2019（H31）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$（60点）

(1)　$h>0$とする．座標平面上の点 O$(0, 0)$，点P(h, s)，点Q(h, t) に対して、三角形 OPQの面積をSとする．ただし，$s<t$とする．三角形OPQの辺OP，OQ，PQの長さをそれぞれp，q，rとするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また等号が成立するときのs，tの値を求めよ．

(2)　四面体ABCDの表面積をT，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれa，b，cとし，辺AD，BD，CD の長さをそれぞれ l，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ．

　また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ．

＜解答＞

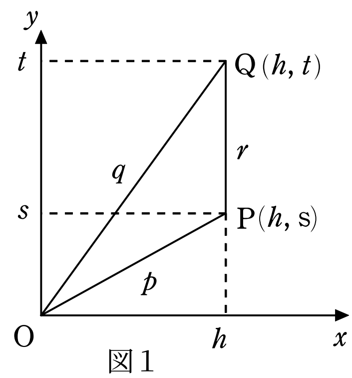

図１

(1)

$p^2=h^2+s^2$，$q^2=h^2+t^2$，$r^2=(t-s)^2$

$p^2+q^2+r^2=2(h^2+t^2+s^2)-2st$，$S=\dfrac{1}{2}h(t-s)$

$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S=2(h^2+t^2+s^2)-2st-2\sqrt{3}h(t-s)$

$\qquad=2\{h^2+t^2+s^2-st-\sqrt{3}h(t-s)\}$

$h^2+t^2+s^2-st-\sqrt{3}h(t-s)=h^2-\sqrt{3}(t-s)h+t^2+s^2-st$

$=\left\{h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\dfrac{3}{4}(t-s)^2+t^2+s^2-st=\left\{h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\dfrac{1}{4}(t+s)^2 \geqq 0$　①

したがって，$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S \geqq 0$，$\therefore$ $p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$

等号が成立するのは，①の等号が成立するとき。

すなわち$(t+s)^2=0$，$\left\{h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2=0$

$s<t$ だから，$t>0$として，$s=-t$

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=\sqrt{3}t$，$\therefore$ $s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$　（答）

(2)

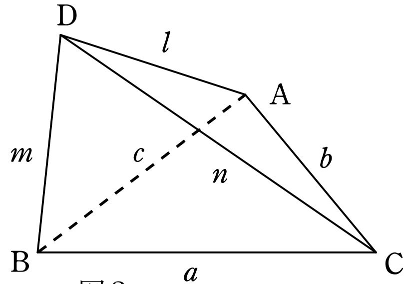

図２

　△ABC，△DAB，△DBC，△DCAの面積をそれぞれS，S_C，S_A，S_Bとする。(1)を利用すると

△ABC について，$a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}S$　②

△DAB について，$m^2+l^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}S_C$　③

△DBC について，$m^2+n^2+a^2 \geqq 4\sqrt{3}S_A$　④

△DCA について，$n^2+l^2+b^2 \geqq 4\sqrt{3}S_B$　⑤

②＋③＋④＋⑤から，$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}(S+S_C+S_A+S_D)=2\sqrt{3}\,T$

等号が成立するのは，四面体を構成する三角形のそれぞれにおいて，①の等号が成立するとき

この条件は三角形OPQが正三角形であることを示す。

したがって，等号が成立するのは，四面体の４つの三角形がすべて正三角形,

すなわち四面体ABCDが正四面体のとき

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて考える。すると，変数 h，s，t により与式が表現されることがわかるだろう。整理すると，$h^2+t^2+s^2-st-\sqrt{3}\,h(t-s)\geqq 0$を示せば良いことがわかる。この式を見つめると，変数 h，s，tの2次関数で，tとsについては対称である。そこで，hの2次関数とみて，不等式を証明することを試みる。

(2)

(1)を利用することに直ぐに気づく。

$\boxed{2}$ （60点）

次の等式が$1\leqq x\leqq 2$で成り立つような関数$f(x)$と定数A，Bを求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)dy = 3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$は$1\leqq x\leqq 2$に対して定義される連続関数とする.

