# 2019（H31)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

（物理，化学，生物，地学のうち２科目受験で150分）

$\boxed{1}$

＜解答＞

問（１）(a)

ばねの弾性力と小球に働く重力の棒方向成分とがつりあう。

$kd_0=mg\cos\theta$，$\therefore\ d_0=\dfrac{mg\cos\theta}{k}$　（答）

(b)

エネルギー保存の法則により，小球が得た運動エネルギーと失った位置エネルギーが等しい。

$\dfrac{1}{2}mV^2=mgh$，$\therefore\ V=\sqrt{2gh}$　（答）

(c)

運動量保存の法則により $mV=2mv_0$，$\therefore\ v_0=\dfrac{1}{2}V$　（答）

(d)

ばねの縮みが$d$のときの力学的エネルギーは，(a)から$mg\cos\theta=kd_0$なので，

$E=\dfrac{1}{2}\times(2m)v^2+\dfrac{1}{2}kd^2-2mgd\cos\theta=mv^2+\dfrac{1}{2}kd^2-2kd_0d$　（答）

(e)

ばねが最も縮んだときは$v=0$となるときだから，$E=\dfrac{1}{2}kd_1{}^2-2kd_0d_1$　①

$d=d_0$のとき，$E=mv_0{}^2+\dfrac{1}{2}kd_0{}^2-2kd_0{}^2=mv_0{}^2-\dfrac{3}{2}kd_0{}^2$　②

力学的エネルギー保存の法則から①と②は等しいから

$\dfrac{1}{2}kd_1{}^2-2kd_0d_1=mv_0{}^2-\dfrac{3}{2}kd_0{}^2$，$\therefore\ d_1{}^2-4d_0d_1-\dfrac{2mv_0{}^2}{k}+3d_0{}^2=(d_1-2d_0)^2-\dfrac{2mv_0{}^2}{k}-d_0{}^2=0$

したがって，$d_1=2d_0\pm\sqrt{\dfrac{2mv_0{}^2}{k}+d_0{}^2}$，

$d_1>d_0$だから，$d_1=2d_0+\sqrt{\dfrac{2mv_0{}^2}{k}+d_0{}^2}=d_0\left\{2+\sqrt{1+\dfrac{2mv_0{}^2}{kd_0{}^2}}\right\}$　（答）

問（２）(a)

棒に沿って小球に働く力は,

重力が棒方向下方に $mg\cos\theta$

ばねの弾性力が棒上方に $k(L-x)$

小球は円運動をしているので，慣性力（遠心力）が働く。その棒方向成分は上向きに $mr\omega^2\sin\theta$

回転の半径は$r=x\sin\theta$だから，$mr\omega^2\sin\theta=mx\omega^2\sin^2\theta$

したがって$F=k(L-x)+mx\omega^2\sin^2\theta-mg\cos\theta=(m\omega^2\sin^2\theta-k)x+kL-mg\cos\theta$　（答）

(b)

小球が$x=x_0$の位置で静止して見えたということは，(a)の$F$に$x=x_0$を代入したとき$F=0$となることだから，$(m\omega^2\sin^2\theta-k)x_0+kL-mg\cos\theta=0$，$\therefore\ x_0=\dfrac{kL-mg\cos\theta}{k-m\omega^2\sin^2\theta}$　（答）

(c)

$s=x-x_0$として，$x=s+x_0$を(a)の$F$に代入すると，

$F=(m\omega^2\sin^2\theta-k)(s+x_0)+kL-mg\cos\theta=(m\omega^2\sin^2\theta-k)s$

$(m\omega^2\sin^2\theta-k)<0$であれば，静止位置$x_0$からの変位$s$と逆方向の力$F$が復元力として働く。

$m\omega^2\sin^2\theta<k$，$\omega^2<\dfrac{k}{m\sin^2\theta}=\omega_0{}^2$，したがって$\omega_0=\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　（答）

(d)

小球Aの運動方程式は，$ma=F=-(k-m\omega^2\sin^2\theta)s=-k's$，$k'=(k-m\omega^2\sin^2\theta)$

$k'>0$のとき，小球の$x_0$からの変位$s$は単振動をする。

$s=S\sin\nu t$とすれば，$m\nu^2S\sin\nu t=k'S\sin\nu t$，$\nu=\sqrt{\dfrac{k'}{m}}$，

したがって単振動の周期$T=\dfrac{2\pi}{\nu}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k'}}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k-m\omega^2\sin^2\theta}}$　（答）

(e)

