2019 (H31) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部･医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻･検査技術科学専攻）

･歯学部･薬学部･工学部･農学部　　試験時間 150分

$\boxed{1}$　xy 平面における曲線 $y=\sin x$ の２つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

＜解答＞

２つの接線の接点の x 座標を x_1 , x_2 とする。

$y'=\cos x$ から，両接線の傾きは $\cos x_1$，$\cos x_2$

両接線は直交するから，$\cos x_1 \cos x_2=-1$，$\therefore\ \cos x_1=\pm 1$，$\cos x_2=\mp 1$（複合同順）

$\cos x_1=1$ とすれば，$x_1=2m\pi$，$\cos x_2=-1$，$x_2=(2n+1)\pi$，m，n は整数

したがって，一方の接線は $y=x-2m\pi$　①，これと直交する接線は $y=-x+(2n+1)\pi$　②

①，② の交点の y 座標は，①＋②から，$y=\left(n-m+\dfrac{1}{2}\right)\pi=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$k$ は整数　（答）

＜解説＞

図１のような図を描いて考える。接線が直交するとき，傾きの間の関係式に気づくこと。

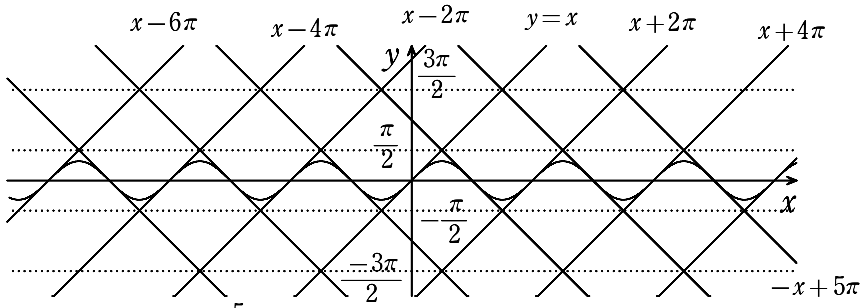

図１

$\boxed{2}$　a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n)>\frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\log_a(x-n)=\frac{\log(x-n)}{\log a},\ \frac{1}{2}\log_a(2n-x)=\frac{\log\sqrt{2n-x}}{\log a}$$

したがって，与えられた不等式は $\dfrac{\log(x-n)}{\log a}>\dfrac{\log\sqrt{2n-x}}{\log a}$

また真数>0から，$n<x<2n$　①

（i）$0<a<1$ のとき $\log a<0$

与えられた不等式は $\log(x-n)<\log\sqrt{2n-x}$

$y=\log x$ は単調増加関数だから，$x-n<\sqrt{2n-x}$，$n=6$ として整理すると，

$(x-3)(x-8)<0$，$\therefore (x-3)(x-8)<0$，$\therefore 3<x<8$，ただし①から $6<x<12$

$\therefore 6<x<8$，したがって与えられた不等式を満たす整数 x は 7

（ii）$a>1$ のとき $\log a>0$

与えられた不等式は $\log(x-n)>\log\sqrt{2n-x}$，$x-n>\sqrt{2n-x}$，$n=6$ として整理すると，

$(x-3)(x-8)>0$，$\therefore x<3$，$x>8$，したがって $8<x<12$，これを満たす整数は9，10，11

以上から，$0<a<1$ のとき $x=7$，$1<a$ のとき $x=9$，10，11　（答）

(2)

①を満たす整数 x が存在するためには，$2n-n=n>1$，すなわち $n\geqq 2$

（i）$a<1$ のとき

$x-n<\sqrt{2n-x}$，$\therefore x^2-(2n-1)x+n(n-2)<0$

したがって，$\dfrac{2n-1-\sqrt{4n+1}}{2}<x<\dfrac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}$　②

①，②を満たす整数 x が存在するためには，$\dfrac{2n-1-\sqrt{4n+1}}{2}<n$ だから，

$n+1<\dfrac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}$，$\therefore n\geqq 3$

逆に $n\geqq 3$ であれば，与えられた不等式を満たす整数 x が存在する。

（ii）$a>1$ のとき

$x-n>\sqrt{2n-x}$，$\therefore x^2-(2n-1)x+n(n-2)>0$

$x<\dfrac{2n-1-\sqrt{4n+1}}{2}=n-\dfrac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$　③