＜解答＞

$xy=z$とおけば，$\dfrac{dz}{dy}=x$，$y=\dfrac{1}{x}\to z=1$，$y=\dfrac{2}{x}\to z=2$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)dy = \frac{1}{x}\int_1^2 \left|\log\frac{z}{x}\right| f(z)dz$$

$$=\frac{1}{x}\int_1^x(-\log z+\log x)f(z)dz+\frac{1}{x}\int_x^2(\log z-\log x)f(z)dz \quad ①$$

$\int f(z)dz=F_1(z)$，$\int f(z)\log z\,dz=F_2(z)$とおけば,

$$\int_1^x(-\log z+\log x)f(z)dz=\Big[F_1(z)\log x-F_2(z)\Big]_1^x=F_1(x)\log x-F_2(x)-F_1(1)\log x+F_2(1)$$

$$\int_x^2(\log z-\log x)f(z)dz=\Big[F_2(z)-\log x\,F_1(z)\Big]_x^2=F_2(2)-F_1(2)\log x-F_2(x)+F_1(x)\log x$$

したがって①は

$$\frac{1}{x}[2F_1(x)\log x-2F_2(x)-\{F_1(1)+F_1(2)\}\log x+F_2(1)+F_2(2)]=3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x} \quad ②$$

したがって,

$2F_1(x)\log x-2F_2(x)-\{F_1(1)+F_1(2)\}\log x+F_2(1)+F_2(2)=3x^2(\log x-1)+Ax+B$ ③

③の両辺をxで微分すると

$$2F_1{}'(x)\log x+\frac{2}{x}F_1(x)-2F_2{}'(x)-\frac{F_1(1)+F_1(2)}{x}=6x(\log x-1)+3x+A$$

$F_1{}'(x)=f(x)$，$F_2{}'(x)=f(x)\log x$だから，$\dfrac{2}{x}F_1(x)-\dfrac{F_1(1)+F_1(2)}{x}=6x\log x-3x+A$

したがって，$2F_1(x)-\{F_1(1)+F_1(2)\}=6x^2\log x-3x^2+Ax$ ④

④において

$x=1$とすれば，$F_1(1)-F_1(2)=-3+A$ ⑤

$x=2$とすれば，$F_1(2)-F_1(1)=24\log 2-12+2A$ ⑥

⑤＋⑥から，$3A=15-24\log 2$，$\therefore\ A=5-8\log 2$ （答）

④の両辺をxで微分して整理すると，$F_1{}'(x)=f(x)=6x\log x+\dfrac{A}{2}=6x\log x+\dfrac{5}{2}-4\log 2$ （答）

③において

$x=1$とおけば，$F_2(2)-F_2(1)=-3+A+B$ ⑦

$x=2$とおけば，$F_1(2)\log 2-F_2(2)-F_1(1)\log 2+F_2(1)=12(\log 2-1)+2A+B$ ⑧

⑦＋⑧を整理して，$\{F_1(2)-F_1(1)\}\log 2=12\log 2-15+3A+2B$ ⑨

$$F_1(2)-F_1(1)=\Big[F_1(x)\Big]_1^2=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left\{6x\log x+\frac{A}{2}\right\}dx=\left[3x^2\log x-\frac{3x^2}{2}+\frac{A}{2}x\right]_1^2$$

$$=12\log 2-\frac{9}{2}+\frac{A}{2} \quad ⑩$$

⑩を⑨に代入して，$12(\log 2)^2-\dfrac{9}{2}\log 2+\dfrac{A}{2}\log 2=12\log 2-15+3A+2B$

これを整理すると，$B=4(\log 2)^2+5\log 2$ （答）

＜解説＞

解答方針を考えようとしても，雲をつかむような感じを覚える。まずは，与えられた積分を扱い易い表式にしてから，考え直そう。絶対値記号を外せば，考え易くなるだろう。その際，積分範囲に変数xが入っていて扱いにくそうだから，変数変換をする。すると①のようなわかり易い表式となる。このとき，絶対値記号を外すために積分変数zを$1\leqq z\leqq x$と$x\leqq z\leqq 2$の２区間に分けて，絶対値記号内の関数値が正となるように絶対値記号を外す。

