2018（H30)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

関数

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$$

の増減表をつくり，$x\to+0$，$x\to\pi-0$ のときの極限を調べよ。

＜解答＞

$$f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x=\frac{\sin x-x\cos x-\sin^3 x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x\cos^2 x-x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin x\cos x-x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{(\sin 2x-2x)\cos x}{2\sin^2 x}$$

$g(x)=\sin 2x-2x<0 \quad (0<x<\pi)$ である。

なぜならば，$g'(x)=2\cos 2x-2=2(\cos 2x-1)<0 \quad (0<x<\pi)$，$g(x)$は単調減少で$g(0)=0$だから。

$f'(x)=0$となるのは，$\cos x=0$から，$x=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$f(x)$の増減表は下記の通り。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

図１

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to+0}\cos x=1+1=2 \quad \text{（答）}$$

$$\lim_{x\to\pi-0}f(x)=\lim_{x\to\pi-0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to\pi-0}\cos x=\infty-1=\infty \quad \text{（答）}$$

＜解説＞

題意は簡明であり，解答方針は直ちに定まる。$f'(x)$の因数分解も容易に気づく。

$\displaystyle\lim_{x\to0}\sin x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\sin x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\cos x=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$などは，そのまま利用して良い。

第　2　問

数列 a_1，a_2，・・・・・を

$$a_n=\frac{{}_{2n+1}C_n}{n\,!} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{{}_{2n+1}C_n}{n\,!}\times\frac{(n-1)!}{{}_{2n-1}C_{n-1}}=\frac{1}{n}\times\frac{(2n+1)!}{n\,!(2n+1-n)!}\times\frac{(n-1)!\,n\,!}{(2n-1)!}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{\dfrac{n}{2}(n+1)}$$

ここで，$n(n+1)$は連続する２つの自然数の積だから偶数で，$\dfrac{n(n+1)}{2}$は自然数

$u=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$v=2n+1$とおいたとき，

$ju+kv=1$　①　をみたす整数j，k が存在するならば，自然数u，v は互いに素

$j=-8$，$k=2n+1$とすれば①が成立

したがって，$u=\dfrac{n(n+1)}{2}$と$v=(2n+1)$とは互いに素で，$p_n=u$，$q_n=v$とおくことができる。

$p_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$q_n=2n+1$　（答）

(2)

$$a_1=\frac{{}_3C_1}{1!}=3,\ a_2=\frac{{}_5C_2}{2!}=5=\frac{5}{3}\times 3,\ a_3=\frac{{}_7C_3}{3!}=\frac{35}{6}=\frac{7}{6}\times 5,\ a_4=\frac{{}_9C_4}{4!}=\frac{21}{4}=\frac{9}{10}\times\frac{35}{6}$$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)<2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{4}{n}$　①

①は$n \geqq 4$で$\dfrac{4}{n} \leqq 1$だから，$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}<1$　$(n \geqq 4)$　②

②によって，$n \geqq 4$においてnの増加とともにa_nは減少することがわかる。

したがって，$a_n \leqq 1$となるn 以上において，a_n が整数となることはない。

$a_5=\dfrac{11}{15}a_4=\dfrac{11}{15}\times\dfrac{21}{4}=\dfrac{77}{20}$

$a_6=\dfrac{13}{21}a_5=\dfrac{13}{21}\times\dfrac{77}{20}=\dfrac{143}{60}$

$a_7=\dfrac{15}{28}a_6=\dfrac{15}{28}\times\dfrac{143}{60}=\dfrac{143}{112}$

$a_8=\dfrac{17}{36}a_7=\dfrac{17}{36}\times\dfrac{143}{112}<1$，$n \geqq 8$で$a_n<1$となり，$a_n$は整数にならない。

以上によって，a_n が整数となる $n \geqq 1$は，$n=1$，2　（答）

＜解説＞

(1)

$\dfrac{q_n}{p_n}$ が既約分数 $\Leftrightarrow$ 整数p_nと q_n が互いに素。

まずは$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$を計算して，できるだけ簡明な表式を求める。$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$となるが，明らかに$n(n+1)$は偶数だから，$\dfrac{2n+1}{\frac{n}{2}(n+1)}$を既約分数の表式と推定して考える。$\dfrac{n}{2}(n+1)$と$(2n+1)$とが互いに素であることをいえば良い。

$u=\dfrac{n}{2}(n+1)$, $v=2n+1$ とおいたとき， 数学Aの教科書に記載の最大公約数の基本定理により，

$ju+kv=1$ を満たす整数 j, k が存在すれば，自然数 uとv は互いに素である。

$n=\dfrac{v-1}{2}$，$u=\dfrac{1}{8}(v+1)(v-1)=\dfrac{1}{8}(v^2-1)$

$ju+kv=\dfrac{j}{8}(v^2-1)+kv=\dfrac{1}{8}\{j(v^2-1)+8kv\}$，ここで$j=-8$，$k=v$とすれば，

$ju+kv=1$，したがって$u=\dfrac{n}{2}(n+1)$と$v=2n+1$ とは互いに素

(2)

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$あるいは$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}C_n}{n!}$の表式から，$a_n$ が整数となる $n\geqq1$を求めよう，と考えて，数式をいじっても，うまくいかない。一般的な方法を考えようとして詰まってしまうときは，具体的な計算をして，ヒントをつかむ方が速いことがある。

簡単な計算でa_1，a_2，a_3，・・・と求まる。a_3からは整数にならない，ことがわかる。するとa_{n-1}が分数なら，a_nは分数という一般解が得られそう，という感触を得る。ところが，これを説明しようとしてもうまくいかない。

a_nと$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$の計算で，$\dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)}$が1より小さくなることに気づく。すると，n が大きくなるとa_nは単調に減少し，$a_n<1$になることに気づく。そうなれば，あるn 以上でa_nは整数にはならない。

計算を進めると，幸いなことに $n\geqq8$で $a_n<1$となり，ここで計算を止めても良いことになる。

第　3　問

放物線$y=x^2$のうち$-1\leqq x\leqq1$をみたす部分をCとする。座標平面上の原点Oと点A(1, 0)を考える。$k>0$を実数とする。点PがC上を動き，点Qが線分OA上を動くとき，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}$$

をみたす点Rが動く領域の面積を$S(k)$とする。

$S(k)$および$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$を求めよ。

<解答>

点Pを$(x_p, {x_p}^2)$として，$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x_p\\{x_p}^2\end{pmatrix}$，$-1\leqq x_p\leqq1$

点Qを$(x_q, 0)$として，$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} x_q \\ 0 \end{pmatrix}$，$0 \leqq x_q \leqq 1$

点Rを(x_r, y_r)として，$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}=\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix} x_p \\ {x_p}^2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} x_q \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_p/k+kx_q \\ {x_p}^2/k \end{pmatrix}$

