2019（H31）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$ 座標空間において，１辺の長さが1の立方体 OABC−DEFG をなす８つの頂点O (0, 0, 0), A (1, 0, 0)，B (1, 1, 0)，C (0, 1, 0) およびD (0, 0, 1)，E (1, 0, 1)，F (1, 1, 1)，G (0, 1, 1) をとる。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 P $(s, 0, 1)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$，辺 CB上 に点Q $(t, 1, 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$をとり，3点 O，P，Q を含む平面と直線 GF との交点をRとする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答よ。

(1) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ および s，t で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ を s，t で表せ。また，U を s，t で表せ。

(3) 点Rが辺GF上にあるとき，Uの最大値，最小値を求めよ。またそのときの s，t の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$\overrightarrow{OP}=(s, 0, 1)=(s, 0, 0)+(0, 0, 1)=s(1, 0, 0)+\vec{d}=s\vec{a}+\vec{d}$　（答）

$\overrightarrow{OQ}=(t, 1, 0)=(t, 0, 0)+(0, 1, 0)=t(1, 0, 0)+\vec{c}=t\vec{a}+\vec{c}$　（答）

点Rの座標を$(r, 1, 1)$とする。u_P，u_Qを実数とすれば，

O，P，Q，R が同一平面上にあることから，$\overrightarrow{OR}=u_P\overrightarrow{OP}+u_Q\overrightarrow{OQ}$とおける。

$\overrightarrow{OR}=(r, 1, 1)=r(1, 0, 0)+(0, 1, 0)+(0, 0, 1)=r\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$

$\quad=u_P\overrightarrow{OP}+u_Q\overrightarrow{OQ}=(u_Ps+u_Qt)\vec{a}+u_P\vec{d}+u_Q\vec{c}$

$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は互いに直交するベクトルだから，各ベクトルの係数を比較して，

$u_P=u_Q=1$，$r=s+t$ となり，$\overrightarrow{OR}=(s+t)\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$　（答）

(2)

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(s\vec{a}+\vec{d})\cdot(t\vec{a}+\vec{c})=st\vec{a}\cdot\vec{a}+s\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{d}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{c}=st+0+0+0=st$　（答）

$U=2\times$(△POQの面積) $=\sqrt{s^2+t^2+1}$　①　（答）

ただし，

$$\triangle\mathrm{POQ}の面積=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sin\angle POQ=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\cos^2\angle POQ}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(s^2+1)(t^2+1)-s^2t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+t^2+1}$$

ベクトルの内積の定義から，$\cos\angle POQ=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$

(3)

点Rの座標は $(s+t, 1, 1)$だから，Rが辺GF上にあるということは，$0\leqq s+t\leqq 1$

したがって，$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq s+t \leqq 1$　②

②の条件下で①の最大値，最小値を求める。sとtは②の条件下で独立に選べるから，

s^2+t^2の最小値は明らかに$(s, t)=(0, 0)$のときに0，すなわち$U=\sqrt{s^2+t^2+1} \geqq 1$

$0 \leqq t \leqq 1-s$だから，

$s^2+t^2 \leqq s^2+(1-s)^2=2s^2-2s+1=2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$0 \leqq s \leqq 1$において，$\frac{1}{2} \leqq 2s^2-2s+1 \leqq 1$だから，$\frac{1}{2} \leqq s^2+t^2 \leqq 1$

したがって，$U=\sqrt{s^2+t^2+1} \leqq \sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，このとき$(s, t)=(1, 0)$または$(0, 1)$

したがって，Uの最大値は$\sqrt{2}$で，このとき$(s, t)=(1, 0)$または$(0, 1)$　（答）

最小値は 1で，このとき$(s, t)=(0, 0)$　（答）

＜解説＞

図１のような概略図を描いて考える（ここでは，ソフトを使って描いたのでほぼ正確な図だが，図を大雑把に手書きする訓練をしておくことが図形問題では大事である）。

(1)

ここで与えられた$\vec{a}=(1, 0, 0)$，$\vec{c}=(0, 1, 0)$，$\vec{d}=(0, 0, 1)$は座標軸に関する基本ベクトルである。したがって，任意のベクトル$(x, y, z)=x\vec{a}+y\vec{c}+z\vec{d}$と表されることは，理解しておこう。基本ベクトルの表現は$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$であったり，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$であったり，いろいろだから，惑わされないようにしよう。

ベクトルの和による表現を考える。原点と点を結ぶベクトルは，点の座標そのものがベクトル表現になることに注意する。

例えば，$\overrightarrow{OA}$ ＝点Aの座標－原点の座標 $=(1, 0, 0)-(0, 0, 0)=(1, 0, 0)=$ Aの座標

「O，P，Q，R が同一平面上にある」$\Leftrightarrow$「$\overrightarrow{OR}=u_P\overrightarrow{OP}+u_Q\overrightarrow{OQ}$」のような命題は多用されるから的確に理解しておこう。

(2)

