qのz 座標が最大となるのは $x=-2=2\cos\theta$ で，$z=\sqrt{2}\,t+2$，$\theta=\pi$

Qのz 座標が最小となるのは $x=2=2\cos\theta$ で，$z=\sqrt{2}\,t-2$，$\theta=0$

$|t|\leqq 2\sqrt{2}$ だから，$t=2\sqrt{2}$ のとき，z の最大値は $z_{max}=6$，このとき最小値は $z_{min}=2$

$t=-2\sqrt{2}$ のとき，zの最大値は $z_{max}=-2$，このとき最小値は $z_{min}=-6$

したがって，交点Qのz 座標は $|z|\leqq 6$ であるから，平面 H_t は領域Vの上底と下底の間にある。

図１，２のように，平面 H_t における領域Vの断面は長径$4\sqrt{2}$，短径２の楕円だから，

その楕円は平面 H_t 上の座標$(p,\ q)$によって $\dfrac{p^2}{(2\sqrt{2})^2}+q^2=1$ ④

直線 lと平面 H_t の交点 $\mathrm{P_t}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$は，$(t, 0)$ と表される。

l を回転軸に持つ回転体がVに含まれるということは，④上の点$(p,\ q)$と回転中心$(t, 0)$との距離 $r(t)$ の最短が回転体の断面の円の半径である。

$r^2(t)=(p-t)^2+q^2=(p-t)^2+1-\dfrac{p^2}{8}=\dfrac{7p^2}{8}-2tp+t^2+1$

$\dfrac{d}{dp}\{r^2(t)\}=\dfrac{7}{4}p-2t$，$\therefore\ \dfrac{d}{dp}\{r^2(t)\}=0$となるのは$p=\dfrac{8t}{7}$

図３のように$r^2(t)$は変化するから，$p=\dfrac{8t}{7}$で$r^2(t)=1-\dfrac{t^2}{7}$の最小値をとる。

$0\leqq p\leqq 2\sqrt{2}$ だから，このとき $0\leqq\dfrac{8t}{7}\leqq 2\sqrt{2}$，$\therefore\ 0\leqq t\leqq\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

$\dfrac{7\sqrt{2}}{4}<t\leqq 2\sqrt{2}$ のとき，断面の円が楕円の先端と接するときが最小の円だから，$(t, 0)$と楕円の先端との距離 $r(t)=(2\sqrt{2}-t)$が最短の半径となる。

微小厚さΔtの回転体の体積は $\pi r^2(t)\Delta t$ を t の範囲で加算したものである。また，円と楕円の関係は t の正負によって変わらないから，$r^2(t)$は$-2\sqrt{2}\leqq t<0$においても適用できる。

以上によって，最大となる体積は，$V_{max}=\pi\int_0^{2\sqrt{2}} r^2(t)dt+\pi\int_0^{-2\sqrt{2}} r^2(t)dt=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} r^2(t)dt$

$$\int_0^{2\sqrt{2}} r^2(t)dt=\int_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}}\left(1-\frac{t^2}{7}\right)dt+\int_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-t)^2dt=\left[t-\frac{t^3}{21}\right]_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}}+\left[\frac{-(2\sqrt{2}-t)^3}{3}\right]_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}}$$

$$=\left\{\frac{7\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{21}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^3\right\}+\frac{1}{3}\left\{2\sqrt{2}-\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)\right\}^3=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore V_{max}=2\pi\times\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi$　（答）