$x_r=\dfrac{x_p}{k}+kx_q$　①，$-\dfrac{1}{k} \leqq x_r \leqq \dfrac{1}{k}+k$

$y_r=\dfrac{{x_p}^2}{k}$　②，$0 \leqq y_r \leqq \dfrac{1}{k}$

①，②から，$y_r=k(x_r-kx_q)^2$，したがって点R(x_r, y_r)は放物線$y=k(x-kx_q)^2$　③　を描く。

x_qが$0 \leqq x_q \leqq 1$で変化すると，放物線③は図１のようにkだけ横方向に移動する。

すなわち，放物線③は

$x_q=0$において$y=kx^2$　④，　$x_q=1$において$y=k(x-k)^2$　⑤

点R(x_r, y_r)が動く領域は放物線④が⑤へx方向に移動するときになぞる領域で，図１の打点部。

放物線④と⑤の交点$\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k^3}{4}\right)$がちょうど$y=\dfrac{1}{k}$上にくる$k=\sqrt{2}$を境に

$0<k \leqq \sqrt{2}$では図１(1)のように$0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{k}$において，放物線がなぞらない領域ができる

$\sqrt{2}<k$では，図１(2)のように$0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{k}$において，放物線はすべてなぞる。

ｉ) $0<k \leqq \sqrt{2}$のとき

$$S(k)=k\times\frac{1}{k}\times 2-2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 dx=2-2\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^{\frac{k}{2}}=2-\frac{k^4}{12}\quad（答）$$

ii) $\sqrt{2}<k$のとき

$$S(k)=k\times\frac{1}{k}+2\int_{-\frac{1}{k}}^{0}\left(\frac{1}{k}-kx^2\right)dx=1+\frac{2}{k}\left[x-\frac{k^2x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{k}}^{0}=1+\frac{4}{3k^2}\quad（答）$$

$$\lim_{k\to+0} S(k)=\lim_{k\to+0}\left(2-\frac{k^4}{12}\right)=2\quad（答），\qquad \lim_{k\to\infty} S(k)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4}{3k^2}\right)=1\quad（答）$$

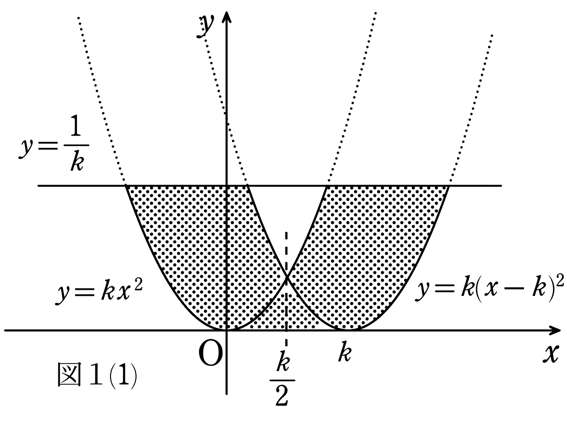

図１(1)

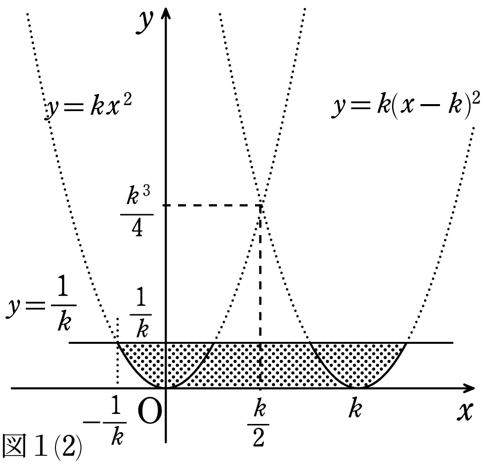

図１(2)

＜解説＞

題意を理解するために，図２のような図を大雑把に描いてみる。先ずは，点Rをベクトル表示してみようと考える。簡単なベクトルの和の計算により，点Pが放物線C上を動くとき，点Rは放物線を描くことがわかる。

その放物線の式③を見つめると，点Qが点Oから点Aへ移動するとき，放物線が横軸方向へ平行移動することがわかる。したがって，点Rが動く領域とは，放物線が横方向へ移動するときになぞる領域であることがわかる。そこで，図１のようなグラフを描いてみる。

$0 \leqq y_r \leqq \dfrac{1}{k}$であるから，図１(1)によって，$y=\dfrac{1}{k}$が放物線④，⑤の交点の上か，下かによって放物線のなぞる領域が異なること，したがって面積の求め方も異なることがわかる。

図１(1)では，（幅kで長さ$\dfrac{1}{k}$の帯が2本の面積）から（両者の重複領域の面積）を差し引いて求めると考えることができる。図１(2)では，$y=kx^2$の放物線の先端がなぞる領域なので，（横kで縦が$\dfrac{1}{k}$の四角形の面積）と（放物線の先端部の面積）の和と考えることができる。

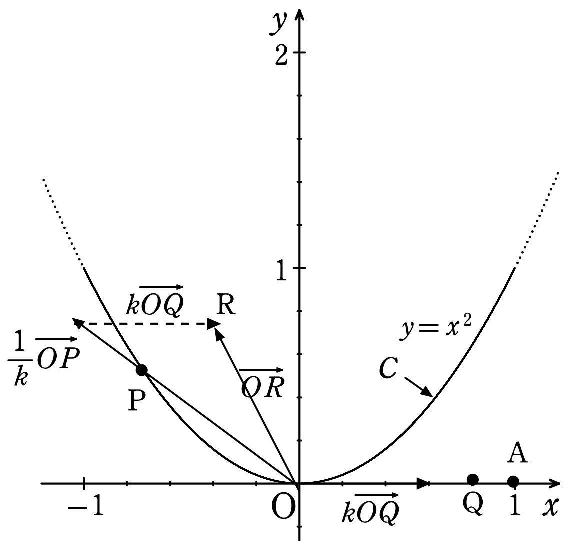

図２

第　４　問

$a>0$とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。次の２条件をみたす点$(a\ ,\ b)$の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１：方程式$f(x)=b$は相異なる3実数解をもつ。

条件２：さらに，方程式$f(x)=b$の解を$\alpha<\beta<\gamma$とすると$\beta>1$である。

＜解答＞

$y=f(x)=x^3-3a^2x=x(x^2-3a^2)=(x+\sqrt{3}\,a)x(x-\sqrt{3}\,a)$のグラフは図１の通り。

$f'(x)=3(x+a)(x-a)$，したがって極大値$f(-a)=2a^3$，極小値$f(a)=-2a^3$をとる。

方程式$f(x)=b$の解は$y=f(x)$と$y=b$のグラフの共有点（交点）のx座標である。
したがって，方程式$f(x)=b$が相異なる3実数解をもつためには，$y=f(x)$と$y=b$のグラフが３つの異なる共有点をもつことが必要である。

