2019（H31)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）　200点満点，150分

$\boxed{1}$　(40点)

次の各問に答よ。

問１　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$とする。$\cos\theta$は有理数ではないが，$\cos 2\theta$と$\cos 3\theta$がともに有理数となるようなθの値を求めよ。ただし，pが素数のとき，$\sqrt{p}$が有理数でないことは証明なしに用いてよい。

問２　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

<解答>

問１

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=a$とおく。$a$は有理数である。

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}=\dfrac{a+1}{2}$

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta=(4\cos^2\theta-3)\cos\theta$

$=(2a-1)\cos\theta$　①

$2a-1\fallingdotseq 0$とすれば，$\cos\theta=\dfrac{\cos 3\theta}{2a-1}$　②

しかるに$\cos 3\theta$は有理数だから，②は$\cos\theta$は有理数ではないことに矛盾

したがって，$2a-1=0$，すなわち$a=\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$だから，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

このとき$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$だから，$\cos\theta$は有理数ではなく，$\cos 3\theta=0$は有理数であり，①を満足する。

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　（答）

問２

(1)

部分積分法によれば，

$$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=x\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\tan x\,dx=x\tan x+\log|\cos x|+Const.$$

したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\Big[x\tan x+\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　（答）

ただし，$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{\sin x}{\cos x}+Const.=\tan x+Const.$

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+Const.$$

(2)

$\sin x=t$とおく。$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$だから，

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+Const.$$

$x=0\to t=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}\to t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$を考慮して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\log(1+\sqrt{2})$$　（答）

＜解説＞

問１

三角関数の加法定理などを自在に扱えること。

①は，有理数＝有理数×無理数であり，これを満たす有理数は0 のみであることに気づくこと。

$\cos3\theta=0$，$2\cos2\theta-1=0$を満たすθが解となる。

問２

三角関数を含む比較的簡明な関数の定積分の問題なので，ほぼ同じ問題を解いたことのある受験生が多かったのではないかと推測する。

(1)

まずは部分積分法を適用し，不定積分$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$，$\displaystyle\int\tan x\,dx$を求める問題に帰着させることがポイントである。これらの不定積分は教科書の練習問題等にも載っている基本的なものだから，一度は扱ったことがあるだろう。すらすら解きたいところだ。

(2)

変数変換法を利用して不定積分を求めることがポイントである。この問題も教科書に記載されているから，余裕をもって解きたいところだ。

$\boxed{2}$ (30点)

$f(x)=x^3+2x^2+2$とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

＜解答＞

$f'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$，$f(x)$は$x=0$，$-\dfrac{4}{3}$で極値をもち，図１のように変化し，$|f(x)|$のグラフは図２のようになる。