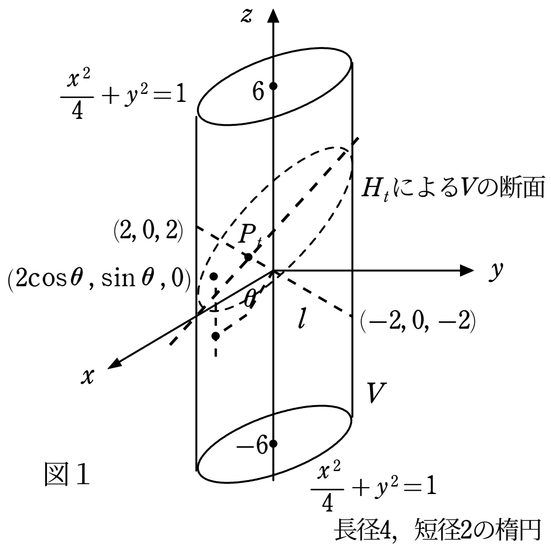

図１

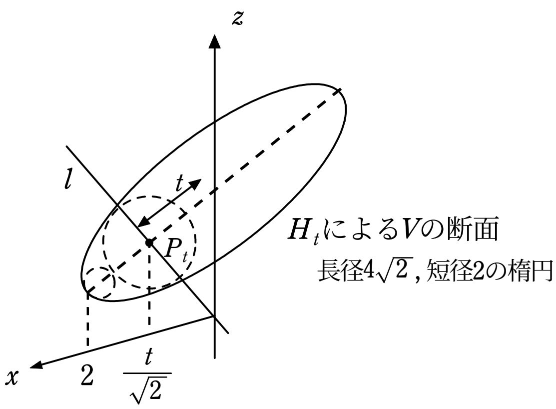

図２

p	0		$\frac{8t}{7}$		$2\sqrt{2}$
$\frac{d}{dp}\{r^2(t)\}$		$-$		$+$	
$r^2(t)$		↘		↗	

図３

＜解説＞

立体図形の問題で，頭の中に題意を示す立体図形を描いて考えよう。

(1)

(x, z)平面内の直線lの式とそれに直交する式と平面を考えよう。

点$(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$は，領域$V$を定める$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上の点であることに直ぐ気づきたい。

(2)

図１のような図を描いて考える。直線lに垂直な平面H_tにおける領域Vの断面が楕円になることは直ぐ気づくだろう。平面H_tはz軸に対して45°の傾きだから，その楕円は楕円筒を45°の傾きで切断したものになる。したがって楕円の長径が$4\times\sqrt{2}$，短径は変わらず2である。

lを回転軸にした回転体の平面H_tにおける断面はP_tを中心とする円である。したがって，回転体が領

域Vの中に含まれるためには,

平面 H_t における$\mathrm{P_t}$を中心とする円 $\subset$ 領域Vの平面 H_t における断面（楕円）, ただし$|t|\leqq 2\sqrt{2}$ であればよい。

この条件を満たすためには, この円が楕円から出ないことであり, 円の半径が最大となるのは円が楕円に内接するときである。言い換えると, 円の中心と楕円上の点との距離の最短値が円の半径となるときである。

$\boxed{5}$ (60点)

xyz 空間内の一片の長さが1の立方体

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

をQとする. 点X は頂点 A$(0, 0, 0)$ から出発してQの辺上を1秒ごとに長さ1だけ進んで隣の頂点に移動する. X がx 軸, y 軸, z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p, q, r である。ただし

$$p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0, \qquad p+q+r=1$$

である。X がn 秒後に頂点 A$(0, 0, 0)$, B$(1, 1, 0)$, C$(1, 0, 1)$, D$(0, 1, 1)$にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする.

(1) a_{n+2} を a_n, b_n, c_n, d_n とp, q, r を用いて表せ.

(2) $a_n-b_n+c_n-d_n$ をp, q, r, n を用いて表せ.

(3) a_n をp, q, r, n を用いて表せ.

＜解答＞

(1)

X がn 秒後に頂点 E$(1, 0, 0)$, F$(0, 1, 0)$, G$(0, 0, 1)$, H$(1, 1, 1)$ にある確率をそれぞれ e_n, f_n, g_n, h_n とする.

$a_{n+2}=pe_{n+1}+qf_{n+1}+rg_{n+1}$ ①

$e_{n+1}=pa_n+qb_n+rc_n$ ②

$f_{n+1}=qa_n+pb_n+rd_n$ ③

$g_{n+1}=ra_n+pc_n+qd_n$ ④

①に②, ③, ④を代入して, 整理すれば

$a_{n+2}=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2prc_n+2qrd_n$ ⑤ （答）

(2)

$h_{n+1}=rb_n+qc_n+pd_n$

(1)と同様の考え方により

$b_{n+2}=qe_{n+1}+pf_{n+1}+rh_{n+1}=2pqa_n+(p^2+q^2+r^2)b_n+2qrc_n+2prd_n$ ⑥

$c_{n+2}=re_{n+1}+pg_{n+1}+qh_{n+1}=2pra_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n$　⑦