したがって，$f(a)=-2a^3<b<2a^3=f(-a)$　①
また，$\beta>1$であるためには，図１から，$1<a$ かつ $b<f(1)=1-3a^2$　②
以上によって条件１，２をみたす点$(a\ ,\ b)$の動きうる範囲は①，②を満たす領域であり，図２の打点部として示す。境界線は含まない。

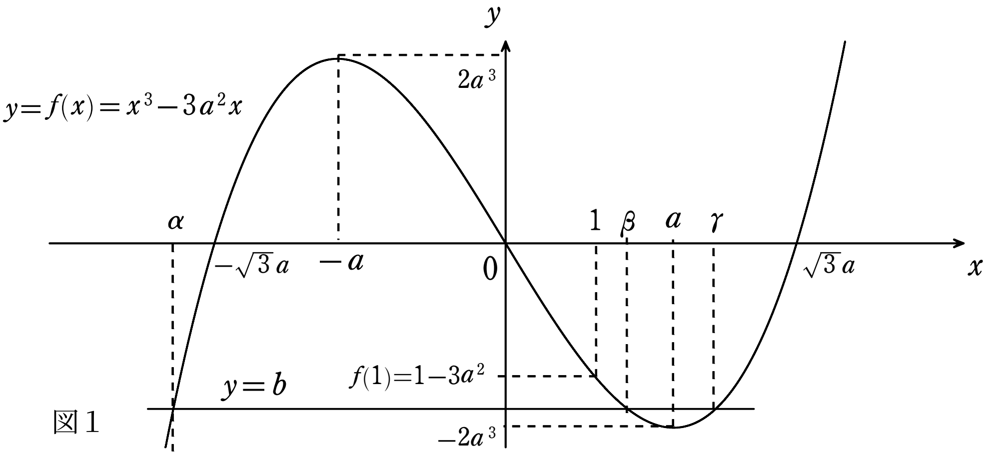

図１

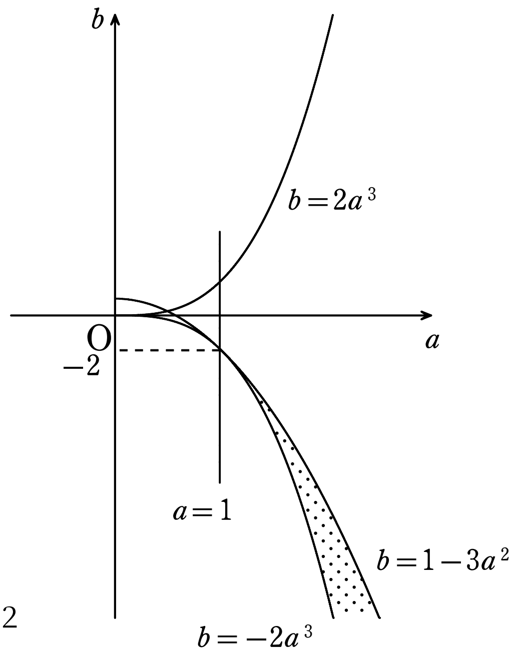

図２

<解説>
3次方程式$f(x)=x^3-3a^2x=b$の解に関する問題。一般的には，3次方程式を高校数学では扱わないので，$g(x)=f(x)-b=x^3-3a^2x-b=0$として考えるのではなく，$y=f(x)$のグラフと$y=b$のグラフの共有点（交点）の振る舞いを考察して，解答する。

幸い$f(x)=x^3-3a^2x$のグラフの概形は容易に描ける。$f(x)=x^3-3a^2x=0$によってx軸との共有点，$f'(x)=3(x+a)(x-a)$によって極値を与えるx座標がわかる。

$y=f(x)$のグラフと$y=b$のグラフの共有点がbの増減によってどう変わるかを，グラフの概形を描いて考える。実数解を３つもつ条件は容易だろう。実数解$\beta>1$のために，$a>1$が必要となることを，グラフから見落とさないように。

第　5　問

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円をCとする。点 P(z) はC上にあり，点 A(1) とは異なるとする。点 P における円Cの接線に関して，点 A と対称な点を $Q(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) Cのうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分をC'とする。点 P(z) がC'を動くときの点R(w)の軌跡を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１を参照する。点Pにおける円Cの接線をlとし，線分AQとlの交点をMとする。

AM＝MQ である。ただしAM によって線分AM の長さを示すものとする。

点 P(z)の偏角をθとすれば，$z=\cos\theta+i\sin\theta$

OP∥AQ だから，$u=\dfrac{AQ}{OP}z+1=2\times\dfrac{AM}{OP}z+1=2\times(\mathrm{AM})\times z+1$　①

$\mathrm{AM}=1+\cos(\pi-\theta)=1-\cos\theta=1-\dfrac{z+\overline{z}}{2}$　②

②を①に代入して，$u=\{2-(z+\overline{z})\}z+1=2z-z^2-z\overline{z}+1=2z-z^2$　（答）

$\overline{w}=\overline{\dfrac{1}{1-u}}=\dfrac{1}{1-\overline{u}}$，$\overline{u}=2\overline{z}-\overline{z^2}=2\overline{z}-\overline{z}^2$

$\dfrac{\overline{w}}{w}=\dfrac{1-u}{1-\overline{u}}=\dfrac{1-2z+z^2}{1-2\overline{z}+\overline{z}^2}=\left(\dfrac{1-z}{1-\overline{z}}\right)^2=\left(\dfrac{z\overline{z}-z}{1-\overline{z}}\right)^2=\left\{\dfrac{-z(1-\overline{z})}{1-\overline{z}}\right\}^2=z^2$　（答）

$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=\left|\dfrac{w+\overline{w}-1}{w}\right|=\left|1+\dfrac{\overline{w}}{w}-\dfrac{1}{w}\right|$

$=|1+z^2-(1-u)|=|1+z^2-1+2z-z^2|=2|z|=2$　（答）

(2)

(1)の結果から，$|w+\overline{w}-1|=2|w|$　③

x，yを実数として$w=x+yi$とおけば，③は$|2x-1|=2\sqrt{x^2+y^2}$　④，∴ $x=-y^2+\dfrac{1}{4}$　⑤

$w=\dfrac{1}{1-u}=\dfrac{1}{1-2z+z^2}=\dfrac{1}{(z-1)^2}$

$|(z-1)^2|=|z-1|^2$，zの実部が$\dfrac{1}{2}$以下だから，$1\leqq|z-1|^2\leqq4$，∴ $\dfrac{1}{4}\leqq|w|=\left|\dfrac{1}{(z-1)^2}\right|\leqq1$