問題図４のように小球Aの運動の軌跡が１回閉じた曲線に見えることは，小球Aが回転中心軸OO’を回る周期と棒に沿って単振動をする周期とが一致することを意味する。

すなわち$\dfrac{2\pi}{\omega}=T=\dfrac{2\pi}{\nu}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k-m\omega^2\sin^2\theta}}$，$\therefore\ m\omega^2=k-m\omega^2\sin^2\theta$

したがって，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m(1+\sin^2\theta)}}$　（答）

＜解説＞

回転する円板上の棒に取り付けられたばねと小球の力と運動に関する問題。

問（１）(a)

小球に働く力のつりあいを考える。

(b)

小球Bの力学的エネルギー保存の法則を利用する。

(c)

小球AとBが一体となるので，非弾性衝突である。衝突前後で運動量は保存される。

(d)

ここで考えるべき力学的エネルギーは，小球A，Bの運動エネルギー，ばねの弾性エネルギー，小球A，Bの重力の位置エネルギーである。

(e)

最もばねが縮んだときの意味を理解しよう。そのとき，小球は静止したこと，すなわち小球の速さが0になったということを意味する。その後，小球は逆方向へ動き始める（戻り始める）。

問（2）(a)

円板とともに回転している人からみると，小球が回転していることは見えない。棒に沿って，小球が運動する状態が見える。ただし回転によって，小球に働く加速度の力と逆方向に慣性力が小球に見かけの力（円板とともに回転している人が観測する力）として作用する。それは遠心力である。

この重力，ばねの弾性力，遠心力を含めて考察する。

(b)

小球が動けるのは，棒に沿って上方か下方である。棒に沿って小球に働く力がつり合っているので，小球は静止して見える。

(c)，(d)

復元力とは大きさが変位に比例する逆方向に働く力である。元へ戻ろうとするので，単振動を引き起こす。$s=x-x_0$ とおいて式を整理することが良い。$x=x_0$ が小球が静止する位置であり，単振動の中心となる。$x=x_0$ からの変位 $s$ が振幅 $S$ の単振動をすると考え，運動方程式を立てる。

(e)

円板の外部で静止している人から見たとき，円錐状に棒が回転し，小球の回転も見える。同時に小球は棒に沿って単振動をしている。したがって，小球は棒に沿って動きながら，OO'軸の回りに回転していることになる。

問題図４のように小球の運動の軌跡が見えるということは，棒に沿った小球の1 往復と棒の1回転とがちょうど等しいということである。すなわち，小球の単振動の周期と回転の周期とが一致している。

$\boxed{2}$

＜解答＞

問（1）(a)

コイルの右辺は $vt$ まで磁場中に入るから，磁場中に入るコイルの面積は$avt$。

したがって，最初の正方形コイルを貫く磁束は $\phi=avtB$　（答）

(b)

誘導起電力の大きさはコイルが横切る磁束の時間変化に等しい。磁束の変化を妨げるような磁場を発生する向きとなる。

したがって，$E=-\dfrac{\varDelta\phi}{\varDelta t}=-avB$　（答）

(c)

$IR=E=-avB$，$\therefore\ I=-\dfrac{avB}{R}$　（答）

(d)

時刻$0<t<\dfrac{a}{v}$では(c)の電流$I$が流れる。$\dfrac{a}{v}\leqq t<2\dfrac{a}{v}$では，コイルが横切る磁束は減少するから，(c)の電流$I$が正方向に流れる。単位時間当たりに発生するジュール熱は消費電力だから，

$J=RI^2=\dfrac{(avB)^2}{R}$　（答）

(e)

外力$F$を働かせて速さ$v$でコイルが動くので，単位時間当たりにする仕事は$Fv$

エネルギー保存の法則により，この仕事は単位時間当たりに発生するジュール熱に等しい。

$F$の向きは$v$と同じだから，$Fv=\dfrac{(avB)^2}{R}$，$\therefore\ F=\dfrac{(aB)^2v}{R}$　（答）

問（2）(a)

はしごコイルは，$\theta=\theta_0$において$\theta=0$より，$h=L-L\cos\theta_0=L(1-\cos\theta_0)$だけ高い位置にある。

したがって，はしごコイルは$\theta=\theta_0$において$\theta=0$より，$Mgh=MgL(1-\cos\theta_0)$だけ高い位置エネルギーを有する。

エネルギー保存の法則により，この位置エネルギーがジュール熱の総量と等しいから，

$Q=MgL(1-\cos\theta_0)$　（答）

(b)