$x>\dfrac{2n-1+\sqrt{4n+1}}{2}=n+\dfrac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$　④

③では，$x<n$ だから，①を満たさない。

④では，$x>n$ だから，①を満たす整数 x の存在には，$n+\dfrac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}+1<2n$

したがって $4n^2-8n=4n(n-2)>0$，$\therefore n\geqq 3$

逆に $n\geqq 3$ であれば，与えられた不等式を満たす整数 x が存在する。

以上によって，この不等式を満たす整数 x が存在するための n の必要十分条件は $n\geqq 3$　（答）

<解説>

まずは真数>0の条件を確認しておかなければならない。また，$\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}$ だから，対数の底 a の範囲によって，$\log a$ の正負が異なるから，$\log_a x$ を含む不等式を扱う場合，注意が必要である。

$\boxed{3}$ a を 実数とし，数列 $\{x_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n + x_n{}^2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $a>0$のとき，数列 $\{x_n\}$が発散することを示せ。

(2) $-1<a<0$のとき，すべての正の整数nに対して$-1<x_n<0$が成り立つことを示せ。

(3) $-1<a<0$のとき，数列 $\{x_n\}$の極限を調べよ。

＜解答＞

(1)

$a>0$のとき，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=x_n+1>1$，したがって $x_{n+1}>x_n$，$\therefore\ x_n>x_1=a$

$$\frac{x_n}{x_1}=\frac{x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n}{x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1}}=\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\frac{x_n}{x_{n-1}}=(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1) \quad ①$$

したがって $x_n=x_1(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1)>a(a+1)^{n-1}$

$a>0$のとき，$\lim_{n\to\infty} a(a+1)^{n-1}=\infty$，したがって $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$

すなわち，数列 $\{x_n\}$は発散する。

(2)

$-1<a<0$のとき，

すべての正の整数 n に対して$-1<x_n<0$　②　が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

正の整数 $n=k$ に対して，$-1<x_k<0$ が成り立つとする。

$x_{k+1}=x_k+x_k{}^2=x_k(1+x_k)$，しかるに$-1<x_k<0$，$0<1+x_k<1$だから，

$-1<x_{k+1}<0$，したがって ②が$n=k$で成り立つとすれば $n=k+1$でも成り立つ。

$n=1$のとき，$x_1=a$だから，$-1<x_1<0$で②は成り立つ。

したがって，数学的帰納法によって，すべての正の整数n に対して②が成り立つ。

(3)

$-1<a<0$のとき，すべての正の整数n に対して$-1<x_n<0$

$x_{n+1}=x_n+x_n{}^2$，$x_{n+1}-x_n=x_n{}^2>0$，$\therefore\ -1<x_n<x_{n+1}<0$

① から，$x_n=x_1(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1)$

$|x_n|=|x_1(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1)|=|a|(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1)$

$|a|(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-2}+1)(x_{n-1}+1)>|a|(a+1)^{n-1}$

したがって　$|a|(a+1)^{n-1}<|x_n|<0$

$0<a+1<1$だから $\lim_{n\to\infty}|a|(a+1)^{n-1}=0$

はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}|x_n|=0$，したがって数列 $\{x_n\}$の極限は0　（答）

＜解説＞

漸化式で与えられる数列の極限に関する問題で，初期値の範囲によって，扱いと極限が変化する。いろいろな解法があると思うが，ここでは，与えられた式の変形によって，①のような表式を得て，

活用する解法を記載した。

(3)については，次のような解法もある。

$-1<x_n<x_{n+1}<0$から，数列x_nは単調増加数列であり，$\lim_{n\to\infty} x_n=b$なる$-1<b\leqq 0$が存在する。

$x_{n+1}=x_n+x_n{}^2$から，$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(x_n+x_n{}^2)$，したがって$b=b+b^2$，$\therefore\ b=0$

すなわち $\lim_{n\to\infty} x_n=0$

$\boxed{4}$　実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1) $[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$をそれぞれ求めよ。

(2) 整式$A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数θに対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数a，bの組(a,b) をすべて求めよ。

$$[(ax+b)^4]=-1$$

＜解答＞

(1)