③，④から $|2x-1|=2|w|$だから，$\dfrac{1}{2}\leqq|2x-1|\leqq 2$，⑤から$x\leqq\dfrac{1}{4}$だから $\dfrac{1}{2}\leqq 1-2x\leqq 2$

したがって$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$　⑥

⑤を⑥の条件下で図示すると図２（答）

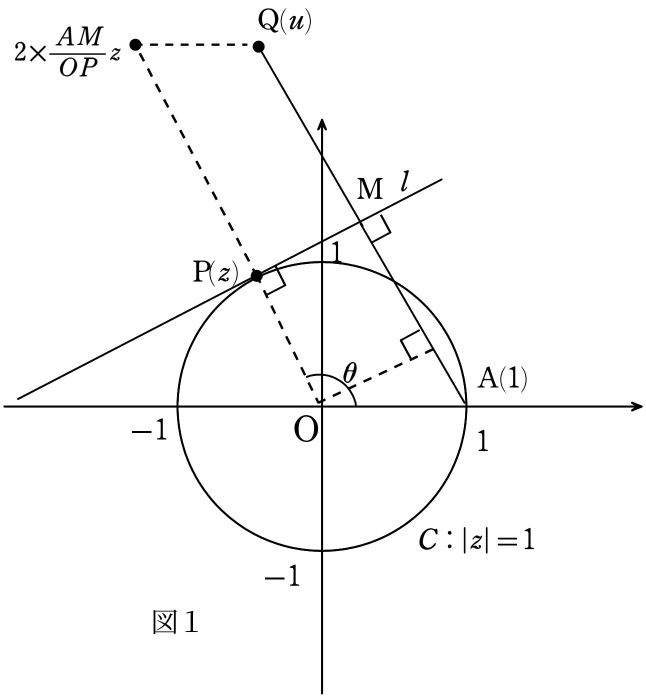

図１

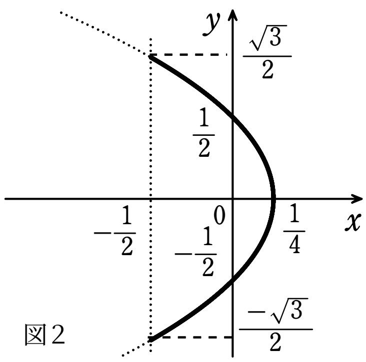

図２

＜解説＞

⑴

図１のような図を大雑把に描いて，問題文が指示する点Q(u)を定める。その上で，図を眺めると点P(z)と点Q(u)の位置には簡単な関係がありそうなことがわかる。直線OPを実軸方向へ1だけ平行移動すれば直線AQに重なることに気づけば容易になるだろう。

図形を扱う複素数の演算では絶対値と複素共役数の活用が重要となる。絶対値は長さ，複素数とその共役数の積，和，差によって，より簡明な数学表現と式の変形などが可能になるからだ。上記の解答によって，そのことが理解できるだろう。

そのためには，数学Ⅲの教科書の「複素数平面」の章をていねいに読み込み，練習問題を繰り返し解き，疑問を残さないことだ。

⑵

⑴を利用することを直ちに思うこととことが大事だ。すると③という簡明な表現から，直ちにwの軌跡がどのようなものか，考えたくなる。教科書には，そのような例が説明されていた。だが，思い浮かぶものがない。軌跡はある数式$f(x, y)=0$を満たす点(x, y)の集まりだから，ここは$z=x+yi$とおいて$f(x, y)=0$を導こう，と考える。

すると容易に③，④，⑤とたどることができる。問題は得られた軌跡⑤の範囲である。「Cのうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C'」の問題文があるのだから，軌跡$x=-y^2+\dfrac{1}{4}$には範囲があるに違いない。$w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$によって，$w=x+y\,i$ は$(z-1)$と関係づけられる。$|z-1|$は点Pと点Aの

距離だから，図１を参照すれば，容易に$|z-1|$，$|(z-1)^2|=|z-1|^2$の範囲がわかる。

複素数による図形の取り扱いの問題。複素数の理解，演算の方法，複素数平面での図形表現などが問われる。

第　6　問

座標空間内の4点O$(0,0,0)$，A$(1,0,0)$，B$(1,1,0)$，C$(1,1,1)$を考える。

$\frac{1}{2}<r<1$とする。点Pが線分OA，AB，BC上を動くときに点Pを中心とする半径rの球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれV_1，V_2，V_3とする。

(1) 平面$y=t$がV_1，V_3双方と共有点をもつようなtの範囲を与えよ。さらに，この範囲のtに対し，平面$y=t$とV_1の共通部分および，平面$y=t$とV_3の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1とV_3の共通部分がV_2に含まれるためのrについての条件を求めよ。

(3) rは(2)の条件をみたすとする。V_1の体積をSとし，V_1とV_2の共通部分の体積をTとする。V_1，V_2，V_3を合わせて得られる立体Vの体積をSとTを用いて表せ。

(4) ひきつづきrは(2)の条件をみたすとする。SとTを求め，Vの体積を決定せよ。

＜解答＞

(1)

平面$y=t$とV_1が共有点をもつためには，$-r\leqq t\leqq r$　①

平面$y=t$とV_3が共有点をもつためには，$1-r\leqq t\leqq 1+r$　②

$\frac{1}{2}<r<1$だから，$1-r<r$

したがって，平面$y=t$がV_1，V_3双方と共有点をもつようなtの範囲は

①，②から$1-r\leqq t\leqq r$　③　（答）

平面$y=t$とV_1の共通部分および，平面$y=t$とV_3の共通部分の輪郭線を図１に示す。

共通部分はいずれもこれら輪郭線を含む内部である。

(2)

平面$y=t$とV_2の共通部分は$(x-1)^2+z^2=r^2$の円内

V_1とV_3の共通部分がV_2に含まれるということは，この円内に図１の打点部が含まれるということ。

図１からわかるように，この円の中心から最も遠い点Qがこの円内に入れば良い。

Qのxz座標は$\left(1-\sqrt{r^2-(1-t)^2}\ ,\ \sqrt{r^2-t^2}\right)$だから，

$\left(1-\sqrt{r^2-(1-t)^2}-1\right)^2+\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\leqq r^2$，$\therefore\ r^2\leqq 2t^2-2t+1=2\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$　④

したがって，tの値にかかわらず④が成立するためには，$r^2\leqq\frac{1}{2}$，$\therefore\ \frac{1}{2}<r\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$　（答）

(3)

立体Vの体積を$F(V)$と表現すれば，$F(V_1)=S$，$F(V_1\cap V_2)=T$

V_1，V_2，V_3 は半径r の球を直線上を1だけ移動したときできる立体だから形状は同じ。

$F(V_1)=F(V_2)=F(V_3)=S$

また，V_1とV_2，V_2とV_3の重なり方は同じだから，

$V_1\cap V_2$と$V_2\cap V_3$の形状は同じになるので，$F(V_2\cap V_3)=F(V_1\cap V_2)=T$

また$F(V_1\cap V_3)=U$とすれば，$V_1\cap V_3\subset V_2$だから$F(V_1\cap V_2\cap V_3)=F(V_1\cap V_3)=U$