$\triangle$POQの面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$ の表現は覚えておく。

(3)

ここでは，sとtは独立に選べることに注意しよう。

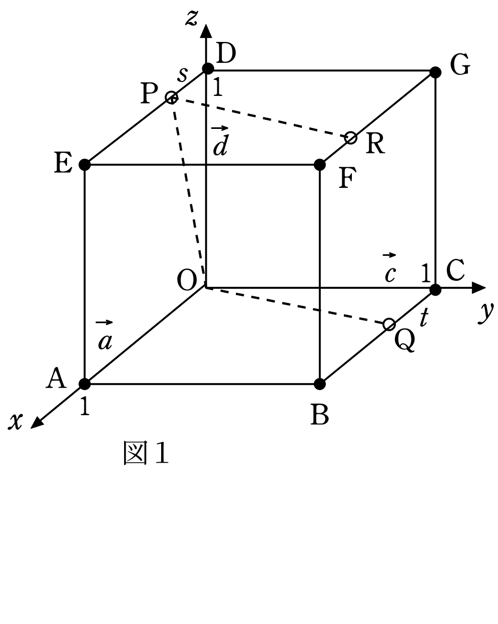

図１

$\boxed{2}$　多項式 $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$について，次の問いに答えよ。

ただし，nは2以上の整数とする。

(1) $Q(t)=P(t+1)$とおく。多項式 $Q(t)$の定数項，t の係数およびt^2 の係数は0であることを示せ。

(2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3) 方程式 $P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。

＜解答＞

(1)

$$Q(t)=P(t+1)=(t+1)^{2n}-n(t+1)^{n+1}+n(t+1)^{n-1}-1$$

二項定理によって，

$$(t+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k1^{2n-k}t^k,\ (t+1)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}C_k1^{n+1-k}t^k,\ (t+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k1^{n-1-k}t^k$$

定数項は ${}_{2n}C_0-n\cdot{}_{n+1}C_0+n\cdot{}_{n-1}C_0-1=1-n+n-1=0$

t の係数は ${}_{2n}C_1-n\cdot{}_{n+1}C_1+n\cdot{}_{n-1}C_1=2n-n(n+1)+n(n-1)=0$

t^2 の係数は ${}_{2n}C_2-n\cdot{}_{n+1}C_2+n\cdot{}_{n-1}C_2=n(2n-1)-\dfrac{1}{2}n^2(n+1)+\dfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)=0$

(2)

多項式$Q(t)$のt^3 の係数は

$${}_{2n}C_3-n\cdot{}_{n+1}C_3+n\cdot{}_{n-1}C_3=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n-2)-\frac{1}{2\cdot3}n^2(n^2-1)+\frac{1}{2\cdot3}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\neq0$$

定数項，tの係数，t^2の係数は0だから，多項式$Q(t)$はt^3で割り切れる。しかし，t^4では割り切れない。

$x=t+1$とおけば，$P(x)=P(t+1)=Q(t)$

したがって，$Q(t)$がt^3で割り切れるので，$(x-1)^3=t^3$だから，$Q(t)=P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れる。

$Q(t)$がt^4で割り切れないので，$P(x)$は$(x-1)^4$で割り切れない。

(3)

$$P(-1)=(-1)^{2n}-n(-1)^{n+1}+n(-1)^{n-1}-1=1-n(-1)^{n-1}\{(-1)^2-1\}-1=0$$

したがって，$x=-1$も$P(x)=0$の解

mを整数とし，$P(m)=m^{2n}-nm^{n+1}+nm^{n-1}-1=0$とすれば

$m^{2n}-nm^{n+1}+nm^{n-1}=m(m^{2n-1}-nm^n+nm^{n-2})=1$

mと$(m^{2n-1}-nm^n+nm^{n-2})$は，いずれも整数だから，$m=1$ または-1 以外ありえない。

$m=1$のとき，$m^{2n-1}-nm^n+nm^{n-2}=1-n+n=1$

$m=-1$のとき，$m^{2n-1}-nm^n+nm^{n-2}=-1-n(-1)^{n-2}\{(-1)^2-1\}=-1$

確かに，$m=\pm1$であれば，$m(m^{2n-1}-nm^n+nm^{n-2})=1$ が成り立つ。

以上によって，方程式 $P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみである

<解説>

(1)

別解を示す。

$Q(t)$の定数項は$Q(0)$，t の係数は$Q'(0)$，t^2 の係数は$\dfrac{1}{2}Q''(0)$

$Q(0)=1-n+n-1=0$

$Q'(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}=\dfrac{dP(t+1)}{dt}=\dfrac{dP(x)}{dx}\dfrac{dx}{dt}=P'(x)=2nx^{2n-1}-n(n+1)x^n+n(n-1)x^{n-2}$，$x=t+1$

$Q'(0)=P'(1)=2n-n(n+1)+n(n-1)=0$

$Q''(t)=P''(x)=2n(2n-1)x^{2n-2}-n^2(n+1)x^{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$Q''(0)=P''(1)=2n(2n-1)-n^2(n+1)+n(n-1)(n-2)=0$