$2x^2+x+3=2(x^2+1)+x+1$，$\therefore\ [2x^2+x+3]=x+1$　（答）

$x^5-1=(x^2+1)(x^3-x)+(x-1)$，$\therefore [x^5-1]=x-1$　（答）

$[2x^2+x+3][x^5-1]=(x+1)(x-1)=x^2-1=(x^2+1)-2$，$\therefore [[2x^2+x+3][x^5-1]]=-2$　（答）

(2)

$A(x)=(x^2+1)P_A(x)+[A(x)]$，$B(x)=(x^2+1)P_B(x)+[B(x)]$ と表すことができる。

$A(x)B(x)=(x^2+1)\{(x^2+1)P_A(x)P_B(x)+P_A(x)[B(x)]+P_B(x)[A(x)]\}+[A(x)][B(x)]$

$\therefore [A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$

(3)

$$\begin{aligned}(x\sin\theta+\cos\theta)^2&=x^2\sin^2\theta+\cos^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta\\&=(x^2+1)\sin^2\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta\\&=(x^2+1)\sin^2\theta+x\sin 2\theta+\cos 2\theta\end{aligned}$$

したがって $[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$

(4)

$[(ax+b)^4]=[(ax+b)^2(ax+b)^2]=[[(ax+b)^2][(ax+b)^2]]$

$(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2=(x^2+1)a^2+2abx+b^2-a^2$

$[(ax+b)^2]=2abx+b^2-a^2$,

$(2abx+b^2-a^2)(2abx+b^2-a^2)=4a^2b^2x^2+4ab(b^2-a^2)x+(b^2-a^2)^2$

$=4a^2b^2(x^2+1)+4ab(b^2-a^2)x+(b^2-a^2)^2-4a^2b^2$

$[\,[(ax+b)^2]\,[\,(ax+b)^2]\,]=4ab(b^2-a^2)x+(b^2-a^2)^2-4a^2b^2=-1$ ①

$4ab(b^2-a^2)=0$から，$ab=0$または$b^2-a^2=0$，$ab=0$では①は成立しない。

$b^2-a^2=0$のとき，$-4a^2b^2=-1$，$\therefore\ a^4=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\ a^2=\dfrac{1}{2}$，$b^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって $(a,\,b)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)$ （答）

＜解説＞

(1)

整式の剰余の計算を行う。$x^2+1=u$，$x^2=u-1$と変換して扱えば，剰余は容易に求まる。

$2x^2+x+3=2(u-1)+x+3=2u+x+1$，$\therefore\ [2x^2+x+3\,]=x+1$

$x^5-1=(u-1)^2x-1=(u^2-2u)x+(x-1)$，$\therefore\ [x^5-1\,]=x-1$

(2)

ここで$A(x)=(x^2+1)P_A(x)+[A(x)\,]$の表式が良い着想だ。これがないと下記のようになる。

$A(x)=(x^2+1)P_A(x)+a_1x+a_0$，$B(x)=(x^2+1)P_B(x)+b_1x+b_0$ とおく。

$A(x)\,B(x)=(x^2+1)\{(x^2+1)P_A(x)P_B(x)+P_A(x)\,(b_1x+b_0)+P_B(x)\,(a_1x+a_0)\}+(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)$

$\therefore\ [A(x)\,B(x)\,]=[(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)\,]$

$[A(x)\,]\,[B(x)\,]=(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)$，$\therefore\ [\,[A(x)\,]\,[B(x)\,]\,]=[(a_1x+a_0)(b_1x+b_0)]$

したがって，$[A(x)\,B(x)\,]=[\,[A(x)\,]\,[B(x)\,]\,]$

(4)

前の設問を利用すると良いのだろうが，着想ができない。直接，計算しても良さそうだ。そこで，解答では，そのような記載をした。

(3)を利用すれば，下記のようになる。

$ax+b=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\,(x\sin\theta+\cos\theta)$

$(ax+b)^4=(a^2+b^2)^2\,(x\sin\theta+\cos\theta)^4=(a^2+b^2)^2\,(x\sin\theta+\cos\theta)^2\,(x\sin\theta+\cos\theta)^2$

したがって，

$[(ax+b)^4\,]=(a^2+b^2)^2[(x\sin\theta+\cos\theta)^2(x\sin\theta+\cos\theta)^2]$

$=(a^2+b^2)^2[\,[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]\,[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]\,]$