したがって，

$F(V)=F(V_1\cup V_2\cup V_3)$

$\quad=F(V_1)+F(V_2)+F(V_3)-F(V_1\cup V_2)-F(V_2\cup V_3)-F(V_3\cup V_1)+F(V_1\cap V_2\cap V_3)$

$\quad=3S-2T$　（答）

(4)

V_1，V_2，V_3は半径 r，長さ1の円筒の両端に半径 r の半球が接続した立体だから，

$S=\pi r^2\times 1+\dfrac{4}{3}\pi r^3=\pi r^2+\dfrac{4}{3}\pi r^3$

V_1とV_2の共通部分

ⅰ) $-r\leqq t\leqq 0$のとき

図２のように

$z=t$ の平面とV_1 の共通部分は一辺の長さが1の長方形の他辺に半円が接続した図形

$z=t$ の平面とV_2 の共通部分は上記半円と半径，中心が同じ円

したがって$-r\leqq t\leqq 0$におけるV_1とV_2の共通部分は半径rの半球だから体積 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

ⅱ) $0\leqq t\leqq r$ のとき

図２は$z=t$のxy 平面におけるV_1，V_2 の断面

$z=t$ の平面とV_1，V_2 の共通部分は同じ形状で，長方形の他辺に半円が接続した図形で，

それらの共通部分は図２の打点部

円の方程式は $(x-1)^2+y^2=r^2-t^2$

したがって打点部の面積は $\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\pi\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2=\left\{1+\dfrac{3}{4}\pi\right\}(r^2-t^2)$

t は$z=-r$からr まで変化するから，

$T=\left\{1+\dfrac{3}{4}\pi\right\}\displaystyle\int_{-r}^{r}(r^2-t^2)dt=\left\{1+\dfrac{3}{4}\pi\right\}\left[r^2t-\dfrac{t^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\left\{1+\dfrac{3}{4}\pi\right\}\dfrac{4}{3}r^3=\left\{\dfrac{4}{3}+\pi\right\}r^3$

したがって求める体積は $3S-2T=\left(2\pi-\dfrac{8}{3}\right)r^3+3\pi r^2$　（答）

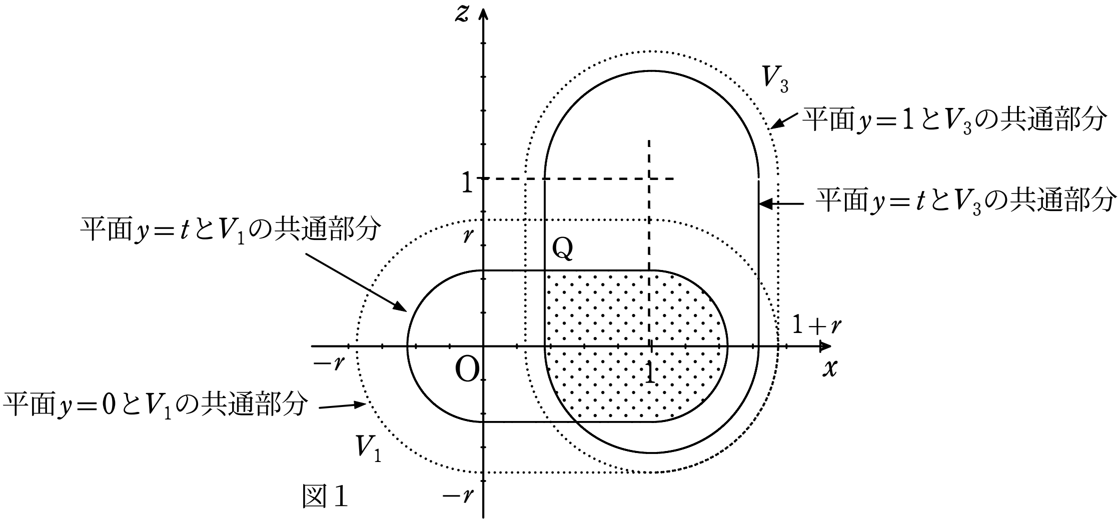

図１

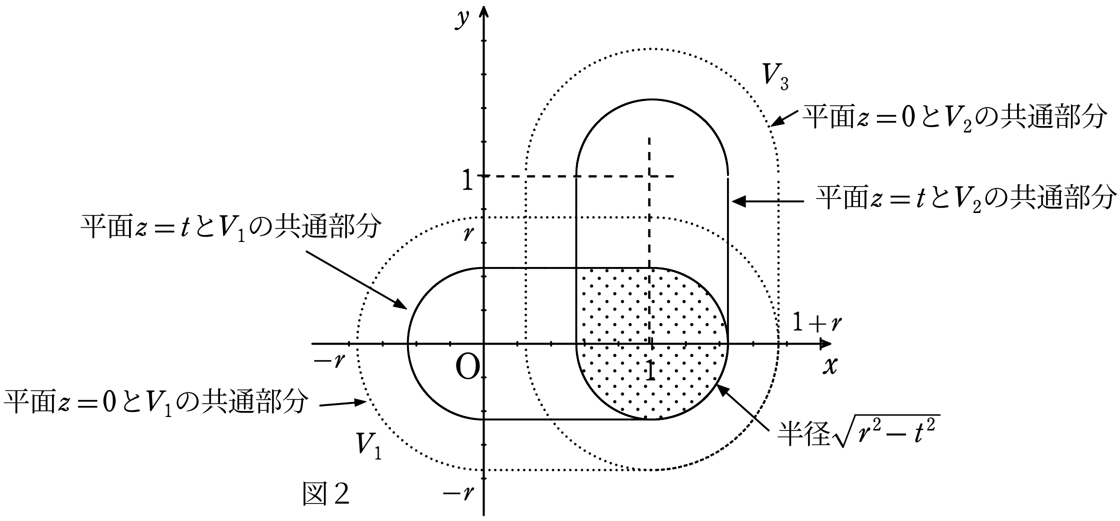

図２

＜解説＞

V_1，V_2，V_3は半径 r，長さ 1の円筒の上底，下底に半径r の半球が接続した立体であることは容易にわかる。

⑴

①と②を満足する t，すなわち共通区間が求めるt の範囲となる。

$y=t$ の面とはxz座標面になる。

$y=0$の面とV_1の共通部分は図１の破線の図形内部，$y=1$の面とV_3の共通部分は図１の破線の図形内部である。両者は同じ形状である。したがって，$y=t$の面とV_1の共通部分，$y=t$の面とV_3の共通部分の輪郭線は図１のようになる。

