（平成 31 年度前期日程）

数　学

180　分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページ，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. **各**答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下 2 桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

試験問題は，つぎのページより始まります。

$\boxed{1}$ (60 点)

(1) $h>0$とする．座標平面上の点O(0，0)，点P(h，s)，点Q(h，t)に対して，三角形OPQの面積をSとする．ただし，$s<t$とする．三角形OPQの辺OP，OQ，PQの長さをそれぞれp，q，rとするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときのs，tの値を求めよ．

(2) 四面体ABCDの表面積をT，辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cとし，辺AD，BD，CDの長さをそれぞれℓ，m，nとする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ．

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A，B を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\, dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする.

（下 書 き 用 紙）

3 (60 点)

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる2点 z，w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

(下　書　き　用　紙)

4 (60 点)

H_1, …, H_n を空間内の相異なる n 枚の平面とする．H_1, …, H_n によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を (x, y, z) とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1, 平面 $y=0$ を H_2, 平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$,
- 平面 $x=0$ を H_1, 平面 $y=0$ を H_2, 平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$,
- 平面 $x=0$ を H_1, 平面 $x=1$ を H_2, 平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$,
- 平面 $x=0$ を H_1, 平面 $y=0$ を H_2, 平面 $z=0$ を H_3, 平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$,

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

（下　書　き　用　紙）

5 (60 点)

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

を考える．

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

(下 書 き 用 紙)