はしごコイルに働く力は重力が鉛直に$Mg$

磁石が$x$軸正方向に速さ$u$で運動すると，コイルに誘導電流が発生し，

コイルに$x$軸正方向の力$F_C$が作用，これは問(1)(e)で$v$を$u$に置き換えたものだから$F_C=\dfrac{(aB)^2u}{R}$

また，糸に垂直方向の力のつり合いから，$Mg\sin\theta_1=F_C\cos\theta_1$，$\therefore\ \tan\theta_1=\dfrac{F_C}{Mg}$

したがって，はしごコイルの変位は$X_1=L\sin\theta_1\fallingdotseq L\tan\theta_1=L\dfrac{F_C}{Mg}=\dfrac{(aB)^2uL}{MgR}$　（答）

(c)

磁石の速さを$u$から$\dfrac{u}{4}$にすると，コイルに働く力$F_C$が$\dfrac{1}{4}$になり，重力とのつり合いの位置は$\dfrac{X_1}{4}$になる。したがって，はしごコイルは$X=\dfrac{X_1}{4}$を中心とし，振幅$\dfrac{3X_1}{4}$の単振動　（振り子運動）を始める。しかし誘導電流がコイルの抵抗を流れ，ジュール熱が発生し，(a)のように徐々に振幅が小さくなって，振動がつり合いの位置$X=\dfrac{X_1}{4}$で止まり，はしごコイルは静止する。

これを表す適切なグラフは（え）　（答）

＜解説＞

問（1）(a)，(b)

コイルが一定の速さで均一な磁場の中に入っていく。コイルが囲む正方形領域に含まれる磁束は一定の速さで増加する。コイルを貫く磁束の時間変化が誘導起電力である。

(c)

起電力によって流れる電流はオームの法則によって定まる。

(d)

抵抗によって消費される電力がジュール熱となる。

(e)

(d)の結果を利用する。ジュール熱が発生するということは，エネルギー保存の法則からして，仕事

がされていなければならない。力$F$を働かせて速さ$v$を一定に保つということだから，単位時間当たり，$Fv$の仕事をする，と直ちに気づきたい。すると(d)で単位時間当たりに発生するジュール熱を求めた結果を利用できると気づくだろう。

コイルに流れる電流$I$に磁場が作用して，力がコイルに働く。これがコイルを減速するので，一定の速さ$v$を保つためにはこの力とは逆方向に等しい力$F$を働かせる必要があるということである。

長さ$a$，速さ$v$，電流$I$（負の向き）のコイル右辺に磁束密度$B$が及ぼす力は，$x$軸負方向に$aBI$。コイル左辺が磁場中を動くときは，電流は正の向きになるから，磁場が及ぼす力は同じく$x$軸負方向に$aBI$。

したがって$v$を一定に保つためには，$x$軸正方向に$F=aBI=aB\times\dfrac{avB}{R}=\dfrac{(aB)^2v}{R}$を加える。

エネルギー保存の法則から求めた上記の解答と一致する。

問（2）(a)

はしごコイルが磁場中を振動する際に誘導電流が流れ，コイルの抵抗にジュール熱が発生する。この過程でエネルギー保存の法則が成立する。もともと，磁場がなければ，はしごコイルは振動をずっと繰り返す（摩擦などがないとして）。しかし磁場があると，誘導電流がコイルに流れ，抵抗からジュール熱が発生して消費される。はしごコイルが初期に有していた重力による位置エネルギーがジュール熱となって消費されることになる。

(b)

問題図５を見ると，はしごコイルは$x$軸正方向へ振れている。磁石が正方向へ移動すると，はしごコイルには正方向に力が働くということである。図１を参照しながら考える。(a)のように磁場がコイル左辺を横切るとき，コイルに含まれる磁束は増加するので，減少させるような電流，すなわち正方向の電流が流れ，コイルには$x$軸正方向の力が加わる。

(b)のように，磁場がコイル右辺を横切るとき，コイルに含まれる磁束は減少するので，増加させるような電流，すなわち負方向の電流が流れ，コイルには$x$軸正方向の力が加わる。いずれにしても，磁石が$x$軸正方向へ動くとコイルには正方向の力が働く。

設問が「磁石を$x$軸正方向に速さ$u$で動かすと，コイルはどのような運動をするか」，であると難しい。ここでは，コイルが角度$\theta_1$振れて静止しているのだから，容易となる。$\theta_1$ははしごコイルに働く重力と電磁力$F_C$の合力の方向である。

コイルに働く電磁力は問(1)(e)を利用して求めたが，$F_C=IaB=\dfrac{auB}{R}\times aB=\dfrac{(aB)^2u}{R}$である。