$y=t$の面とV_1の共通部分は辺長$2\sqrt{r^2-t^2}$と1の長方形に半径$\sqrt{r^2-t^2}$の半円が接続した図形である。

$y=t$の面とV_3の共通部分は辺長$2\sqrt{r^2-(1-t)^2}$と1の長方形に半径$\sqrt{r^2-(1-t)^2}$の半円が接続した図形である

(2)

$y=t$の面におけるV_1とV_3の共通部分は図１における打点部である。一方，$y=t$の面とV_2の共通部分は半径r，xz座標面で中心$(1,0)$の円である。したがって③を満たすtにおいて，打点部がこの円内に含まれれば，V_1とV_3の共通部分がV_2に含まれる。

この打点部の中で，中心$(1,0)$から最も遠い点は両輪郭線の直線部分の交点Qだから，QがV_2の切断円の中に入れば良い。

(3)

集合の基本的な命題を使う。

図３のような３つの領域（集合）において，以下の命題が成立する。

$A_1\cup A_2\cup A_3=A_1+A_2+A_3-A_1\cap A_2-A_2\cap A_3-A_3\cap A_1+A_1\cup A_2\cup A_3$

ここでは，V_1，V_2，V_3は図４のような関係である。当然，上記と同じ下記の命題が成立する。

$V_1\cup V_2\cup V_3=V_1+V_2+V_3-V_1\cap V_2-V_2\cap V_3-V_3\cap V_1+V_1\cap V_2\cap V_3$

ここでは$V_1\cap V_2=V_2\cap V_3$である。さらに$V_1\cap V_3\subset V_2$であるから，明らかに$V_1\cap V_2\cap V_3=V_1\cap V_3$

したがって図４の場合には，$V_1\cup V_2\cup V_3=V_1+V_2+V_3-V_1\cap V_2-V_2\cap V_3$

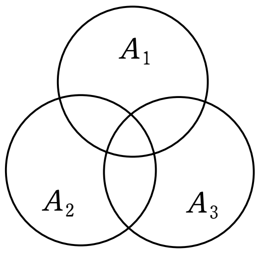

図３

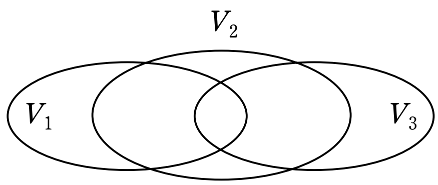

図４

(4)

この問題の注意点は，(1)，(2)では$y=t$の切断面を議論していたので，同様に$y=t$の切断面で考えようとすることだ。すると，とても煩瑣になってしまう。私も，そのように考えて，苦慮してしまった。しかし，V_1，V_2はxy平面内では，同一形状をしていることに気がつく必要がある。xy平面内のV_2の形状は，回転中心を$(1,0)$としてV_1のそれを時計方向に90°回転したものと同じである。$z=t$の切断面内のV_1，V_2の共通部分を求めることは容易である。

＜総評＞

例年同様，骨のある問題が含まれている。今年は確率の問題がなかった。全問を一読して題意を把握し，解答順序を決めたい。私は，１，４，２，３，５，６の順で扱いたいと思った。

第１問

東大の数学といえば手強いという印象があるだけに，昨年同様，第１問はやや拍子抜けするくらい，簡明な問題である。確実に解いて，気持ちを落ち着かせたい。難易度C。

第２問

整数の問題。２つの自然数が互いに素となる条件は数学Aの教科書に記載されている。整数の問題は解答方針と論理の流れの考案が必要となるが，本問は難しい考案や論理を必要としない。

⑵では一般的な解答を考えるより，むしろ具体的な計算によって解の感触をつかみ，正答へのアプローチを考えた方が良い。部分点も得やすい。難易度はＢ＋。

第３問

求める領域がどのようなものか，描くことが必要である。簡単なベクトル計算により求まるが，kの値によって，領域が異なることに気づかねばならない。そのことをグラフによって表現し，面積を求める。難易度はＡ－。

第４問

3次関数と3次方程式の解の問題。グラフの概形を描き，極値を求め，x軸に平行な直線との共有点から実数解の条件を求める。3次方程式の解法として常套的手段を用いる。難易度はＢ。

第５問

複素数による図形の取り扱いの問題。複素数の理解，演算の方法，複素数平面での図形表現などが問われる。問題文を追って，図を描き，$u=(z)$を求めよう。直線OPを実軸方向に1移動した直線がAQであることに気づけば，解答方針が容易に定まるであああろう。解答方針の案出，複素数の演算などがやや難しいので，難易度はA。

第６問

立体図形を切断した平面内の図形から，共通部分の体積等を求める問題。一読して，やや煩瑣な問題に感じられるが，適切な着眼があれば，難しい思考や計算を必要とするものではない。例年の立体図形の問題に比して易しいので，食わず嫌いにならず，しっかり食らいついてゆこう。完答できなくても，部分点は取り易い問題である。Ａ－。

180930

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

座標平面に放物線Cを

$$y=x^2-3x+4$$

で定め，領域Dを

$$y \geqq x^2-3x+4$$

で定める。原点を通る2直線l，mはCに接するものとする。

⑴ 放物線C上を動く点A と直線l，mの距離をそれぞれL，Mとする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$が最小値をとるときの点A の座標を求めよ。

⑵ 次の条件をみたす点P$(p，q)$の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域Dのすべての点$(x，y)$に対し不等式$px+qy \leqq 0$がなりたつ。

＜解答＞

⑴

原点を通る接線を$y=ax$とする。

$y=x^2-3x+4$ と連立させてえられる2次方程式$x^2-(3+a)x+4=0$は重解をもつから，

判別式$D=(3+a)^2-16=0$，$\therefore\ a=1\ ,\ -7$

接線l：$y=x$，接線m：$y=-7x$ とおく。曲線C，領域D，接線l，mは図１になる。

点A$(x_a\ ,\ y_a)$とすれば，

点Aと直線lとの距離は$L=\dfrac{|x_a-y_a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|x_a{}^2-4x_a+4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{(x_a-2)^2}{\sqrt{2}}$

点Aと直線mとの距離は$M=\dfrac{|7x_a+y_a|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\dfrac{|x_a{}^2+4x_a+4|}{5\sqrt{2}}=\dfrac{(x_a+2)^2}{5\sqrt{2}}$

$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\dfrac{|x_a-2|}{\sqrt[4]{2}}+\dfrac{|x_a+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(|x_a-2|+\dfrac{|x_a+2|}{\sqrt{5}}\right)$

$U=|x_a-2|+\dfrac{|x_a+2|}{\sqrt{5}}$として，$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\dfrac{U}{\sqrt[4]{2}}$