$=(a^2+b^2)^2[\,(x\sin2\theta+\cos2\theta)^2\,]=(a^2+b^2)^2(x\sin4\theta+\cos4\theta)=-1$

$\therefore\ (a^2+b^2)^2\sin4\theta=0$，$\therefore\ \sin4\theta=0$，$(a^2+b^2)^2\cos4\theta=-1$

ここまできたところで，ややこしくなることに気づいた。(3)を上手に使うよりも，(2)を使って直接計算した方がすっきりする。もし，(3)からの誘導だと思って，チャレンジした受験生はうまくいったのであろうか。

$\boxed{5}$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数$f(x)$を求めよ。

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$$

＜解答＞

(1)

$\sin^2(\pi x)$は偶関数だから，$\displaystyle\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx-\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\sin^2(\pi x)-\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\sin^2(\pi x)\right)dx$$

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$とおくと，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

したがって，$f(x)$は奇関数。すると$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\sin^2(\pi x)$は奇関数だから，

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\sin^2(\pi x)\right)dx=0$，$\therefore\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx-\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$

したがって$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx$

$\displaystyle\int\sin^2(\pi x)dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos2\pi x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right)$

したがって，$\displaystyle\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}$

したがって，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}$

(2)

$\displaystyle(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$ の両辺を$(1+e^x)$で除して

$\displaystyle A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt$，$\displaystyle B=\int_{-1}^{1}e^xf(x)dx=\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$ とおけば

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\int_{-1}^{1}f(t)dt-\frac{1}{1+e^x}\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+A-\frac{B}{1+e^x}\quad ①$$

$$A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+A-\frac{B}{1+e^x}\right\}f(x)dx=\frac{1}{2}+2A-B\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$1+e^x=s$とおけば，$\dfrac{ds}{dx}=e^x=s-1$，$x=-1\to s=1+e^{-1}$，$x=1\to s=1+e$

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{s(s-1)}ds=\int\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)ds=(\log|s-1|-\log|s|)=\log\left|\frac{s-1}{s}\right|$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx=\left[\log\left|\frac{s-1}{s}\right|\right]_{1+e^{-1}}^{1+e}=\left\{\log\left(\frac{e}{1+e}\right)-\log\left(\frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}\right)\right\}$$

$$=\left\{\log\left(\frac{e}{1+e}\right)-\log\left(\frac{1}{1+e}\right)\right\}=1$$

したがって，$A=\dfrac{1}{2}+2A-B$，$\therefore B=A+\dfrac{1}{2}$　②

$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$において，$x$ についての定積分により

$$\int_{-1}^{1}(1+e^x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx+\int_{-1}^{1}(e^x+1)dx\int_{-1}^{1}f(t)dt-\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$$

すなわち

$$A+B=1+A\int_{-1}^{1}(e^x+1)dx-2B=1+A\Big[e^x+x\Big]_{-1}^{1}-2B=1+\mathrm{A}(e+1-e^{-1}+1)-2B$$

したがって，$3B-(e-e^{-1}+1)A=1$，　$\therefore B=\dfrac{1+(e-e^{-1}+1)A}{3}$　③

②，③から$A=\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$，$B=\dfrac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}$

したがって，①から $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}\left\{\sin^2(\pi x)+\dfrac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}\right\}+\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$　（答）

＜解説＞

(1)

$\int_{-1}^{1}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$を凝視して，不定積分を考えても，うまくいきそうにない。

$\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx$ は容易に実行可能そうで，$\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx=\dfrac{1}{2}$ と求まる。

すると，$\int_{-1}^{1}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)\,dx$を証明する問題となる。

２つの被積分関数を見つめると，$\sin^2(\pi x)$は偶関数だから，積分域を$\int_{0}^{1}dx$ から $\int_{-1}^{1}dx$と2倍に広げることができることに気づく。すると両関数の差の関数の積分が0であれば良いということになる。

差の関数の積分，$\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\sin^2(\pi x)\right)dx$ も容易にできそうにないが，積分値が0になることが目標だから，被積分関数を見つめると，それは奇関数であることに気づく。

(2)

$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$ の両辺を $(1+e^x)$ で除せば，$f(x)$ の表式が求まる。