$f(-2)=2$，$f(-3)=-7<0$，したがって$n\geqq-2$のとき$f(n)>0$，$n\leqq-3$のとき$f(n)<0$

したがって，

$n\geqq-2$のとき

$|f(n)|=|n^3+2n^2+2|=n^3+2n^2+2$ ①

$n\leqq-3$のとき

$|f(n)|=|n^3+2n^2+2|=-(n^3+2n^2+2)$ ②

ⅰ) $n=2k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$のとき

①は$|f(n)|=n^3+2n^2+2=2(4k^3+4k^2+1)$ ③

②は$|f(n)|=-(n^3+2n^2+2)=-2(4k^3+4k^2+1)$ ④

③，④は偶数だから素数は2のみで，$k=0$，-1のとき$|f(n)|=2$

$k=0$すなわち$n=0$のとき，$|f(0+1)|=5$，素数だから $n=0$は該当する。

$k=-1$すなわち$n=-2$のとき，$|f(-2+1)|=|f(-1)|=3$，素数だから$n=-2$は該当する。

ⅱ) $n=2k+1$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$のとき

$n+1=2k+2$で偶数だから，

$n+1\geqq-2$に対して，①は$|f(n+1)|=(n+1)^3+2(n+1)^2+2=2(4k^3+16k^2+20k+9)$ ⑤

$k\geqq-2$だから，⑤が素数になるのは，$k=-1$で$|f(n+1)|=2$，$k=-2$で$|f(n+1)|=2$

$k=-1$すなわち$n=-1$のとき，$|f(-1)|=3$，素数だから$n=-1$は該当する。

$k=-2$すなわち$n=-3$のとき，$|f(-3)|=7$，素数だから$n=-3$は該当する。

$n+1\leqq-3$に対して，②は$|f(n+1)|=-\{(n+1)^3+2(n+1)^2+2\}=-2(4k^3+16k^2+20k+9)$ ⑥

$k\leqq-3$だから，⑥が素数になることはない。

以上によって，$|f(n)|$，$|f(n+1)|$がともに素数となる n は 0，-1，-2，-3 （答）

x		$-\frac{4}{3}$		0	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{86}{27}$	↘	2	↗

図１

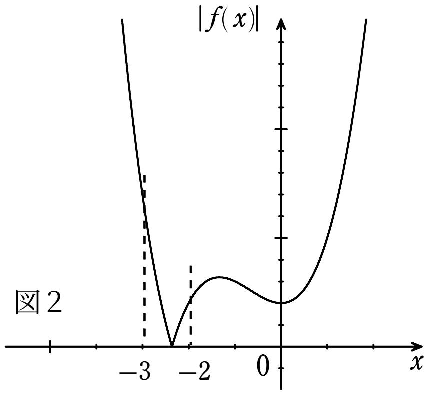

図２

<解説>

絶対値記号を取り外すためには，$f(x)$の変化を知る必要がある。その上で，素数の判定を容易に行うことが必要である。nの偶奇表現によって，対象整式の素数判定を行うことに気づきたい。

するとnが偶数のとき，$|f(n)|$は偶数となることがわかる。偶数の素数は2のみであるから，容易にnが求まる。そのとき，$|f(n+1)|$が素数になるかを確認すればよい。

nが奇数のとき，$n+1$が偶数になるので，$|f(n+1)|$が偶数となる。同様に，$|f(n+1)|$が素数2となるnを求め，$|f(n)|$が素数になるかを調べればよい。

解答例は，すっきりと説明したものだが，思考の流れとは異なるかも知れない。別解というほどではないが，もっと単純に考えてみよう。

$|f(n)|=|n^3+2n^2+2|$　①

$|f(n+1)|=|(n+1)^3+2(n+1)^2+2|=|n^3+5n^2+7n+5|$　②

ⅰ) $n\geqq -2$のとき

$|f(n)|=|n^3+2n^2+2|=n^3+2n^2+2$　③

$|f(n+1)|=|n^3+5n^2+7n+5|=n^3+5n^2+7n+5$　④

$n\geqq 1$のとき，

n が奇数のとき，④の各項は正の奇数だから，④は 4 以上の偶数となり素数ではない。

n が偶数のとき，③の各項は正の偶数だから，③は 4 以上の偶数となり素数ではない。

したがって，$n\geqq 1$では該当する n は存在しない。

$n=0$のとき，$|f(0)|=2$，$|f(0+1)|=5$，両者はともに素数，$\therefore\ n=0$ は該当する。

$n=-1$のとき，$|f(-1)|=3$，$|f(-1+1)|=2$，両者はともに素数，$\therefore\ n=-1$ は該当する。

$n=-2$のとき，$|f(-2)|=2$，$|f(-2+1)|=3$，両者はともに素数，$\therefore\ n=-2$ は該当する。

ⅱ) $n=-3$のとき，$|f(-3)|=7$，$|f(-3+1)|=2$，両者はともに素数，$\therefore\ n=-3$ は該当する。

ⅲ) $n\leqq -4$のとき

$|f(n)|=|n^3+2n^2+2|=-(n^3+2n^2+2)$

$|f(n+1)|=|n^3+5n^2+7n+5|=-(n^3+5n^2+7n+5)$

$k\geqq 4$の正の整数として，$n=-k$とおく。

$|f(n)|=-(n^3+2n^2+2)=|f(-k)|=k^3-2k^2-2$　⑤

$|f(n+1)|=-(n^3+5n^2+7n+5)=|f(-k+1)|=k^3-5k^2+7k-5$　⑥

k が奇数のとき，⑥は 4 以上の偶数だから素数ではない。

k が偶数のとき，⑤は 4 以上の偶数だから素数ではない。

したがって，$k\geqq 4$ すなわち $n\leqq -4$ のとき，①，② がともに素数となる n はない。

以上によって，①，②がともに素数となる n は 0，-1，-2，-3　（答）

$\boxed{3}$　(35点)