上記のことは一般的には下記による。

多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$とすれば，$f(0)=a_0$

$f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$，$\therefore f'(0)=a_1$

$f''(x)=a_nn(n-1)x^{n-2}+a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+3\cdot 2a_3x+2a_2$，$\therefore f''(0)=2a_2$，$a_2=\dfrac{f''(0)}{2}$

一般に，$a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

(2)

多項式 $Q(t)$ が t^3 で割り切れるということは，t^2 以下の次数の項がないということ。t^4 で割り切れないということは， t^3 の項が存在するということ。これらのことを示せば良い。t^2 以下の次数の項がないということは，(1)で示した。

(3)

ここでは，ちょっとした着眼が必要である。$m^{2n}-nm^{n+1}+nm^{n-1}-1=0$が成立する整数$m$の条件を求める問題に対して，$m^{2n}-nm^{n+1}+nm^{n-1}=1$と変形して考えるという着眼である。整数問題では，このような見方の変換が重要な場合が多い。

(1)，(2)で$P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れるが，$(x-1)^4$では割り切れないという問題を扱ったので，(3)では，これを利用して解答するのかと考えると，迷路に入り込む。前問が必ずしも後問の直接的な誘導になっていない場合もあるので，要注意である。

$\boxed{3}$ 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さをp，辺 BCの長さをqとし，$\theta=\angle$BADとおく。ただし$p>q$とする。平行四辺形 ABCD の内部の点P と4本の直線AB，BC，CD，DAとの距離のうちで最小のものを r とする。点P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときのr の最大値をR とし，最大値 R を与える点 P の軌跡をL とする。

次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD 内にLを図示せよ。

(2) 半径R の円の中心がL 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積をSとする。
Sをp，q，およびθで表せ。

(3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めたS に対して $\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S}{T}$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１を参照する。

点Pと4本の直線AB，BC，CD，DAとの距離の最小値が最大になるのは，点P が辺AD の中点とBCの中点を結ぶ直線の線上，または辺ABの中点とDCの中点を結ぶ直線の線上にあるとき。

直線ADとBCの間隔は$p\sin\theta$，直線ABとDCの間隔は$q\sin\theta$，

$p>q$だから，rが最大値をとるのは，点Pが直線MN上を動くときで，最大値は$R=\dfrac{1}{2}q\sin\theta$

ただし，Mは辺ADの中点，Nは辺BCの中点である。

半径Rの円の中心PがMNの中点OからM方向へ移動すると，円周が辺ADに接する。その時のPの位置をP_1とすれば，PがP_1よりMに近づくと，Pと直線ADの距離がRより短くなるから，Rは最小のrにはならない。したがって，Rが最小のrの最大値であるのは，PがOP_1上にあるときである。

同様に，PがOからN方向へ移動すると，円周が辺BCに接する。その時のPの位置をP_2とすれば，PがP_2よりNに近づくと，Pと直線BCの距離がRより短くなる。したがってRが最小のrの最大値であるのは，PがOP_2上にあるときである。

以上によって，r の最大値 R を与える点 P の軌跡L は図１に示す太線P_1P_2である。

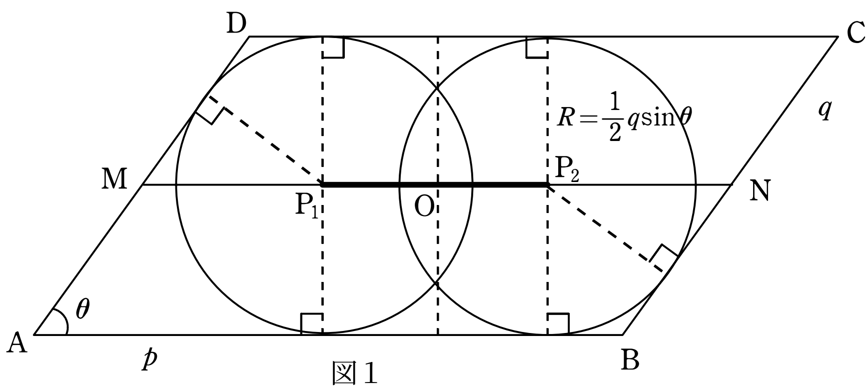

図１

(2)

図１において，$MP_1\sin\theta=R=\dfrac{1}{2}q\sin\theta$，$\therefore\ MP_1=\dfrac{1}{2}q$，同様に$NP_2=\dfrac{1}{2}q$

したがって，$P_1P_2=MN-MP_1-NP_2=p-\dfrac{1}{2}q-\dfrac{1}{2}q=p-q$

$S=P_1P_2\times q\sin\theta+\pi R^2=q(p-q)\sin\theta+\dfrac{1}{4}\pi q^2\sin^2\theta$　（答）

(3)