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\int_{-1}^{1}f(t)dt-\frac{1}{1+e^x}\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+A-\frac{B}{1+e^x}\quad ①$$

このとき求める関数$f(x)$の定積分$\int_{-1}^{1} f(t)dt = A$，$\int_{-1}^{1} e^t f(t)dt = B$が未知数として含まれていることに気づく。この定積分の値が解れば，関数$f(x)$を求めることができるというわけである。①の左辺の定積分がAであることに気づけば，両辺の定積分から未知数A，Bの関係式を求めることができることにも気づく。

さらに，元の式の左辺の定積分が$A+B$であることに気づけば，両辺の定積分によって，もう一つAとBの関係式を求めることができることに気づく。

以上のような気づき，着想が必要なのだが，限定された時間の中で見出すことができるかどうか，やや煩瑣な計算を進めることができるかどうか，難しいところだ。

$\boxed{6}$　10個の玉が入っている袋から1個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5個と白玉 5個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答よ。

(1) $p(n+1, 2)$を$p(n, 2)$と$p(n, 1)$を用いて表せ。

(2) $p(n, 1)$を求めよ。

(3) $p(n, 2)$を求めよ。

＜解答＞

(1)

$n+1$回の試行で赤玉2個を取り出す場合は，以下の場合

n回の試行で赤玉2個，次の$n+1$回目の試行で白玉：確率は$p(n, 2)\times\dfrac{7}{10}$

∵ $n+1$回目の試行前，袋には赤玉3個，白玉7個

n回の試行で赤玉1個，次の$n+1$回目の試行で赤玉：確率は$p(n, 1)\times\dfrac{4}{10}$

∵ $n+1$回目の試行前，袋には赤玉4個，白玉6個

両者は排反事象だから，$p(n+1, 2)=\dfrac{7}{10}p(n, 2)+\dfrac{2}{5}p(n, 1)$　（答）

(2)

n回の試行でk回目にのみ赤玉を取り出す確率を$p_k(n, 1)$とすれば，

$k-1$回目まで白玉，k回目で赤玉，n回目まで白玉を取り出すのだから，

$$p_k(n, 1)=\left(\frac{5}{10}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$$

n回の試行で赤玉を1個取り出す確率

$$p(n, 1)=\sum_{k=1}^{n} p_k(n, 1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\frac{3}{5}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{-k}=\left(\frac{3}{5}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^n\times5\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$　（答）

(3)

n回の試行で2回の赤玉を取り出す確率$p(n,2)$は，(1)から

$$p(n,2)=\frac{7}{10}p(n-1,2)+\frac{4}{10}p(n-1,1)=\frac{7}{10}p(n-1,2)+2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad ①$$

$p(n,2)$をp_nと簡略化して表現し，　$q_n=\dfrac{p_n}{\left(\frac{7}{10}\right)^n}$とおけば，

①は $q_n=q_{n-1}+2\left(\frac{10}{7}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=q_{n-1}+\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}\right\}$　②

$q_n-q_{n-1}=\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}\right\}$だから，$\sum_{k=3}^{n}(q_k-q_{k-1})=q_n-q_2=\frac{20}{7}\sum_{k=3}^{n}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}-\left(\frac{5}{7}\right)^{k-1}\right\}$

したがって，②は $q_n=q_2+\frac{20}{7}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}-\frac{20}{7}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^{k-1}$

$q_2=\dfrac{p_2}{\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\dfrac{p(2,2)}{\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{7}\right)^2$，ここで$p_2=p(2,2)=\frac{5}{10}\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$

等比数列の和の計算により，$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}=7\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right\}$，$\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^{k-1}=\frac{7}{2}\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$

したがって，$q_n=\frac{1}{5}\left(\frac{10}{7}\right)^2+20\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right\}-10\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$

$$=10-20\left(\frac{6}{7}\right)^n+10\left(\frac{5}{7}\right)^n$$

したがって，$p(n,2)=p_n=\left(\frac{7}{10}\right)^n q_n=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n$　（答）

＜解説＞

(1)，(2)

特に難しいところはないであろう。等比数列の和の計算が必要となる。

(3)