銳角三角形 ABC を考え，その面積を S とする。$0<t<1$ をみたす実数 t に対し，線分AC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を$t:1-t$ に内分する点をP とする。実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ。

＜解答＞

図１のようにxy座標面で三角形の頂点Ａ，Ｂ，ＣをＡ$(0,a)$，Ｂ$(-b,0)$，Ｃ$(c,0)$とする。
鋭角三角形だからa，b，cはすべて正となる。

点Ｑの座標はＱ$(tc,(1-t)a)$,

点Ｐの座標はＰ(x,y)において，$x=ct^2-b(1-t)$，$y=at(1-t)$

求める面積$S_P=\int_{-b}^{c}y(x)dx=\int_0^1 y(x(t))\left(\dfrac{dx}{dt}\right)dt=a\int_0^1 t(1-t)(2ct+b)dt$

ただし，$\dfrac{dx}{dt}=2ct+b$，$x=-b$のとき$t=0$，$x=c$のとき$t=1$

$t(1-t)(2ct+b)=-2ct^3+(2c-b)t^2+bt$

$$\int_0^1 t(1-t)(2ct+b)dt=\left[-\frac{c}{2}t^4+\frac{2c-b}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{c}{2}+\frac{2c-b}{3}+\frac{b}{2}$$

$$=\frac{-3c+4c-2b+3b}{6}=\frac{b+c}{6}$$

したがって，$S_P=\dfrac{a(b+c)}{6}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a(b+c)}{2}=\dfrac{1}{3}S$　（答）

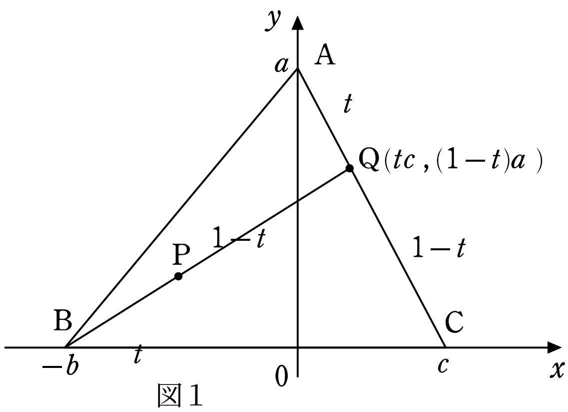

図１

＜解説＞

面積を求める積分問題だから，図１のように三角形をxy平面上に描いて考えることを着想したい。鋭角三角形だから，頂点Ａをy軸上にとって，頂点Ｂ，Ｃをx軸上にとると，頂点座標の表現が簡明になることにも気づきたい。

点Ｑ，Ｐの座標を与えられた条件と三角形の頂点Ａ，Ｂ，Ｃの座標によって求める。これは容易である。$t=0$から1の変化によって，点Ｑは頂点Ａから頂点Ｃへ直線ＡＣ上を移動し，点Ｐは頂点ＢからＣへ三角形の内部を動いていく。

点Ｐの描く曲線と，線分ＢＣによって囲まれる部分の面積は$y(x)\Delta x$を点Ｂから点Ｃまで加算すれば良いから，$\int_{-b}^{c}y(x)dx$となる。$y(x)dx$を$y(x(t))\left(\dfrac{dx}{dt}\right)dx$によって$x\to t$の変数変換を行い，積分を実行する。

この方法では，点Ｐの軌跡，すなわち曲線$y(x)$を求めることが困難である。逆にいえば，$y(x)$の具体的な関数式が解らなくても，変数変換によって面積積分ができることになる。

三角形の頂点の座標の取り方によって，被積分関数は変わってくる。

$\boxed{4}$ (30点)