平行四辺形の面積 $T=AB\times BC\sin\theta=pq\sin\theta$

$\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S}{T}=\lim_{\theta\to+0}\left(\dfrac{p-q}{p}+\dfrac{\pi q\sin\theta}{4p}\right)=\dfrac{p-q}{p}$　（答）

＜解説＞

(1)

当然，図１のような略図を描いて考える。Pから4辺へ垂線を下ろして，その距離の最小値はどのような場合かを考える。最小の距離rが存在することは明らかである。この最小のrが最大となるのは，と考える。すると，rの上限がおぼろげに見えてくる。Pから辺AB，CDへの垂線上を点Pを移動させると，垂線の中点において，rが最大となることに気づく。つまり，Pから辺AB，CDへの距離が等しくなったとき，rが最大となり，Pが垂線の中点からずれたとき，一方の距離が垂線の長さの半分より小さくなる。

すると，rが最大となる点Pは直線ABとCDの中線（両線に平行で距離が等しい線）上か，直線ADとBCの中線上にある。ここでは$AB=p>q=BC$だから，直線ADとBCの中線上の点PとAD，BCの距離は最小の距離rにはなりえない。必ず，Pと直線ABまたはCDとの距離の方が短いからである。

したがって，rが最大となるRを与える点Pは直線ABとCDの中線上にある。さらに図１のように半径Rの円を描いて，Rを与える点Pの範囲を考察する。すると，Rを与える点Pの動く範囲に限界があることがわかる。半径Rの円が直線ADまたはBCに接触したり交わるようになると，点Pと直線ADまたはBCの距離が最小となり，直線ABおよびCDとの距離が最小の距離rではなくなるからである。

以上のような考察のもとに，図１を描いてみれば，点Pの軌跡Lを明示することができる。明示の要件としては，Lが中線MN上にあること，半径Rの円が記載され，点P_1，P_2が明らかになっていることであろう。

(2)

(1)を図とともに正答できれば，問題なかろう。

(3)

(2)で求めたSが正しければ問題なかろう。

4 半径がそれぞれ a，b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点A，C_b 上に点 B をとる。はじめに2点A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上にくるときを C_b の回転の１周期とする。次の問いに答よ。ただし，必要があれば，自然数 m，n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表せ。

(1) a，b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a，b を用いて表せ。

(2) a，b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$とおく。ここでp，q は互いに素な自然数とし，s，t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p，q，s，t を用いて表せ。

(3) a，b は互いに素な自然数とする。$k=1, 2, \cdots, a$ に対して，C_b がk 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点をA_kとする。このとき $\{A_1, A_2, \cdots, A_a\}$ は C_a をちょうどa 等分することを示せ。

＜解答＞

(1)

C_b が回転して点Bが点Aに再び重なったとき，C_b が k 回転し C_a を l 回転したとすることができる。すると $2\pi b\times k=2\pi a\times l$，$\therefore\ bk=al$，$k$，$l$ は自然数で互いに素である。

$b=j_b\,\mathrm{gcd}(a,b)$，$a=j_a\,\mathrm{gcd}(a,b)$ とおけば，$j_b\,k=j_a\,l$,

ここで j_b と j_a は互いに素だから，$k=j_a$，$l=j_b$

以上から，C_b が回転した周期は $k=j_a=\dfrac{a}{gcd\,(a,b)}$ （答）

(2)

(1)と同様に，C_b が回転して点Bが点Aに再び重なったとき，C_b が k 回転し C_a を l 回転したとすることができる。すると $2\pi b\times k=2\pi a\times l$ であり，k，l は自然数で互いに素である。

$bk=al$，$\dfrac{s}{t}k=\dfrac{p}{q}l$，$\therefore\ k(qs)=l(pt)$,

(1)において，$b=qs$，$a=pt$ とすれば，(1)と同様に扱えて，$k=\dfrac{pt}{gcd\,(pt,qs)}$，

p，q は互いに素，s，t も互いに素だから $\mathrm{gcd}(pt,qs)=\mathrm{gcd}(p,s)\mathrm{gcd}(q,t)$

したがって C_b が回転した周期は $k=\dfrac{pt}{gcd\,(p,s)\,gcd\,(q,t)}$ （答）

(3)

$\overset{\frown}{AA_k}$ は円 C_a 上の点Aと $\mathrm{A_k}$ 間の弧長とする。

$\overset{\frown}{AA_k}=2\pi b\times k=\dfrac{2\pi a}{a}\times b\times k$，（$k=1,2,\cdots,a$）

$\dfrac{2\pi a}{a}$ は円 C_a の円周長を a 等分した長さであり，$\overset{\frown}{AA_k}$ は $\dfrac{2\pi a}{a}$ の bk 倍だから，$\mathrm{A_k}$ はAを起点として円周を a 等分した点の一つ。

$k=i$，$k=j$，$j>i$ のとき，$\overset{\frown}{A_iA_j}=\dfrac{2\pi a}{a}\times b\times j-\dfrac{2\pi a}{a}\times b\times i=\dfrac{2\pi a}{a}\times b(j-i)>0$