ｉ) $x_a\leqq-2$のとき

$$U=|x_a-2|+\frac{|x_a+2|}{\sqrt{5}}=(2-x_a)+\frac{-x_a-2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}+1)x_a\}$$

Uはx_aに関して単調減少だから，$x_a=-2$ でUは最小値 4

ii) $-2\leqq x_a\leqq2$のとき

$$U=|x_a-2|+\frac{|x_a+2|}{\sqrt{5}}=(2-x_a)+\frac{x_a+2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)x_a\}$$

Uはx_aに関して単調減少だから，$x_a=2$でUは最小値 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

iii) $2\leqq x_a$とき

$$U=|x_a-2|+\frac{|x_a+2|}{\sqrt{5}}=(x_a-2)+\frac{x_a+2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2(-\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}+1)x_a\}$$

Uはx_aに関して単調増加だから，$x_a=2$でUは最小値 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

以上によって，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$が最小値をとるとき$x_a=2$だから，点Aの座標は$(2\ ,\ 2)$　（答）

(2)

不等式$px+qy\leqq0$について，

ｉ) $q<0$のとき

$y\geqq-\dfrac{p}{q}x$　①，領域Dの$(x\ ,\ y)$が①をみたすためには，

図１から直線の傾き$-\dfrac{p}{q}$について，$-7<-\dfrac{p}{q}<1$

これより，$q<-p$，$q<\dfrac{p}{7}$　②

ii) $q=0$のとき

$px\leqq0$，領域領域Dにおいて，xはすべての実数だから，$p=0$　③

iii) $q>0$のとき

$y \leqq -\dfrac{p}{q}x$

図１から，領域Dのすべてのyが原点を通る直線よりも小さくなる直線は存在しない。

以上から，点P(p，q)の動きうる範囲は②と③をみたす図２の打点部（境界線を含む）である。

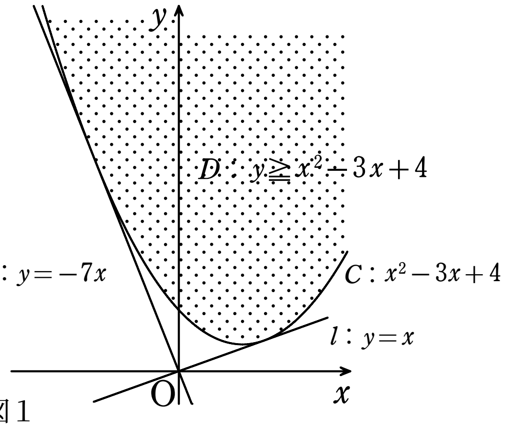

図１

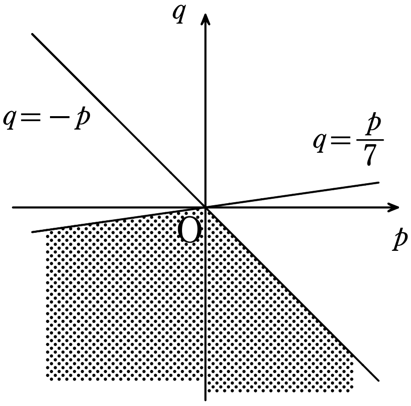

図２

＜解説＞

(1)

図１のような図を大雑把に描いて題意を把握する。原点を通る接線の方程式は容易に求まる。点と直線との距離に関する公式は数学Ⅱの教科書の「図形と方程式」などの章に記載されている。この公式を覚えていないと，進むのは困難になる。

(2)

(1)と図１をヒントとして考える。あたえられた不等式は原点を通る直線によって区分された領域を示している。その領域が図１の領域Dを包含すれば良いのである。すると，直線$y=-\dfrac{p}{q}x$が接線lとmが挟む領域外にあれば良いということがわかる。

第　2　問

数列a_1，a_2，・・・・・・を

$$a_n=\frac{{}_{2n}C_n}{n!} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) a_7と1の大小を調べよ。

(2) $n \geqq 2$とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$をみたすnの範囲を求めよ。

(3) a_nが整数となる$n \geqq 1$をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

$$a_7=\frac{1}{7!}\times\frac{14!}{7!(14-7)!}=\frac{13\cdot 11}{15\cdot 14}<1 \qquad \text{（答）}$$

(2)

$$ {}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2},\ \ \therefore\ a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^3} $$

したがって，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^3}\times\dfrac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!}=\dfrac{2n(2n-1)}{n^3}=\dfrac{4}{n}-\dfrac{2}{n^2}=f(n)<\dfrac{4}{n}$　①

①から，$n\geqq 4$では明らかに，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$

$f(2)=\dfrac{4(4-1)}{2^3}=\dfrac{3}{2}$，$f(3)=\dfrac{6(6-1)}{3^3}=\dfrac{10}{9}$，$f(4)=\dfrac{8(8-1)}{4^3}=\dfrac{7}{8}$だから，

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$をみたすnの範囲は $n\geqq 4$　（答）

(3)

$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=\dfrac{10}{3}$，$a_4=\dfrac{35}{12}$，$a_5=\dfrac{21}{10}$，$a_6=\dfrac{77}{60}$，$a_7=\dfrac{13\cdot 11}{15\cdot 14}<1$，

(2)から，$n\geqq 4$で$f(n)<1$，$a_7<1$だから，$a_n<1$　($n\geqq 7$)

したがって，a_n が整数となるのは，$n=1,2$　（答）

＜解説＞

理科の第２問を容易にした問題。(3)は理科の(2)と同じ。ただし，思考過程を決める問題構成が異なるので，(3)の解答記述は理科の(2)の記述とは異なる。

(1)

組合わせや階乗の表式と計算を的確に行う。

(2)

①から，$n\leqq 3$，すなわち$n=2$，3について，$f(n)=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を調べれば良い。

(3)

$a_n=f(n)a_{n-1}$，$n\geqq 4$で$f(n)<1$だから，$a_{n-1}\leqq 1$となるn以上でa_n は整数とならない。

a_1，a_2，・・・・，$a_7=\dfrac{13\cdot 11}{15\cdot 14}<1$まで調べ，$n=8$ 以上ではa_n は整数にならないことがわかる。

第　3　問

$a>0$とし，

$$ f(x)=x^3-3a^2x $$

とおく。

(1) $x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加するための，aについての条件を求めよ。

(2) 次の2条件をみたす点(a,b)の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１：方程式$f(x)=b$は相異なる３実数解をもつ。

条件２：さらに，方程式$f(x)=b$の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると$\beta>1$である。

＜解答＞

(1)

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$，$f(x)$の変化を図１に示す。

$x\geqq a$で$f(x)$が単調に増加するから，$a\leqq 1$であれば，$x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加する。

したがって，$x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加するための，aについての条件は，$0<a\leqq 1$　（答）

x		$-a$		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

図１

(2)

理科の第４問と同じなので，参照する。

＜解説＞

理科の第４問に(1)が前置されている。

(1)