１つのさいころをn 回続けて投げ，出た目を順に X_1, X_2，・・・，X_n とする。このとき次の条件をみたす確率をn を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1\leqq k\leqq n$ をみたすk のうち，$X_{k-1}\leqq 4$ かつ$X_k\geqq 5$ が成立するようなkの値はただ１つである。

＜解答＞

さいころを投げたとき，4 以下の目が出る事象をA，5 以上の目が出る事象をB とする。

両者は排反事象であり，事象Aの発生確率は $\dfrac{2}{3}$，事象B の発生確率は $\dfrac{1}{3}$

「$X_{k-1}\leqq 4$ かつ$X_k \geqq 5$ が成立するようなk の値はただ１つ」ということは，Aの後にBが出る場合は1回のみということである。したがって，条件を満足する事象は以下のような試行である。

$(k-1)$回の試行までA，$1\leqq k\leqq n$

k から $k+i-1$ までi 回の試行でB，$1\leqq i\leqq n-k+1$

$k+i$ からn までの $(n-k-i+1)$ 回の試行でA

このような事象の確率は $p(k,i)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{i}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-(k+i)+1}$

条件を満足する確率は $P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n-k+1}p(k,i)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left\{\sum_{i=1}^{n-k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-(k+i)+1}\right\}$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-(k+i)+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}$$

$$P=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}\right\}=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$$

$$=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(2^n-1)=(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$ （答）

＜解説＞

条件の意味するところを考えて，条件を満たす事象がどのようなものなのかを検討する。それが，具体的に把握できれば，その確率表現を考え記述すれば良い。

等比級数の計算が必要となるが，項の添字変数が錯綜するので，計算ミスに注意したい。

$\boxed{5}$ (30点)

半径 1 の球面上の 5点 A, B_1, B_2, B_3, B_4 は，正方形 B_1, B_2, B_3, B_4 を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3,B_4$ の体積の最大値を求めよ。

＜解答＞

図１に，題意に基づく半径１の球面上の点による四角錐を示す。

四角錐の体積は $V=\dfrac{1}{3}hS$

ここで，hは底面に対する頂点の高さで頂点から底面に下ろした垂線の長さ，Sは底面の面積

底面の正方形を与えたとき，体積最大となる四角錐は h が最大となるときだから，頂点 A から底面への垂線が球の中心 O を通り底面の正方形の中心 C を通るとき

図２に平面AB_1B_3を含む球の断面を示す。底面の正方形の対角線の長さを$2a$とする。

$V=\dfrac{1}{3}hS=\dfrac{1}{3}(1+x)(\sqrt{2}\,a)^2$

$h=1+x$，$x^2+a^2=1$,

したがって，$V=\dfrac{2}{3}(1+x)(1-x^2)=\dfrac{2}{3}(-x^3-x^2+x+1)=\dfrac{2}{3}f(x)$

$f(x)=-x^3-x^2+x+1$，$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$

$f(x)$は図３のように変化するから，$x=\dfrac{1}{3}$のとき，最大値$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$

したがって，Vの最大値$V_{max}=\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{64}{81}$　（答）