(1)，(2)を利用すれば良いので，表式を求めることは容易である。しかし表式から一般項を求める方法に着想が必要で，やや難しい。

ここでの数列の表式は $p_n=bp_{n-1}+a_{n-1}$である。

これが$p_n=bp_{n-1}+a$のようにaが定数であれば，以下のように容易に一般項が求まる。

$$p_n-\frac{a}{1-b}=b\left(p_{n-1}-\frac{a}{1-b}\right)=\cdots=b^{n-1}\left(p_1-\frac{a}{1-b}\right),\ \therefore\ p_n=b^{n-1}\left(p_1-\frac{a}{1-b}\right)+\frac{a}{1-b}$$

これをまともに計算して，一般項p_nの表式を求めようとすると以下のようになる。

$$bp_{n-1}+a_{n-1}=b(bp_{n-2}+a_{n-2})+a_{n-1}=\cdots=b^{n-2}p_2+\sum_{k=1}^{n-2}b^{k-1}a_{n-k}$$

ここでは$b=\frac{7}{10}$，$a_n=2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$である。

$$\frac{7}{10}p_{n-1}+a_{n-1}=\frac{7}{10}\left(\frac{7}{10}p_{n-2}+a_{n-2}\right)+a_{n-1}=\cdots=\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}p_2+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}a_{n-k}$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}a_{n-k}=\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}=\frac{10}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{7}{5}\right)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}=6\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}-1\right\},\ \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{5}\right)^{k-1}=\frac{5}{2}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{n-2}-1\right\}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}a_{n-k}&=\frac{10}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\times6\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}-1\right\}-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\frac{5}{2}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{n-2}-1\right\}\\&=20\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left\{\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}-1\right\}-10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left\{\left(\frac{7}{5}\right)^{n-2}-1\right\}\\&=\frac{36}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}-20\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{5}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}=\frac{47}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}-20\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\end{aligned}$$

$$p_n=\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}p_2+\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}a_{n-k}=\frac{1}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}+\frac{47}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}-20\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

ここで$p_2=p(2,2)=\frac{5}{10}\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$

$p(n,2)=p_n=10\left(\frac{7}{10}\right)^{n}-20\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+10\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$　（答）

やや複雑で，等比数列の和を求める計算でミスをおかしやすいような気がする。正答率はどのくらいであろうか。

そこで，解答のように，$p_n=bp_{n-1}+a_{n-1}$　において$q_n=\frac{p_n}{b^n}$とおけば，$bp_{n-1}=b^nq_{n-1}$だから，

$$q_n=q_{n-1}+\frac{a_{n-1}}{b^n}=\left(q_{n-2}+\frac{a_{n-2}}{bb^{n-2}}\right)+\frac{a_{n-1}}{bb^{n-1}}=\cdots=q_1+\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{b^{n-k}}$$

と容易に一般項が求まる。むろん $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{b^{n-k}}$ の計算が容易かどうかが問題だが，表式は簡明である。このような着想を思いつくことができれば素晴らしいが，類似問題の経験がないと難しいであろう。

＜総評＞

難易度が標準（B）以上の問題が揃っていて，150分でこなすのは，なかなか厳しい。１，２は完答したい。３または４は完答したい。これで50％の得点を確保し，３または４，５，６で25％以上を確保できれば，良いのではないか。

$\boxed{1}$

一読すると，やや難解そうな印象を受ける。しかし，接線が直交するということは，傾きの積が-1ということであり，傾きが$y'=(\sin x)'=\cos x$なので，直交する接線の傾きには$\cos x_1\cos x_2=-1$の関係がある。容易に接点が求まる。難易度Ｂ。

$\boxed{2}$

対数の不等式の問題。対数の底，真数等の基本事項を理解していれば，困難はないであろう。難易度はＢ。

$\boxed{3}$

漸化式で与えられる数列の極限に関する問題で，式の変形などに着想や気づきが必要である。難易度はＢ＋。

$\boxed{4}$

工夫された面白い問題だと思うが，(3)を利用して(4)を解くことが，効果的なことか，理解困難であった。難易度Ｂ＋。

$\boxed{5}$

気づき，着想が必要で，まともな対応では解けない面白い問題。(1)は偶関数，奇関数の定積分に関する特徴を利用する着想が必要になる。(2)も限られた時間の中で，解答方針を着想することに苦慮しそうだ。難易度はＡ－。