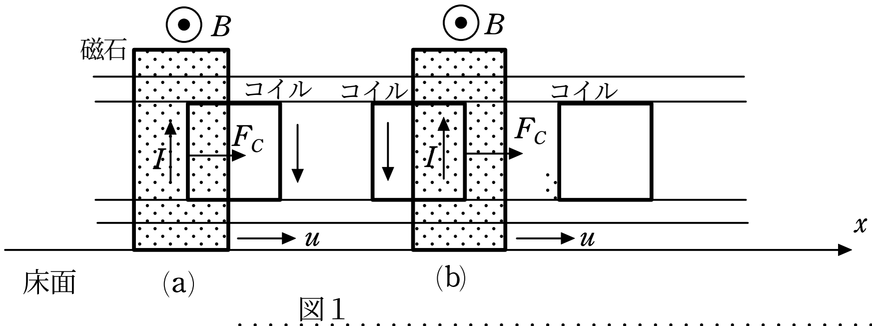


図１

(c)

(a)，(c)を踏まえて考察する。$u \to \frac{1}{4}u$で，つり合いの位置が$\frac{1}{4}X_1$になる。$X_1-\frac{1}{4}X_1=\frac{3}{4}X_1$を振幅とし，$\frac{1}{4}X_1$を中心とする単振動を始める。しかし，(a)をヒントとすると，徐々に振動の振幅が小さくなって静止するはずである。ジュール熱によってエネルギーが失われるためである。静止する位置はつり合いの重力と電磁力$\frac{1}{4}F_c$の合力の方向，すなわち$\frac{1}{4}X_1$の方向である。問題図６を参照すると，はしごコイルの振動の振幅が小さくなりながら，その位置が$\frac{1}{4}X_1$に静止するグラフは（え）である。

## 3

<解答>

問（１）(a)

気体の内部エネルギーは $U=\frac{3}{2}RT$　（答）

(b)

気体の状態方程式は$P_0LS=RT$，$\therefore\ P_0=\dfrac{RT}{LS}$　（答）

(c)

ばねがピストンを押す力と気体がピストンを押す圧力がつり合っているから，

$K_0\varDelta x=P_0S=\dfrac{RT}{L}$，$\therefore\ \varDelta x=\dfrac{RT}{K_0L}$　（答）

(d)

この過程で左右の空間の圧力は等しくなるので，ばねは自然長になり，ばねの弾性エネルギーは0になる。エネルギー保存の法則により，弾性エネルギーは気体の内部エネルギーの増加となる。

ばねの弾性エネルギーは$\frac{1}{2}K_0(\varDelta x)^2$

気体の内部エネルギーの増加は$\frac{3}{2}RT'-\frac{3}{2}RT$

$\frac{1}{2}K_0(\varDelta x)^2=\frac{3}{2}RT'-\frac{3}{2}RT$，したがって $T'=T+\dfrac{K_0}{3R}(\varDelta x)^2$　（答）

問（２）(a)

ゆっくりとした断熱変化によって$P_1(LS)^\gamma=P_1'\left(\frac{2}{3}LS\right)^\gamma$，$\therefore\ P_1'=\left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1$　（答）

(b)

空間Cの気体において，加熱前の状態方程式は $P_1LS=RT_1$

加熱後の状態方程式は $\frac{2}{3}P_1'LS=RT_2$

したがって，$\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{2P_1'}{3P_1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\gamma-1}$，$\therefore\ T_2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\gamma-1}T_1$　（答）

(c)

空間Aの気体において，加熱前の状態方程式は $P_1LS=RT_1$

加熱後の状態方程式は，圧力は$P_1'$だから，$\frac{3}{2}P_1'LS=RT_3$

$\frac{T_3}{T_1}=\frac{3P_1'}{2P_1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma+1}$，$\therefore\ T_3=\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma+1}T_1$ （答）

(d)

ばねの自然長を$L_0$とする

ばねの弾性力と気体がピストンを押す力とがつり合っているから，

加熱前は $K_1(L_0-L)=P_1S$ ①

加熱後のばねの長さは$3L-\left(\frac{3}{2}L+\frac{2}{3}L\right)=\frac{5}{6}L$

したがって加熱後のつり合いは $K_1\left(L_0-\frac{5}{6}L\right)=P_1'S=P_1\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}S$ ②

②−①により，$\frac{1}{6}K_1L=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}-1\right\}P_1S=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}-1\right\}\frac{RT_1}{LS}S=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}-1\right\}\frac{RT_1}{L}$

$\therefore\ K_1=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}-1\right\}\frac{RT_1}{L^2}$ （答）

(e)