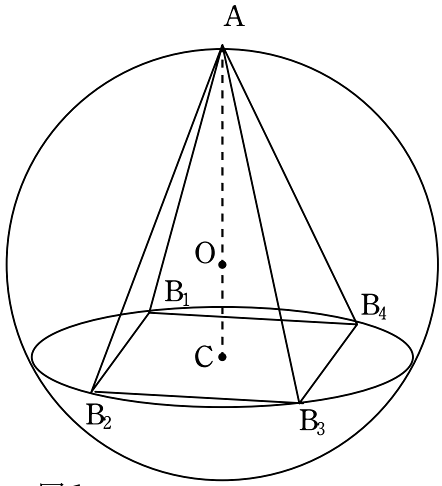

図１

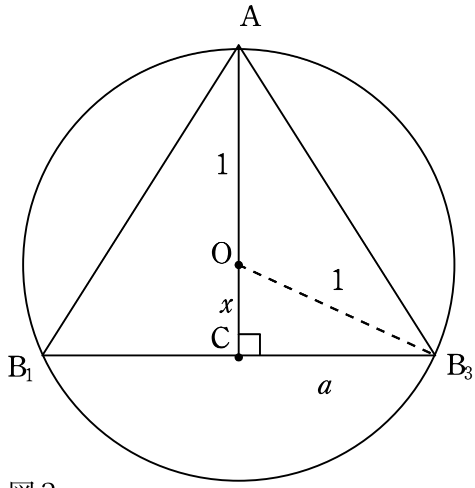

図２

x	-1		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

図３

＜解説＞

図１，図２のような図を大雑把に描いて，題意を的確に把握し，解答方針を考える。球面上の４点で作る正方形を与えたとき，四角錐の体積が最大となる頂点Aはどのような点であるかを考える。

当然，底面との距離が最長となる点が頂点Aの場合に四角錐の体積が最大となる。頂点から底面に下ろした垂線の長さが四角錐の高さになる。したがって底面に垂直な平面で球を切ったときの球の切断面の円が最大となるのは，正方形の対角線を含む断面で，正方形の中心 C（すなわち，正方形の外接円の中心）と球の中心 O を含む（図２）。

その円上の点で底面の対角線に下ろした垂線が最長となる点はOCの延長線と円との交点である。

$\boxed{6}$ (35点)

i は虚数単位とする。$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$ をみたす最小の正の整数 n を求めよ。

<解答>

ド・モアブルの定理によれば，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

ここで，$\theta=\frac{\pi}{4}$ とすれば，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(1+i)^n=\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

同様に，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n(1-i)^n=\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

したがって，$(1+i)^n+(1-i)^n=2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}>10^{10}$ ①

$\cos\frac{n\pi}{4}>0$となるのは，$\frac{n\pi}{4}=2k\pi$，$2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$2k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k=1,2,\cdots)$

すなわち，$n=8k$，$8k+1$，$8k-1$ のとき

i) $n=8k$ のとき

① は $2(\sqrt{2})^n=2(\sqrt{2})^{8k}=2(2)^{4k}=2^{4k+1}>10^{10}$ ②

②の両辺の常用対数をとると，$(4k+1)\log_{10}2>10$，$\therefore 4k+1>\frac{10}{\log_{10}2}=\frac{10}{0.301}>33.2$

$k>\frac{32.2}{4}=8.05$，これをみたす最小のk は$k=9$，したがって最小の n は $n=8k=72$

ii) $n=8k+1$ のとき

① は $(\sqrt{2})^{n+1}=(\sqrt{2})^{8k+2}=2^{4k+1}>10^{10}$

i)と同様に，最小のk は$k=9$だから，最小の n は $n=8k+1=73$

iii) $n=8k-1$ のとき

① は $(\sqrt{2})^{n+1}=(\sqrt{2})^{8k}=2^{4k}>10^{10}$

同様に，$4k>\frac{10}{\log_{10}2}\fallingdotseq\frac{10}{0.301}>33.2$，$\therefore k>\frac{33.2}{4}=8.3$，これをみたす最小の$k$ は$k=9$

したがって最小の n は $n=8k-1=71$

以上から，最小の正の整数は $n=71$ （答）

<解説>

与式から$\theta=\frac{\pi}{4}$の場合のド・モアブルの定理を閃きたい。この気づきがないとこの問題は扱えない。そして①を導く。次のポイントは$n=8k$，$8k+1$，$8k-1$ などと表現し，$2(\sqrt{2})^n=2^{4k+1}>10^{10}$などを導くこと。常用対数表が与えられているから，②からkの範囲を求めることは容易である。