$f(x)$の変化を調べ，単調増加するxの範囲を求める。その範囲が$x\geqq 1$を包含するための条件を求めれば良い。導関数$f'(x)$の正負から，$f(x)$の増減を調べる常套手段により，$x\geqq a$において単調増加することが容易に求まる。$x\geqq a$が$x\geqq 1$を包含するためには，$a\leqq 1$であればよい。

(2)

理科の第４問の解説を参照する。

第　４　問

放物線$y=x^2$のうち$-1\leqq x\leqq 1$をみたす部分をCとする。座標平面上の原点Oと点A(1, 0)を考える。

(1) 点PがC上を動くとき，

$$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$$

をみたす点Qの軌跡を求めよ。

(2) 点PがC上を動き，点Rが線分OA上を動くとき，

$$\overrightarrow{OS}=2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$$

をみたす点Sが動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１を参照する。

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_P \\ {x_P}^2 \end{pmatrix}$　$(-1\leqq x_P\leqq 1)$ とおく。$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix}=2\overrightarrow{OP}=2\begin{pmatrix} x_P \\ {x_P}^2 \end{pmatrix}$

したがって，$x_Q=2x_P$，$y_Q=2{x_P}^2=2\left(\dfrac{x_Q}{2}\right)^2=\dfrac{{x_Q}^2}{2}$　$(-2\leqq x_Q\leqq 2)$

点Q$(x_Q\ ,\ y_Q)$について$y_Q=\dfrac{{x_Q}^2}{2}$だから，点Qの軌跡は$y=\dfrac{x^2}{2}$　$(-2\leqq x\leqq 2)$　（答）

(2)

点R$(x_R\ ,\ 0)$とすれば，$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix} x_R \\ 0 \end{pmatrix}$　$(0\leqq x_R\leqq 1)$

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix} x_Q \\ {x_Q}^2/2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_R \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_Q+x_R \\ {x_Q}^2/2 \end{pmatrix}\quad (-2\leqq x_Q\leqq 2,\ 0\leqq x_R\leqq 1)$$

すなわち，$\overrightarrow{OS}$ は $\overrightarrow{OQ}$ をx方向にx_R　$(0\leqq x_R\leqq 1)$　移動してできる。

点S$(x_S\ ,\ y_s)$について$y_S=\dfrac{{x_Q}^2}{2}=\dfrac{(x_S-x_R)^2}{2}$　$(-2+x_R\leqq x_S\leqq 2+x_R,\ 0\leqq x_R\leqq 1)$　だから，

点Sが動く領域 $(x\ ,\ y)$ は，$y=\dfrac{(x-x_R)^2}{2}$　$(-2+x_R\leqq x\leqq 2+x_R,\ 0\leqq x_R\leqq 1)$である。

これは放物線$y=\dfrac{x^2}{2}$をx_R　$(0\leqq x_R\leqq 1)$ 移 動したときになぞる領域で，図２の打点部である。

その面積A_Sは幅1，長さ2の帯2本から両者の重複部分を差し引いたものとなる。

すなわち$A_S=1\times 2\times 2-2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2}dx=4-2\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{95}{24}$　（答）

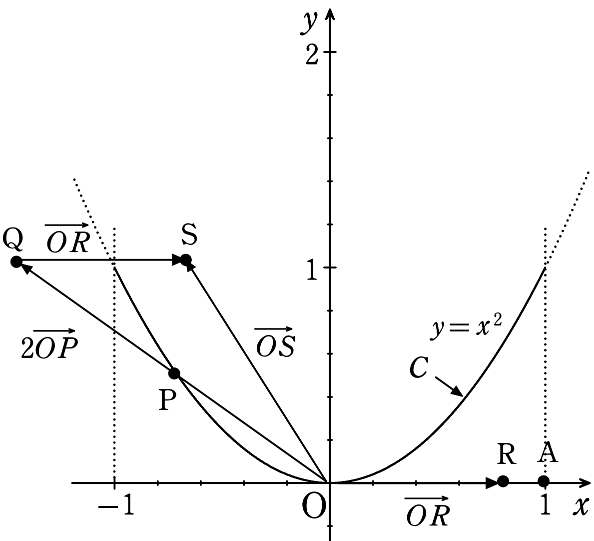

図１

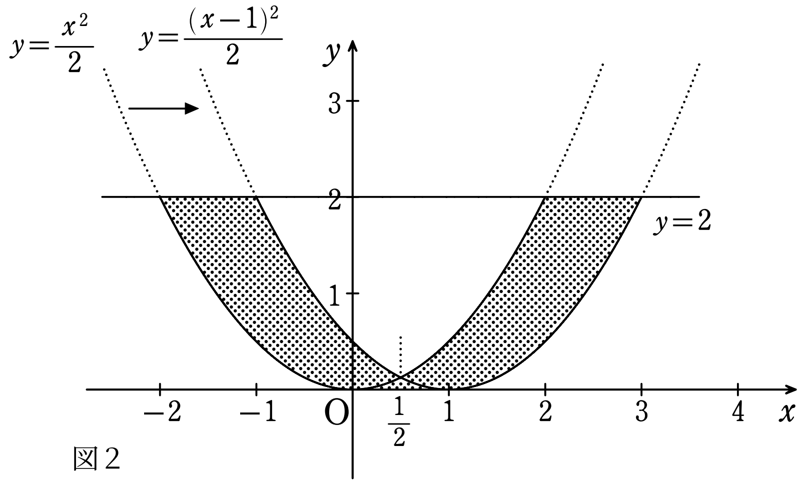

図２

＜解説＞

理科の第３問を具体化した問題である。そちらも参照してほしい。

⑴

ベクトルを$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$のように表現して計算をする。

⑵

図２の打点部は二つの放物線に囲まれた幅が1の曲線帯である。したがって，その面積は幅1，長さ2の長方形と同じである。図２からわかるように，重複部分の面積は$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2}dx$の2倍である。

＜総評＞

文科といえど，東大入試の数学問題はやや骨がおれる。題意が簡明な第２問，第３問あたりから解答して落ち着きたい。４問中３問が理系の問題と同じかほぼ同じである。

第１問

図形と方程式に関する問題。およその図形を描いて，題意を把握し，解答方針を考える。点と直線の距離の公式を覚えていること。文科の問題としてはやや難しく，難易度はＡ－。

第２問

整数の問題で，組合わせと階乗の表式と計算が的確にできなければならない。題意は簡明で，思考の論理は容易であるので，難易度Ｃ。理系の第２問を容易にした問題。

第３問

理科の第４問とほぼ同様の3次方程式のグラフと解に関する問題。頻出される問題の一つ。難易度Ｂ。

第４問

理科の第３問を具体化して，容易にした問題。難易度Ｂ。

180930