加熱前のばねの弾性エネルギーは $\frac{1}{2}K_1(L_0-L)^2$

加熱後のばねの弾性エネルギーは $\frac{1}{2}K_1\left(L_0-\frac{5}{6}L\right)^2$

(d)の①，②，$\frac{1}{6}K_1L=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}-1\right\}P_1S$を利用して，

$$\Delta E=\frac{1}{2}K_1\left(L_0-\frac{5}{6}L\right)^2-\frac{1}{2}K_1(L_0-L)^2=\frac{1}{2K_1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{2\gamma}(P_1S)^2-(P_1S)^2\right\}=\frac{1}{2K_1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{2\gamma}-1\right\}(P_1S)^2$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}+1\right\}P_1LS=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}+1\right\}RT_1\quad（答）$$

＜解説＞

気体の状態変化とばねの弾性力を組み合わせた問題である。

問 (1) (a)，(b)

単原子分子の理想気体の内部エネルギーの表式を覚えていなければならない。この表式を得るに至る分子の熱運動について理解しておく。気体の状態方程式についても同様である。

(c)

気体がピストンを押す力は，（気体の圧力×作用する面積）である。圧力は面積当たりに働く力であることを忘れない。

(d)

栓を開けると，左の空間に閉じ込められていた気体が右の真空の空間に流れ込み，左右の空間の気体の圧力が同じになる。「十分に時間が経つ」という意味は，気体の圧力が同じになるまでの時間と

いうことである。
　気体が断熱的に膨張する過程と考え，状態方程式から求めようと考えると，誤る。ばねがピストンを押し，気体が栓の孔から押し出されるので，断熱過程ではない。気体は仕事をされるのである。その仕事は，ばねの弾性エネルギーから提供され，エネルギー保存の法則により，気体の内部エネルギーの増加となる。

問(2)(a)

　ゆっくりとした断熱変化ということで (圧力)×(体積)$^{\gamma}$＝一定 の関係をそのまま用いる。

(b)

　(a)の結果と気体の状態方程式を利用する。

(c)

　(b)と同様の考え方でよい。

(d)

　加熱前に，ばねが縮んでいることを忘れてはならない。ばねの弾性力と気体の圧力がピストンを押す力とがつり合っている。

(e)

　「加熱前後のばねの弾性エネルギーの変化量という」文言から，加熱前はばねが縮んでいた，ということに気づくだろう。うっかり，ばねの自然長は$L$と思い込まないように。
　問題図２の状態では，３つの空間A，B，C において，空間A からもC からも同じ圧力をかけられて，ばねは縮んでいる。

＜総評＞

　力と運動，電磁気，気体と力学の３分野からの出題。受験生の物理知識と思考力を評価する良い問題だと思う。もちろん，仮想的な実験系に対して、問題を設定しているので，このような仮想系を実施できるかという疑問は常につきまとう。しかし，入試問題として工夫をしていることは率直に評価したい。

$\boxed{1}$

　回転する円板上の棒に沿ってばねに取り付けた小球に働く力と運動の問題。円板が回転しているとき，円板上で観測すると慣性力が働くことがポイントである。円板上で観測するとき，小球には重力，ばねの弾性力，遠心力（慣性力）が働くとして考察する。誘導的に設問が設定されているから，前後の問題との関わりに注意する。煩瑣な問題設定ではないので，難易度はB。

$\boxed{2}$

　磁場中を運動するコイルに発生する起電力，電流，電磁力に関する問題。問(1)では，正方形コイルが幅が正方形の辺と等しい磁場中を等速で動くときの，誘導起電力，電流，電磁力を求める。(e)で等速でコイルを動かすために必要なコイルへの外力を求めるためには，着想が必要である。(d)で求めた単位時間当たりに発生するジュール熱とコイルに働く外力が単位時間当たりにする仕事とが対応することに気づくと速い。エネルギー保存の法則である。
　問(2)では，コイルを糸で吊り下げて磁場内で振り子振動をさせるとどうなるかを考える。次に磁石を定速で動かす場合を考察する。コイルの右辺が磁場を横切る場合と左辺が磁場を横切る場合とがある。電流の方向が逆になるが，コイルに働く力の方向は同じである。(c)では振り子振動の振幅が徐々

に小さくなることに気づくこと。(a)がヒントになっている。難易度Ｂ＋。

$\boxed{3}$

気体の状態変化とばねの弾性力を組み合わせた問題である。問 (1)では，気体の分子運動に基づく気体の状態とばねの弾性力，弾性エネルギーについての基本知識と思考力を問う。

問(2)では加熱による気体の状態変化と断熱変化とを，ばねの弾性力を介して組み合わせた問題を扱う。加熱前にばねが縮んでいることを忘れると，うっかりミスとなる。問 (1)同様，設問は誘導的に構成されているので，前後の問題の関係性から解答のヒントを得よう。難易度はＢ。

200429