$d_{n+2}=rf_{n+1}+qg_{n+1}+ph_{n+1}=2qra_n+2prb_n+2pqc_n+(p^2+q^2+r^2)d_n$　⑧

⑤，⑥，⑦，⑧から

$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}=(p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)$

nが奇数のとき

$a_n-b_n+c_n-d_n=(p-q+r)^2(a_{n-2}-b_{n-2}+c_{n-2}-d_{n-2})$

$=\cdots=(p-q+r)^{n-1}(a_1-b_1+c_1-d_1)$

a_1，b_1，c_1，$d_1=0$だから，$a_n-b_n+c_n-d_n=0$　⑨　（答）

nが偶数のとき

$a_n-b_n+c_n-d_n=(p-q+r)^2(a_{n-2}-b_{n-2}+c_{n-2}-d_{n-2})$

$=\cdots=(p-q+r)^n(a_0-b_0+c_0-d_0)=(p-q+r)^n(1-0+0-0)$

$=(p-q+r)^n$　⑩　（答）

(3)

⑤，⑥，⑦，⑧を加えると

$a_{n+2}+b_{n+2}+c_{n+2}+d_{n+2}=(p+q+r)^2(a_n+b_n+c_n+d_n)$

$=a_n+b_n+c_n+d_n=a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}=\cdots$

nが奇数のとき，$a_n+b_n+c_n+d_n=a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}=\cdots=a_1+b_1+c_1+d_1=0$　⑪

nが偶数のとき，$a_n+b_n+c_n+d_n=a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}=\cdots=a_0+b_0+c_0+d_0=a_0=1$　⑫

(2)の結果を参考にすると，

$a_{n+2}+b_{n+2}-c_{n+2}-d_{n+2}=(p+q-r)^2(a_n+b_n-c_n-d_n)$　⑬

$a_{n+2}-b_{n+2}-c_{n+2}+d_{n+2}=(-p+q+r)^2(a_n-b_n-c_n+d_n)$　⑭

したがって，nが奇数のとき

⑬から，$a_n+b_n-c_n-d_n=0$　⑮

⑭から，$a_n-b_n-c_n+d_n=0$　⑯

⑨＋⑮＋⑯＋⑪から，$4a_n=0$，$\therefore a_n=0$　（答）

nが偶数のとき

⑬から，$a_n+b_n-c_n-d_n=(p+q-r)^n$　⑰

⑭から，$a_n-b_n-c_n+d_n=(-p+q+r)^n$　⑱

⑩＋⑰＋⑱＋⑪から，$4a_n=(p-q+r)^n+(p+q-r)^n+(-p+q+r)^n+1$

$\therefore a_n=\frac{1}{4}\{1+(p-q+r)^n+(p+q-r)^n+(-p+q+r)^n\}$　（答）

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて考える。

$(n+2)$秒後に点X が頂点 Aにある場合はその1秒前に点X が頂点 E，F，G のいずれかにあって，頂点Aに移動する場合である。

$(n+1)$秒後に点Xが頂点Eにあって，1秒経った $(n+2)$秒後に頂点Aに移動する確率はpe_{n+1}

$(n+1)$秒後に点Xが頂点Fにあって，1秒経った $(n+2)$秒後に頂点Aに移動する確率はqf_{n+1}

$(n+1)$秒後に点Xが頂点Gにあって，1秒経った $(n+2)$秒後に頂点Aに移動する確率はrg_{n+1}

これらの事象は排反事象だから，$(n+2)$ 秒後に点X が頂点A にある確率は，これらの和であって，

$a_{n+2} = pe_{n+1} + qf_{n+1} + rg_{n+1}$

以下，同様に考えて，e_{n+1}，f_{n+1}，g_{n+1}をa_n，b_n，c_n，d_n とp，q，r によって表現すれば，解答に至る。

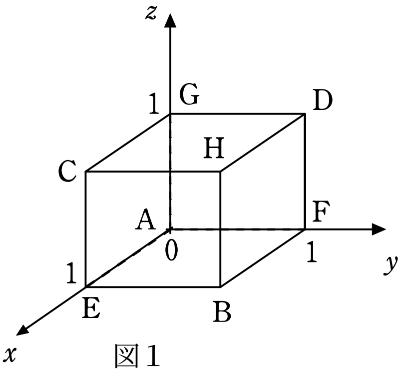

図１

(2)