$\dfrac{\overset{\frown}{A_iA_j}}{2\pi a}=\dfrac{b}{a}(j-i)$ は自然数ではない。なぜなら，a と b は互いに素であり，$0<j-i<a$ であるから。

したがって，$\mathrm{A_i}$ と $\mathrm{A_j}$ は同じ点になることはない。

以上によって，$\{\mathrm{A_1},\mathrm{A_2},\cdots,\mathrm{A_a}\}$ は C_a をちょうど a 等分する。

＜解説＞

(1)

C_b 上の点Bが点Aで C_a に接していて，C_a 上を転がりながら進み，再び点Bが C_a に接したとき，C_b は1回転したのだから，C_a 上を進んだ距離は C_b の円周長の $2\pi b$。C_b が k 回転して，初めて再び点Aに接したとき，C_b は C_a を l 回転する。k，l ともに自然数であり，互いに素である。なぜなら，C_b が回転してBが C_a に接するごとに C_b は1回転しているから。そして，Bが再びAに接したとき，C_b は C_a を1以上の整数回だけ回ったことになる。

k，l が互いに素ではないとすれば，AとBは初めて接することにならない。

j_aとj_bは互いに素，kとlが互いに素だから，$j_b k = j_a l$，$\dfrac{j_b}{j_a}=\dfrac{l}{k}$であれば，$k=j_a$，$l=j_b$であることに気づくこと。ここで，「$a$，$b$を用いて表せ」には$\mathrm{gcd}(a, b)$も含まれることに気づくこと。

(2)

(1)は，(a，b)が自然数の場合である。ここでは(a，b)が有理数となった場合である。したがって，まずは同様に考えていけば良い。すると，$k=\dfrac{pt}{gcd\,(pt, qs)}$と求まるが，このままでは減点の可能性がある。さらに，以下のことが閃くようでありたい。

$p=j_p\mathrm{gcd}(p, s)$，$t=j_t\mathrm{gcd}(q, t)$，$q=j_q\mathrm{gcd}(q, t)$，$s=j_s\mathrm{gcd}(p, s)$とおけば

j_p，j_q，j_s，j_tは互いに素な自然数であり，

$pt=j_p\mathrm{gcd}(p, s)j_t\mathrm{gcd}(q, t)=j_pj_t\mathrm{gcd}(p, s)\mathrm{gcd}(q, t)$

$qs=j_q\mathrm{gcd}(q, t)j_s\mathrm{gcd}(p, s)=j_qj_s\mathrm{gcd}(p, s)\mathrm{gcd}(q, t)$

したがって，$\mathrm{gcd}(pt,\ qs)=\mathrm{gcd}(p, s)\mathrm{gcd}(q, t)$

(3)

$\widehat{AA_k}=2\pi b\times k=\dfrac{2\pi a}{a}\times b\times k$を閃き，点$\mathrm{A_k}$が円周を$a$等分する点の一つ，ということを表現したい。その上で，異なるkに対応する$\mathrm{A_k}$が同じ点になることはないことを示せば良い。

$\boxed{5}$　aは$-2<a<2$をみたす定数とし，関数$f(x)$を

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin x+\cos x$とおいて，$f(x)$をtとaを用いて表せ。また，tのとりうる値の範囲を求めよ。。

(2) $f(x)$の最大値，最小値を求めよ。

(3) $a=-1$と$a=1$の場合に，$u=\sin x-\cos x$とおいて，置換積分法により定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$を求めよ。

<解答>

(1)

$$t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x,\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}=\frac{t}{1+a\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)}=\frac{2t}{2+a(t^2-1)}\qquad \text{（答）}$$

$t=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$だから，

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

また，$2+a(t^2-1)\neq 0$，$\therefore\ t^2\neq\dfrac{a-2}{a}$，しかし$2<a<2$，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$では$t^2\neq\dfrac{a-2}{a}$である。

以上から，t のとりうる値の範囲は$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$　（答）

(2)

$f(x)=g(t)=\dfrac{2t}{2+a(t^2-1)}$とおく。

$$g'(t)=\frac{-2(at^2+a-2)}{\{2+a(t^2-1)\}^2}=\frac{-2a}{\{2+a(t^2-1)\}^2}\left(t^2-\frac{2-a}{a}\right)$$

ｉ）$-2<a<0$のとき

$\dfrac{2-a}{a}<0$だから，$g'(t)>0$，したがって$g(t)$は単調増加

最大値は$g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a}$，最小値は$g(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a}$

ⅱ）$a=0$のとき

$g(t)=t$，最大値は$\sqrt{2}$，最小値は$-\sqrt{2}$，これはｉ）で$a=0$とした場合と同じ。

ⅲ）$0<a<2$のとき

$t=\pm\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$のとき，$g'(t)=0$

$0<\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\leqq\sqrt{2}$のためには，$\dfrac{2}{3}\leqq a<2$，このとき$-\sqrt{2}\leqq-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}<0$