もし常用対数表が与えられなかったらどうするか。$\log_{10}2=0.301$を覚えていれば，それを使う。覚えていない場合，下記のように考えることができる。

ｉ) $n=8k$ のとき

① は $2(\sqrt{2})^n=2(\sqrt{2})^{8k}=2(2)^{4k}=2^{4k+1}>10^{10}$ ②

$10^{10}=10\times10^9$

$2^3<10<2.2^3=(2\times1.1)^3=2^3\times1.1^3$ ③

$10^9=(10^3)^3<(1024)^3=(2^{10})^3=2^{30}$ ④

③，④から$10^{10}<2^3\times1.1^3\times2^{30}<2\times2^{33}=2^{34}$

一方$2^{33}=(2^{11})^3=(2.048\times10^3)^3=(2.048)^3\times10^9<10^{10}$

すなわち　$2^{33}<10^{10}<2^{34}$ ⑤

$4k+1=33$では②から$2^{33}>10^{10}$，⑤と矛盾する。$4k+1\geqq34$ならば⑤と矛盾しない。

したがって，$k\geqq\dfrac{33}{4}$，これを満たす最小のkは$k=9$，したがって$n=8k=72$

ⅱ) $n=8k+1$ のとき

① は $(\sqrt{2})^{n+1}=(\sqrt{2})^{8k+2}=2^{4k+1}>10^{10}$

ｉ)と同様に，最小のkは$k=9$だから，$n=8k+1=73$

ⅲ) $n=8k-1$ のとき

① は $(\sqrt{2})^{n+1}=(\sqrt{2})^{8k}=2^{4k}>10^{10}$ ⑥

$4k\geqq34$ならば⑥から$2^{34}>10^{10}$，⑤と矛盾しない。

したがって，$k\geqq\dfrac{34}{4}$，これを満たす最小のkは$k=9$，したがって$n=8k-1=71$

以上から，最小の正の整数は $n=71$　（答）

＜理系総評＞

例年通り，一定のレベル以上の問題が揃っているが，昨年に比べると，容易化した印象である。逆に昨年が難しかったことを踏まえて，難易を考慮したのかも知れない。

$\boxed{1}$

三角関数の加法定理等を活用して，関数値の有理数，無理数等を判断する問題と三角関数の定積分の問題。題意の簡明な基本的な問題であり，難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

3次関数の絶対値で表現される整数の素数判定の問題。難しい計算や着想を必要とするわけではない。場合分けを的確に行い，正答したい。標準レベルの問題で，難易度はＢ。

$\boxed{3}$

図形を関数によって扱い，変数の変化による点の軌道と辺との間の面積を求める問題。三角形を扱い易いように座標面上で定義し，面積積分を簡明に実行したい。標準レベルの問題で，難易度はＢ。

$\boxed{4}$

確率の問題によくあるように，解答方針に戸惑う受験生が多かったのではないか。条件を満たす事象がどのようなものかを検討し，それをスムーズに導くことができれば，正答の半ばに達したといえよう。計算は難しいものではないが，級数の項の添字変数が錯綜するので，計算ミスに注意したい。難易度はＡ－。

$\boxed{5}$

空間図形の問題。題意は簡明だから，解答方針の検討に時間を要することもない。最大値を与える条件を求めることがポイントだが，それも考え易い。例年，空間図形の問題は難しく，昨年も難しかった。今年は容易化されたので，空間図形が苦手な受験生には幸いであった。難易度はＢ。

$\boxed{6}$

複素数の問題。解答には少々閃きや着想が必要である。煩雑な計算を必要とするわけではないが，場合分けして検討するなど丁寧な取り扱いが必要なので，難易度はＢ＋。

200121

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$ (30点)

次の各問に答えよ。

問１　a は実数とする。x に関する整式 $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を整式 x^3+x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする。$R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ。

問２　8.94^{18} の整数部分は何桁か。また最高位からの 2 桁の数字を求めよ。例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す。

＜解答＞

問１

$x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2=(x^3+x^2+x+1)Q(x)+R(x)$　①

$Q(x)=x^2+x+q$，$R(x)=rx+1$とおける。

$(x^3+x^2+x+1)Q(x)+R(x)=(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+q)+rx+1$