(1)を利用して解答することを考える。

a_{n+2} と同様にb_{n+2}，c_{n+2}，d_{n+2} をa_n，b_n，c_n，d_n とp，q，r を用いて表す。

得られた式を視察すると，きれいに式の形式が整理されることがわかる。

ここでは $(a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2})$ の計算において，$(p^2+q^2+r^2)-2pq+2pr-2qr=(p-q+r)^2$という整理ができることを速やかに見抜きたい。すなわち，

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2} &= (p^2+q^2+r^2)a_n-2pqa_n+2pra_n-2qra_n \\
&\quad -(p^2+q^2+r^2)b_n+2pqb_n-2prb_n+2qrb_n \\
&\quad (p^2+q^2+r^2)c_n-2pqc_n+2prc_n-2qrc_n \\
&\quad -(p^2+q^2+r^2)d_n+2pqd_n-2prd_n+2qrd_n \\
&=(p-q+r)^2a_n-(p-q+r)^2b_n+(p-q+r)^2c_n-(p-q+r)^2d_n \\
&==(p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)
\end{aligned}
$$

(3)

(1)，(2)という設問の流れから，これらを利用して解答することが妥当と考えよう。点A との位置関係はE，F，G は同じであり，B，C，D もまた同じである。

そこで，(2)で得られた結果から，$(a_{n+2} + b_{n+2} - c_{n+2} - d_{n+2})$ や $(a_{n+2} - b_{n+2} - c_{n+2} + d_{n+2})$もまた(2)と同様の結果になると直感できるだろう。これらの式の中で，a_{n+2} の符号だけが変化しないので，得られた式を加減算すれば，a_{n+2} すなわちa_n が求まるのではないかと直感しよう。

(2)で$(a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2})$よりもなぜ$(a_{n+2} + b_{n+2} + c_{n+2} + d_{n+2})$を求めることがなかったのだろう。そう思って，$(a_{n+2} + b_{n+2} + c_{n+2} + d_{n+2})$を暗算すると，こちらはもっと簡単に求まる。

<総評>

思考力や着想力を問う難問が揃っている。限られた時間の中で解答するだけに，問題文を一読し題意を速やかに的確に把握したい。その上で，解答方針を考えながら，易しいと思われる問題，得意な問題から手をつけるようにする。

私は，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{1}$，$\boxed{4}$の順で手をつけたいと思った。私には立体図形を脳内で描くことが難しく，このような問題は苦手である。

東大や京大の問題では，難易度の幅が広く，易しい問題も含まれていることに対し，東工大の問題は，5問ともＢ＋以上の難問の部類の属する。解答に際しては，解答方針に着想が必要，論理の流れが長く粘り強い思考が必要，複雑な計算のため工夫が必要，などの特徴がある。東大等の難関大学の理系学部の数学問題では6問150分が一般的だが，東工大では5問180分となっていることも肯ける。

それだけに，採点には大きな配慮と努力が必要だろう。特に部分点について，どのような考え方をするのか興味深い。しかし，

$\boxed{1}$

2次方程式の複素数解を複素数平面上で扱う問題。複素数平面上の点の距離等を複素数演算で表現することにより，効果的に実行できるようにすること。解答方針に着眼，着想が必要になるので，難易度はＡ－

$\boxed{2}$

整数の問題。与えられた式の係数を素因数分解して考える。整数を整数の倍数と剰余の和として扱うことにより，条件を満たす整数の組を求める。計算は容易であるが，解答方針の着想が必要であり，難易度はＢ＋

$\boxed{3}$

導関数を用いて関数の変化を考察し，方程式の解を検討する常套的方法によると，計算がやや複雑になるので，ミスのないように。グラフを活用することにより，直感的に理解しやすい解答方法もある。難易度はＢ＋

$\boxed{4}$

3次元座標空間で定義された立体の体積の問題。3次元座標空間に立体の図を描き，題意を理解し，求める立体の体積を定義したい。回転体が領域Vに含まれることを，どのような数学表現とするかが，ポイントの一つである。立体図形の認識や表現に関する能力には，個人差が大きいので，受験生によるできふできの差異の大きな問題かも知れない。難易度はＡ

$\boxed{5}$

確率漸化式の問題。漸化式を導くことは難しくない。計算も難しくはないのだが，変数が多く錯綜するので，計算ミスに注意したい。式の変形を上手にすることが必要だが，計算量が多くなるので，直感を働かせて，速やかにミスなく結果を得るようにしたい。難易度はＡ－

190720