

平成 31 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で5ページある。(落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。) 別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された2箇所必ず記入すること。
- 5 受験学部、学科、選抜方法により解答すべき問題(○印)、解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受験学部(学科, 選抜方法)	解答すべき問題(○印)					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(選抜方法A)及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部(選抜方法B, C)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4枚	90分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

多分、 \mathbb{R}^n 上の連続関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が、 \mathbb{R}^n のある領域 Ω 上で $\Delta f = 0$ となることを示す。このとき、 f は Ω 上の調和関数である。また、 \mathbb{R}^n の任意の領域 Ω 上で $\Delta f = 0$ となる連続関数 f は、 \mathbb{R}^n 上の調和関数である。

$\Delta f = 0$ を満たす関数 f は、 \mathbb{R}^n の任意の領域 Ω 上で $\Delta f = 0$ を満たす。

この性質は、 \mathbb{R}^n の任意の領域 Ω 上で $\Delta f = 0$ を満たす関数 f は、 \mathbb{R}^n の調和関数である。

この性質は、 \mathbb{R}^n の任意の領域 Ω 上で $\Delta f = 0$ を満たす関数 f は、 \mathbb{R}^n の調和関数である。

1

座標空間において、1 辺の長さが 1 の立方体 $OABC - DEFG$ をなす 8 つの頂点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$ および $D(0,0,1)$, $E(1,0,1)$, $F(1,1,1)$, $G(0,1,1)$ をとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 $P(s,0,1)$ ($0 \leq s \leq 1$), 辺 CB 上に点 $Q(t,1,0)$ ($0 \leq t \leq 1$) をとり, 3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 $OPRQ$ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OR} を \vec{a} , \vec{c} , \vec{d} および s, t で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を s, t で表せ。また, U を s, t で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき, U の最大値, 最小値を求めよ。またそのときの s, t の値を求めよ。

2

多項式 $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

- (1) $Q(t) = P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項、 t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。
- (2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが、 $(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。
- (3) 方程式 $P(x) = 0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。

\mathbb{R}^n の部分空間 W を考える。このとき、 W の基底 $\{w_1, \dots, w_r\}$ をとると、 W の任意のベクトル w は、 $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$ と表すことができる。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は \mathbb{R} の任意の実数である。

$$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r \quad (1)$$

基底 $\{w_1, \dots, w_r\}$ の各ベクトル w_i は、 W の基底である。したがって、 W の任意のベクトル w は、 $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$ と表すことができる。

W の基底 $\{w_1, \dots, w_r\}$ をとると、 W の任意のベクトル w は、 $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$ と表すことができる。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は \mathbb{R} の任意の実数である。

3

平行四辺形 ABCD において、辺 AB の長さを p 、辺 BC の長さを q とし、 $\theta = \angle BAD$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし、最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。
- (2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき、円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。 S を p, q および θ で表せ。
- (3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2) で求めた S に対して $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

4

半径がそれぞれ a, b の円を C_a, C_b とする。 C_a 上に点 A , C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ、 C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで、点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし、必要があれば、自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表せ。

- (1) a, b を自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 a, b を用いて表せ。
- (2) a, b を正の有理数とし、 $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし、 s, t も互いに素な自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 p, q, s, t を用いて表せ。
- (3) a, b は互いに素な自然数とする。 $k = 1, 2, \dots, a$ に対して、 C_b が k 周期回転したとき、点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{A_1, A_2, \dots, A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

設 (x, y) 為圓 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

$$\frac{y - 2x + 5}{x^2 + y^2 + 1} = 1 \text{ 或}$$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

設 (x, y) 為圓 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

設 (x, y) 為圓 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

設 (x, y) 為圓 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任一點，則

$$\text{某函數 } f(x, y) = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx = \frac{1}{3} x^3 + y^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + y^2$$

5

a は $-2 < a < 2$ をみたす定数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + a \sin x \cos x}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおいて、 $f(x)$ を t と a を用いて表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) $a = -1$ と $a = 1$ の場合に、 $u = \sin x - \cos x$ とおいて、置換積

分法により定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