したがって$\dfrac{2}{3}\leqq a<2$のとき，$g(t)$は図１のような変化をする。

$g(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a}$，$g\left(-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)=-\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}}$

$g\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}}$，$g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a}$

したがって最大値は$\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}}$，最小値は$-\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}}$

$0<a<\dfrac{2}{3}$のとき，$\sqrt{2}<\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$，$-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}<-\sqrt{2}$だから，

$g'(t)>0$，したがって$g(t)$は単調増加

以上をまとめると，

$$\left.\begin{array}{l} -2<a<\dfrac{2}{3}\text{のとき，最大値は}g(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a}\text{，最小値は}g(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{2+a} \\ \dfrac{2}{3}\leqq a<2\text{のとき，最大値は}\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}}\text{，最小値は}-\sqrt{\dfrac{1}{a(2-a)}} \end{array}\right\}$$　（答）

t	$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$		$\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	図１	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3)

$u=\sin x-\cos x$, $du=(\cos x+\sin x)dx$, $u^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$

$$\int f(x)dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}dx=\int\frac{1}{1+a\left(\frac{1-u^2}{2}\right)}du=2\int\frac{1}{2+a(1-u^2)}du$$

$a=-1$のとき

$$\int f(x)dx=2\int\frac{1}{1+u^2}du$$

$u=\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$とおくと，$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$\dfrac{1}{1+u^2}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}=\cos^2\theta$

したがって，$\dfrac{1}{1+u^2}du=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}\dfrac{du}{d\theta}d\theta=d\theta$

$\displaystyle\int f(x)dx=2\int\frac{1}{1+u^2}du=2\int d\theta=2\theta$，ただし積分定数は省略。

積分範囲については，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2}\ \rightarrow\ u=-1,\ 1\ \rightarrow\ \theta=-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}$

したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=4\int_0^1\frac{1}{1+u^2}du=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\pi$　（答）

$a=1$のとき

$$\int f(x)dx=2\int\frac{1}{3-u^2}du=2\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}+u}+\frac{1}{\sqrt{3}-u}\right)du$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\log|\sqrt{3}+u|+\log|\sqrt{3}-u|)$，ただし積分定数は省略。

したがって，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=2\int_{-1}^{1}\frac{1}{3-u^2}du=4\int_0^1\frac{1}{3-u^2}du$$
$$=4\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}+u}-\frac{1}{u-\sqrt{3}}\right)du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\log|\sqrt{3}+u|-\log|u-\sqrt{3}|\Big]_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$$　（答）

＜解説＞

(1)

$f(x)$の分母が0にならないことから，$t^2\fallingdotseq\dfrac{a-2}{a}$の条件が付されるが，$2<a<2$，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$においては，$t^2=\dfrac{a-2}{a}$になることはない。

(2)

$f(x)=g(t)$の導関数を利用して，最大値，最小値を求める常套的方法を使う。ただし，aの値によっ

て，t のとりえる範囲で$g'(t)=0$となるかが異なることに注意しなければならない。

(3)

(1)，(2)ではtによって$f(x)$を表現したが，ここではuによって表現する。前問からの誘導と考えると，混乱する。tにuを関連付けて$f(x)$を表現したりしない。単純に，uによって$f(x)$を表現し，置換積分法を利用する。

不定積分の公式等は的確に理解し，利用できるようにしておくこと。

＜総評＞

新潟大学の問題は，高校数学の本質を捉えた，難易が極端に偏らない良問が多いと，毎年感じている。今年もその感があったのだが，例年に比して，やや難易度が上がったように思う。$\boxed{3}$，$\boxed{4}$については，特にその感がある。易から難ということで，１，２，５，４，３の順序で取り組みたいと思った。

$\boxed{1}$

空間ベクトルに関する基本的な問題。難解ではないが，ベクトルの的確な理解が必要である。標準的なレベルよりやや易しいので難易度でＢ－。

$\boxed{2}$

多項式の扱いと係数を求める問題で，整数の問題でもある。解答方針には着眼，着想が必要なので，やや難しいところがある。難易度はＢ＋。

$\boxed{3}$

題意を的確に把握することが困難な問題である。「最小のrの最大値Rを与える点Pの軌跡」という文章で，点Pがいかなる点であるかを図形上で描くことが求められる。平行四辺形ABCD内部の点Pと各辺との距離で最小の距離は確かに存在する。それをrとする。Pが動けば，当然rも変化する。変化するrの中で最大値が存在するという。

確かにPが平行四辺形の中にあるのだから，ある長さを超えることはないから，最大値は存在するに違いない。そのような最大値をRとして，Rを与えるPの位置を求めよ，という問題である。当然，略図を描いて考える。

かくして題意を的確に把握して，Rを与えるPとは，と思考を進めねばならない。そのようなPについて閃きがあれば，計算等は難しくないから，スムーズに進むであろう。しかし，題意の把握やRを与えるPの位置について，方向違いの思考が続くと，時間だけが無為に進みそうである。正答率がどのくらいか知りたい問題だ。私の予想では15%以下ではないか。したがって難易度はＡ－。