$\boxed{6}$

題意は簡明で定式化も難しくはない確率漸化式に関わる問題。やや複雑な，ミスしやすい計算を含むので，難易度はＡ－。

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$ a，b，cを実数とし，a は0でないとする。xy 平面上の直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2+a$ が相異なる２点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$Q(c, ac)$ で交わっているとする。$c=b^2$, $b<0$のとき，aとbを求めよ。

<解答>

$\mathrm{P}(b,\ ab)$ が放物線上の点であることから，$ab=b^2+a$ ①

$Q(c, ac)$ が放物線上の点であることから，$ac=ab^2=c^2+a=b^4+a$ ②

①から$a=\dfrac{b^2}{b-1}$，②に代入して，$\dfrac{b^4}{b-1}=b^4+\dfrac{b^2}{b-1}$，$\therefore\ b^2-b-1=0$

したがって，$b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$b<0$から，$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ （答）

$a=\dfrac{b^2}{b-1}=2-\sqrt{5}$ （答）

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{2}$ と同じ

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}a_n=2a_{n+1}^2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての正の整数 n について，a_n は正であることを示せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

＜解答＞

(1)

　あるの$n=k$，$n=k+1$において，$a_k>0$，$a_{k+1}>0$，とする。

すると，$a_{k+2}a_k=2a_{k+1}^2>0$ だから $a_{k+2}>0$，また $a_{k+3}a_{k+1}=2a_{k+2}^2>0$ だから $a_{k+3}>0$

すなわち，$a_k>0$，$a_{k+1}>0$，であれば，$a_{k+2}>0$，$a_{k+3}>0$

$a_1=1>0$，$a_2=3>0$だから，数学的帰納法によって，すべての$n=k$ について$a_k>0$，$a_{k+1}>0$

したがってすべての正の整数 n について，a_n は正である。

(2)

$(a_{n+2}a_n)(a_{n+1}a_{n-1})(a_n a_{n-2})\cdots(a_5a_3)(a_4a_2)(a_3a_1)=2a_{n+1}^2 2a_{n+1}^2 2a_{n+1}^2\cdots 2a_4^2 2a_3^2 2a_2^2$

$a_{n+2}a_1=2^n a_{n+1}a_2$，$\therefore\ a_{n+2}=3\cdot 2^n a_{n+1}=3\cdot 2^n 3\cdot 2^{n-1}a_n=(3\cdot 2^n)(3\cdot 2^{n-1})(3\cdot 2^{n-2})\cdots(3\cdot 2^3)(3\cdot 2^2)(3\cdot 2)a_2$

したがって $a_{n+2}=3^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}a_2=3^{n+1}2^{\frac{n(n+1)}{2}}a_2$，したがって $a_n=3^{n-1}2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$　　（答）

＜解説＞

(1)

数学的帰納法によって証明することに，すぐ気づくだろう。

(2)

ちょっとした計算上の着想によって，容易に求めることができる。

$\boxed{4}$　n を2 以上の整数とする。金貨と銀貨を含むn 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た金貨は取り去り，取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える。初めはn 枚すべて金貨であり、n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す。k 回目の試行の直後に，n 枚の硬貨のなかに金貨がj 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ $(0\leqq j\leqq n)$ で表す。

(1) $P_1(j)$ を求めよ。

(2) $P_k(j)$ $(k\geqq 2)$ を求めよ。

(3) $n=3$ とする。2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも1 枚残るが，3 回目の試行の直後には3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

　n 枚の金貨を投げたとき，j 枚表が出る確率を求めればよい。

n 枚の金貨のうちj 枚表が出る場合の数は ${}_nC_j$

n 枚の金貨の表裏の組み合わせの場合の数は 2^n

したがって $P_1(j)=\dfrac{{}_nC_j}{2^n}=\dfrac{n!}{2^n j!(n-j)!}$　　（答）

(2)

　k 回の試行によって，j 枚の金貨が残ったので，このj 枚の金貨はずっと表だった。

その確率は（n 枚の金貨から j 枚の金貨を選ぶ場合の数）×（1枚の金貨が k 回表である確率）

$$\times（j\text{ 枚の金貨について}k\text{回表となる}）={}_nC_j\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j \quad ①$$