$=x^5+2x^4+(q+2)x^3+(q+2)x^2+(q+r+1)x+(q+1)$　②

①の左辺と②の右辺を比較して，xの各次数の係数が等しいことから，

$a=q+2$，$3=q+2$，$3=q+r+1$，$2=q+1$

$\therefore$ $q=1$，$r=1$，したがって $a=3$　（答）

したがって $Q(x)=x^2+x+1$，$R(x)=x+1$　（答）

問２

$x=8.94^{18}$とおく。

$\log x=\log_{10}8.94^{18}=18\log_{10}8.94=18\times0.9513=17.1234$

$x=10^{17.1234}=10^{17}\times10^{0.1234}$

常用対数表から$1.32=10^{0.1206}$，$1.33=10^{0.1239}$，$1.34=10^{0.1271}$だから，$1.32<10^{0.1234}<1.34$

したがって$1.32\times10^{17}<x<1.34\times10^{17}$，

したがって 8.94^{18} の整数部分は18桁，最高位からの 2 桁は13　（答）

＜解説＞

問１

①の視察により，$Q(x)$は2 次の整式であり，2 次と1 次の係数は1であることがわかる。

問２

$x=10^{17.1234}=10^{17}\times10^{0.1234}$を導くことがポイントである。

常用対数表の意味と利用の仕方には慣れておくこと。

$\boxed{2}$ (30点)

a は実数とし，b は正の定数とする。x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ。
さらに，aの値が変化するとき，aの値を横軸に，m の値を縦軸にとってm のグラフをかけ。

＜解答＞

ｉ) $x\geqq0$のとき

$f(x)=x^2+2(ax+bx)=(x+a+b)^2-(a+b)^2$

$-(a+b)\geqq0$すなわち$a\leqq-b$であれば，$f(-a-b)=-(a+b)^2$ が最小値

$-(a+b)<0$すなわち$a>-b$であれば，$f(0)=0$が最小値

ii）$x<0$のとき

$f(x)=x^2+2(ax-bx)=(x+a-b)^2-(a-b)^2$

$-(a-b)\leqq0$すなわち$a\geqq b$であれば，$f(-a+b)=-(a-b)^2$ が最小値

$-(a-b)>0$すなわち$a<b$であれば，$f(0)=0$が最小値

以上をまとめると

$a\leqq-b$のとき，$m=-(a+b)^2$

$-b<a<b$のとき，$m=0$

$b\leqq a$のとき，$m=-(a-b)^2$

図１がaの値を横軸にしたmのグラフである。

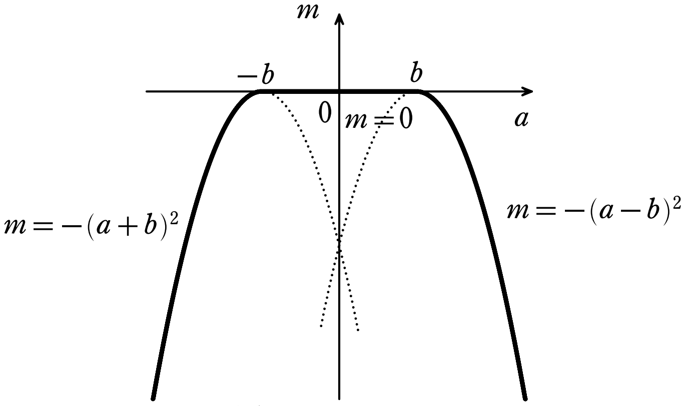

図１

＜解説＞

$|x|$の絶対値記号を外すために，xの正負に分けて考える。2 次式の最小値問題だから，極値を与えるxの値によって，最小値が異なることに注意する。

$\boxed{3}$ (30点)