$\boxed{4}$

整数問題であるが，図形の振る舞いと関連付けているので，その振る舞いを的確に理解して，整数問題に置き換えないとならない。その意味で，単に数学というだけでなく，その前提としての問題文の把握力と変換力が問われるという点で，工夫された面白い問題だと思う。難しい計算や論理が要求されるわけではないが，数式が示す概念を的確に理解し，表現し，説明する数学力が必要である。難易度はＢ＋。

$\boxed{5}$

三角関数によって表現される関数の微分，積分に関する問題。パラメーターの値によって，取り扱いが変わるので，やや錯綜するので，粘り強く取り組みたい。置換積分の活用，不定積分の公式等は活用も含めて理解していなければならない。標準的なレベルの問題なので難易度はＢ。

＜人文，教育，経済，農，創生学部＞ (90分)

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 座標平面上で，不等式 $|y| \geqq |x|+x+1$ の表す領域を図示せよ。

(2) aを定数とし，$f(x)=|x-2|+(a+1)x-2$とする。関数$y=f(x)$のグラフがx軸とちょうど2点で交わるとする。そのとき，aの値の範囲を求め，不等式 $f(x) \leqq y \leqq 0$の表す領域の面積をaで表せ。

＜解答＞

(1)

$|y| \geqq |x|+x+1$ ①

$x \geqq 0$のとき，$|y| \geqq x+x+1=2x+1$，$\therefore\ y \geqq 2x+1$ ② または$y \leqq -2x-1$ ③

$x<0$のとき，$|y| \geqq -x+x+1=1$，$\therefore\ y \geqq 1$ ④ または $y \leqq -1$ ⑤

①の表す領域は②，③，④，⑤であって，図１の打点部で，境界線を含む。

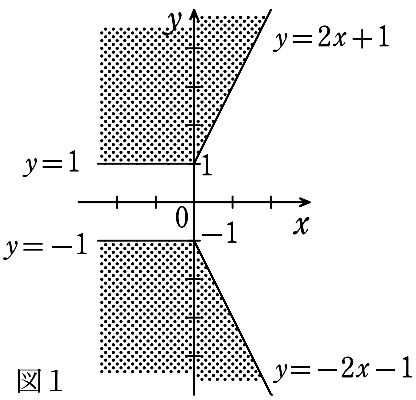

図１

(2)

$x \geqq 2$のとき，

$f(x)=x-2+(a+1)x-2=(a+2)x-4$，$x$軸と交わるためには$f(x)=0$とおいて，

$a \fallingdotseq -2$，$x=\dfrac{4}{a+2} \geqq 2$，$\therefore\ -2<a \leqq 0$，

$x<2$のとき，

$f(x)=2-x+(a+1)x-2=ax$，したがって$a \fallingdotseq 0$であれば，$x=0$でx軸と交わる。

以上によって，$f(x)$ がx軸とちょうど2点で交わるのは，$-2<a<0$ (答)

不等式 $f(x) \leqq y \leqq 0$の表す領域は図２の打点部の三角形で，境界線を含む。

その面積は $\dfrac{1}{2}\times(-2a)\times\dfrac{4}{a+2}=\dfrac{-4a}{a+2}$ (答)

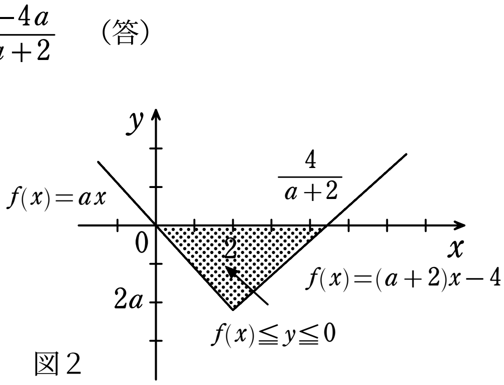

図２

＜解説＞

(1)

　絶対値記号を外すとき，x，yのどちらを先に外すと扱いやすいか。ここでは，どちらでも大きな違いはない。yの絶対値記号を先とすれば，

　$y \geqq 0$のとき，$y \geqq |x|+x+1$，$x \geqq 0$のとき$y \geqq 2x+1$，$x<0$のとき$y \geqq 1$

　$y<0$のとき，$y \leqq -|x|-x-1$，$x \geqq 0$のとき$y \leqq -2x-1$，$x<0$のとき$y \leqq -1$

(2)

　$x<2$のとき，$a=0$だと$f(x)=0$となりx軸に一致することに注意する。

$\boxed{2}$ 座標平面上に放物線C_1：$y=x^2$とC_2：$y=x^2+c^2$を考える。ただし，cは正の定数とする。C_1上の点(a, a^2)からC_2に接線l_1，l_2を引き，接点のx座標をそれぞれb_1，b_2 ($b_1<b_2$)とする。