一方，$(n-j)$ 枚の金貨は k 回の試行までに1回裏が出て，銀貨に交換された。

銀貨は裏でも表でも，金貨の枚数に関係ない。

ということは $(n-j)$ 枚の金貨は k 回の試行において1 回以上裏となるものと考えれば良い。

1枚の金貨が k 回の試行で1 回以上裏が出る確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{l=1}^{k-1}{}_kC_l$

したがって $(n-j)$ 枚の金貨のすべてについて1回以上裏が出る確率は $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{l=1}^{k-1}{}_kC_l\right\}^{n-j}$ ②

$\sum_{l=1}^{k-1}{}_kC_l=\sum_{l=0}^{k}{}_kC_l-{}_kC_0-{}_kC_k=2^k-1-1=2^k-2$，したがって②は $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-j}$ ③

求める確率 $P_k(j)$ $(k\geqq 2)$ は ①×③ から，

$$P_k(j)={}_nC_j\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j\times\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-j}=\frac{(2^k-1)^{n-j}}{2^{nk}}{}_nC_j \quad （答）$$

(3)

2回目の試行で金貨3枚残る確率　$P_2(3)=\frac{(2^2-1)^{3-3}}{2^6}{}_3C_3=\frac{1}{2^6}$，

3回目で金貨0枚になる確率は $\frac{1}{2^6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^9}$ ④

2回目の試行で金貨2枚残る確率　$P_2(2)=\frac{(2^2-1)^{3-2}}{2^6}{}_3C_2=\frac{9}{2^6}$，

3回目で金貨0枚になる確率は $\frac{9}{2^6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2^8}$ ⑤

2回目の試行で金貨1枚残る確率　$P_2(1)=\frac{(2^2-1)^{3-1}}{2^6}{}_3C_1=\frac{3^3}{2^6}$，

3回目で金貨0枚になる確率は $\frac{27}{2^6}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2^7}$ ⑥

したがって，2 回目の試行では金貨が少なくとも1 枚残るが，3 回目の試行で金貨がなくなる確率は

④＋⑤＋⑥だから，$\frac{1}{2^9}+\frac{9}{2^8}+\frac{27}{2^7}=\frac{127}{512}$ （答）

＜解説＞

確率の問題だが，なかなか手強いと感じた。(1)は素直に考えていけば容易だろう。

(2)が難しい。問題文を読み確率漸化式の問題だと考えて，解答方針を考え始めると迷路にはまり込む。

たとえば，

$k-1$回目の試行後の金貨の枚数は l 枚，その確率は $P_{k-1}(l)$，ただし $j\leqq l\leqq n$

k回目の試行で，l枚の金貨のうち j 枚が表になれば，j 枚の金貨が残る。

試行によって l枚の金貨のうち j 枚が表になる確率は $\frac{{}_lC_j}{2^l}$

したがって，その確率は $P_{k-1}(l)\times\frac{{}_{l}C_{j}}{2^{l}}$

したがって，$P_{k}(j)=\sum_{l=j}^{n}\left\{P_{k-1}(l)\frac{{}_{l}C_{j}}{2^{l}}\right\}$

この先が，進まない。式がおかしいのか，解法を見い出すことができないのか，悩んで考えても，どうにもならない。時間が尽きてしまう。

それにしても，設問(1)からして，どうしても確率漸化式に頭が向いてしまう。

確率漸化式への思考から逃れて，k 回の試行で j 枚残るとはどういうことかと，再度考えることができれば素晴らしい。k 回の試行で，j 枚の金貨が表がずっと出る，$(n-j)$枚の金貨はk回の試行で1回以上裏が出る場合であると気づけば，その確率を求めれば良い，と思考を回転できる。迅速な思考が必要となる。

(3)

(2)が正答できていれば，スムーズに解答できよう。(2)の解答ができなくても，解答することは可能である。少々，煩瑣だが。

＜総評＞

$\boxed{1}$

2次関数と1次関数の交点に関する問題で，2次方程式の解に帰着する。難易度はC。

$\boxed{2}$

理系の $\boxed{2}$ に同じ。文系の問題としては，やや煩瑣か。難易度はB＋。

$\boxed{3}$

数列の問題。着想が必要であり，文系の問題としては，やや難しいか。難易度はB＋

$\boxed{4}$

文系の確率の問題としては難しい。(1)は正答したい。難易度A。

200611