a，b，c は実数とする。次の命題が成立するための，a と c がみたすべき必要十分条件を求めよ。さらに，この (a, c) の範囲を図示せよ。

命題：すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたす。

＜解答＞

$ax^2+bx+c<0$　①

i) $a=0$のとき

①は $bx+c<0$，$b \neq 0$であれば，$x<-\dfrac{c}{b}$なる実数x がb，c の値に関わらず必ず存在する。

$b=0$であれば，$c<0$でなければならない。

したがって，$a=0$ のとき $c<0$

$c<0$であれば，すべての実数 b に対して $bx+c<0$ となる x が存在

したがって $a=0$，$c<0$ は必要十分条件である。

ii) $a \neq 0$のとき

$a>0$のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ。

解の判別式$D=b^2-4ac>0$だから，$ac<\dfrac{b^2}{4}$，b^2の最小値は0だから，$ac<0$，$\therefore\ c<0$

$c<0$であれば，すべての実数 b に対して ① をみたすx が存在する。

したがって$a>0$，$c<0$ は①をみたすための必要十分条件

$a<0$のとき，十分大きなx は b，c の値にかかわらず①をみたす。

bの値にかかわらず①をみたす x が存在するとする。

①から，$c<-(ax^2+bx)$　②，$a<0$だから $x\to\pm\infty$において②の右辺は ∞となり，

c は任意の実数をとりえる。したがって，$a<0$ は ①の必要十分条件

以上によって，必要十分条件 (a, c) は $(a \geqq 0,\ c<0)$，または $a<0$

図１の打点部で，境界線をを含まない。

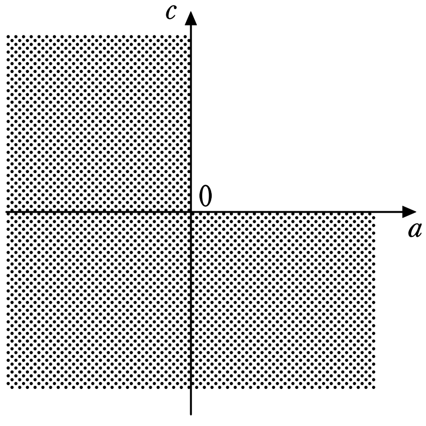

図１

＜解説＞

容易な問題のようだが，存外難しい問題だと思う。

すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたすとすれば，$*(a, c)$である。

$*(a, c)$ はすべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたすための必要条件

$*(a,\ c)$ であれば，すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたす。
このとき，$*(a,\ c)$ はすべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式 $ax^2+bx+c<0$ をみたすための必要十分条件である。

上記のことをみたす $*(a,\ c)$ を求める問題だが，解答方針には着想がいる。$a=0$ の場合は与式は1次方程式，$a\fallingdotseq 0$ の場合は 2 次方程式だから，両者に分けて考えるのが良さそうだと着想しよう。
$a\fallingdotseq 0$ の場合は，aの正負に分けて考えると具体的な条件を考えやすい。

$\boxed{4}$ (30点)

１つのさいころをn 回続けて投げ，出た目を順に $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ とする。このとき次の条件をみたす確率をn を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1\leqq k\leqq n$ をみたすk のうち，$X_{k-1}\leqq 4$ かつ$X_k\geqq 5$ が成立するようなkの値はただ１つである。

理系の問題 $\boxed{4}$ に同じ。

$\boxed{5}$ (30点)

半径 1 の球面上の 5点 A, B_1, B_2, B_3, B_4 は，正方形 B_1, B_2, B_3, B_4 を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3,B_4$ の体積の最大値を求めよ。

理系の問題 $\boxed{5}$ に同じ。

＜文系総評＞

理系と同様に、今年はやや易化したように思える。ただ，東大と比較して，文系に対する数学の比重が高く，問題も難しいように感じる。

	東大 理科	文科	京大 理系	文系
問題数	6	4	6	5
時間	150分	100分	150分	120分
配点	120点	80点	200点	150点

$\boxed{1}$

問１は整式の係数を求める問題。難易度はC。
問２は指数で表現された数の10進数表現での桁数と上位2桁の数を求める問題で，常用対数表を利用する。難易度はB－。

$\boxed{2}$

絶対値記号を含み，パラメータ変数が係数の2次関数の最小値問題。場合分けを的確に行うことが必要である。難易度はB。

$\boxed{3}$

2次関数の値が負になりえる場合における係数の必要十分条件を求める問題。必要条件，十分条件，2次関数の値など，基本的な理解と論理が問われるので，やや難しい。難易度はＢ＋。

$\boxed{4}$

確率の問題で，理系の問題としても難しい。難易度はA。

$\boxed{5}$

例年よりは易しい空間図形の問題である。文系の問題としては，Ｂ＋。

200121