　次の問いに答えよ。

(1) $a-b_1=b_2-a=c$ が成り立つことを示せ。

(2) C_2と接線l_1，l_2で囲まれた部分の面積をcで表せ。

＜解答＞

(1)

　C_2：$y=x^2+c^2$について，$y'=2x$だから，接線l_1，l_2の傾きはそれぞれ接線$2b_1$，$2b_2$

　また接点はそれぞれ$(b_1,\ {b_1}^2+c^2)$，$(b_2,\ {b_2}^2+c^2)$

　したがって，$2b_1=\dfrac{a^2-{b_1}^2-c^2}{a-b_1}$　①，$2b_2=\dfrac{a^2-{b_2}^2-c^2}{a-b_2}$　②

　①から，$(a-b_1)^2=c^2$，$a-b_1=\pm c$

　②から，$(a-b_2)^2=c^2$，$a-b_2=\pm c$

　$b_1<b_2$だから，$a-b_1>a-b_2$，$\therefore a-b_1=c$，$a-b_2=-c$，したがって$a-b_1=b_2-a=c$

(2)

　C_2と接線l_1，l_2で囲まれた部分は図１の打点部

　直線l_1は$y=2b_1(x-a)+a^2$，直線l_2は$y=2b_2(x-a)+a^2$

　その面積は$\displaystyle\int_{b_1}^{a}\left[(x^2+c^2)-\{2b_1(x-a)+a^2\}\right]dx+\int_{a}^{b_2}\left[(x^2+c^2)-\{2b_2(x-a)+a^2\}\right]dx$

　第一の積分の被積分項に$a=c+b_1$，第二の積分の被積分項に$a=b_2-c$を代入すれば

$$=\int_{b_1}^{a}(x-b_1)^2dx+\int_{a}^{b_2}(x-b_2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-b_1)^3\right]_{b_1}^{a}+\left[\frac{1}{3}(x-b_2)^3\right]_{a}^{b_2}$$

$$=\frac{1}{3}(a-b_1)^3-\frac{1}{3}(a-b_2)^3=\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{3}(-c)^3=\frac{2}{3}c^3$$　（答）

＜解説＞

(1)

(a, a^2) と $(b_1, b_1^2+c^2)$を結ぶ直線がl_1，(a, a^2) と $(b_2, b_2^2+c^2)$を結ぶ直線がl_2 となるのだから，2点を結ぶ直線の傾きが，接線の傾きに等しい。ここで，$a \fallingdotseq b_1$，b_2を自明のこととして扱っている。$a=b_1$，b_2であれば，b_1，$b_2 \to \infty$ということだから，題意に含まれない値と考える。

(2)

図１のような図を大雑把に描いて，的確に考える。このような面積を求める問題は，微分積分の応用として頻出だから，的確に対応したい。2次関数の積分だから，難しいことはない。ただ，項数が多いので計算ミスをしないことだ。そのためには，被積分関数をできるだけ簡単な表式にすること，定積分の範囲の定数を代入したとき，できるだけ簡単な表式になるようにすることだ。

ここでは，b_1，b_2 が1次の係数になっていて，答はcで表現するということだから，被積分関数からaを消去しようと試みたら，簡単な表式になることが解った。

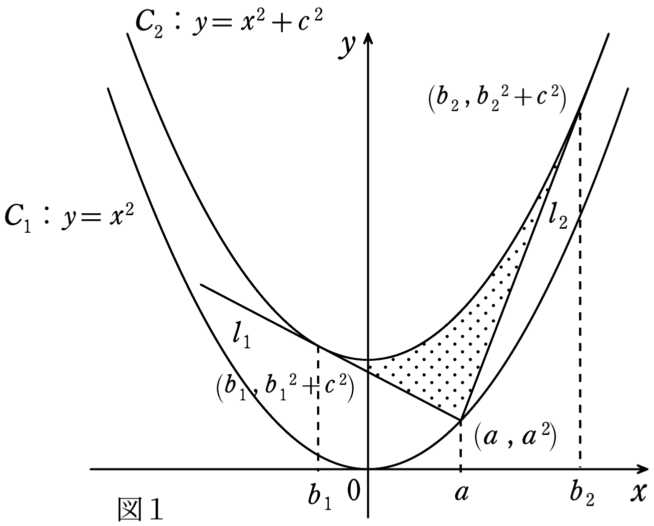

図１

$\boxed{3}$ 理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{4}$ 理系の $\boxed{2}$ に同じ。

＜総評＞

４問 90 分は文系の数学としては，なかなかの負担であろう。

文系用問題 $\boxed{1}$ は一次関数の不等式の取り扱いとグラフに関する問題。やや煩瑣になるが、落ち着いて取り扱えば，特段誤るところはなかろう。難易度はＢー。

文系問題 $\boxed{2}$ も微分，積分に関わる頻出問題だから，解答方針に困るということはないだろう。やや，計算が煩瑣になるので，落ち着いて取り組みたい。難易度はＢ。

190918