平成 31 年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で 5 ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（選抜方法A）及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部（選抜方法B，C）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 座標空間において，1 辺の長さが 1 の立方体 OABC − DEFG をなす 8 つの頂点 O(0,0,0)，A(1,0,0)，B(1,1,0)，C(0,1,0) および D(0,0,1)，E(1,0,1)，F(1,1,1)，G(0,1,1) をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 P$(s,0,1)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$，辺 CB 上に点 Q$(t,1,0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ をとり，3 点 O，P，Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ および s，t で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s，t で表せ。また，U を s，t で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき，U の最大値，最小値を求めよ。またそのときの s，t の値を求めよ。

2

多項式 $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ について，次の問いに答えよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1) $Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項，t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。

(2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3) 方程式 $P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。

3 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta = \angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB，BC，CD，DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p，q および θ で表せ。

(3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2) で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

4 半径がそれぞれ a，b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m，n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表せ。

(1) a，b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a，b を用いて表せ。

(2) a，b を正の有理数とし，$a = \dfrac{p}{q}$，$b = \dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p，q は互いに素な自然数とし，s，t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p，q，s，t を用いて表せ。

(3) a，b は互いに素な自然数とする。$k = 1, 2, \cdots, a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

5 a は $-2 < a < 2$ をみたす定数とし， 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + a \sin x \cos x}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて，$f(x)$ を t と a を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) $a = -1$ と $a = 1$ の場合に，$u = \sin x - \cos x$ とおいて，置換積分法により定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ を求めよ。