さらに，定積分の結果は定数なのだから，積分記号を使わないように，$f(z)$，$f(z)\log z$の原始関数$F_1(z)$，$F_2(z)$を導入して，表式を扱い易くする。こうして，①から②，③を得る。③の左辺，右辺はxの関数だから，これが恒等式として成立するように，A，B，$f(x)$を定める問題となる。

③を見つめて，改めて解答方針を考える。③にはAはxの係数として，Bは定数項として存在する。そこで，③を微分して④を得れば，Bは消え，Aのみを含む式となる。加えて，原始関数が元の被積分関数に戻るので，扱い易くなる。xの具体的な値で④の恒等式が成立するはずだから，$x=1$，2を代入して２つの恒等式を見つめると，Aのみの方程式が得られる。④をさらに微分すると，$F_1{}'(x)=f(x)$の表式が得られる。

続いてBを求めるために，③に戻って考える。③においても，$x=1$，2として２つの恒等式を得て，

うまくBを求めることができる。このとき，$F_1(x)=\int f(x)dx=\int\left\{6x\log x+\frac{A}{2}\right\}dx$の計算が必要になる。ここで部分積分法によれば，$\int x\log x\,dx=\left(\int xdx\right)\log x-\int\frac{1}{x}\left(\int xdx\right)dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$であることを使う。

$\boxed{3}$ (60点)

iを虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数zにより$\frac{z}{3+2i}$と表される複素数全体の集合をMとする．

(1) 原点を中心とする半径rの円上またはその内部に含まれるMの要素の個数を$N(r)$とする．
このとき，集合$\{r\mid 10\leqq N(r)<25\}$を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる2点z，wを結ぶ線分を$L(z,\ w)$で表すとき，6つの線分$L(0\ ,1)$，$L\left(1, 1+\frac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\frac{1}{2}+i, i\right)$，$L(i\ ,0)$で囲まれる領域の内部または境界に含まれる$M$の要素の個数を求めよ．

＜解答＞

(1)

$$\frac{z}{3+2i}=\frac{p+qi}{3+2i}=\frac{p+qi}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{(3p+2q)+(3q-2p)i}{13}$$

したがって，$M\in\left(x=\frac{3p+2q}{13}, y=\frac{3q-2p}{13}\right)$，($p$，$q$は整数)

$N(r)$は$x^2+y^2\leqq r^2$を満たす整数(p, q)の数

$x^2+y^2=\frac{1}{13}(p^2+q^2)\leqq r^2$，$\therefore\ p^2+q^2\leqq\ (\sqrt{13}\,r)^2$

図１からわかるように，$10\leqq N(r)<25$であるためには，

$2\leqq\sqrt{13}\,r<2\sqrt{2}$，$\therefore\ \frac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　（答）

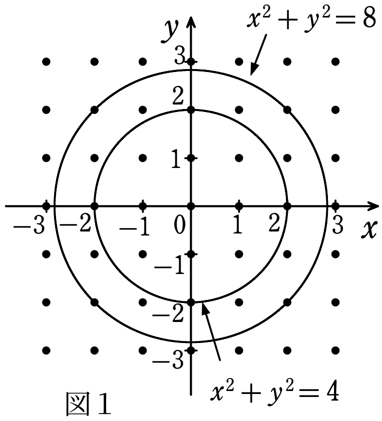

図１

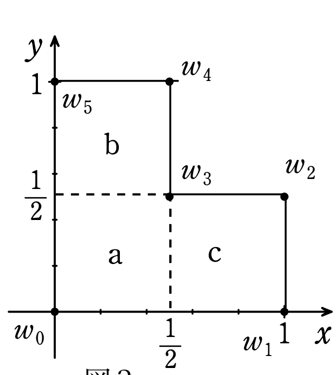

図２

(2)

図２の６つの線分Lを構成する６個の点の複素数は

$w_0=0$，$w_1=1$，$w_2=1+\dfrac{i}{2}$，$w_3=\dfrac{1+i}{2}$，$w_4=\dfrac{1}{2}+i$，$w_5=i$

これに対応する複素数 $z_k=(3+2i)w_k$ （$k=0, 1, 2, 3, 4, 5$）

図２の線分 L に対応する図形を図３に示す。

この図形内の複素数 $z=p+qi$ の整数の組 (p, q) の数は 12

すなわち，６つの線分によって囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数は

12 個　（答）

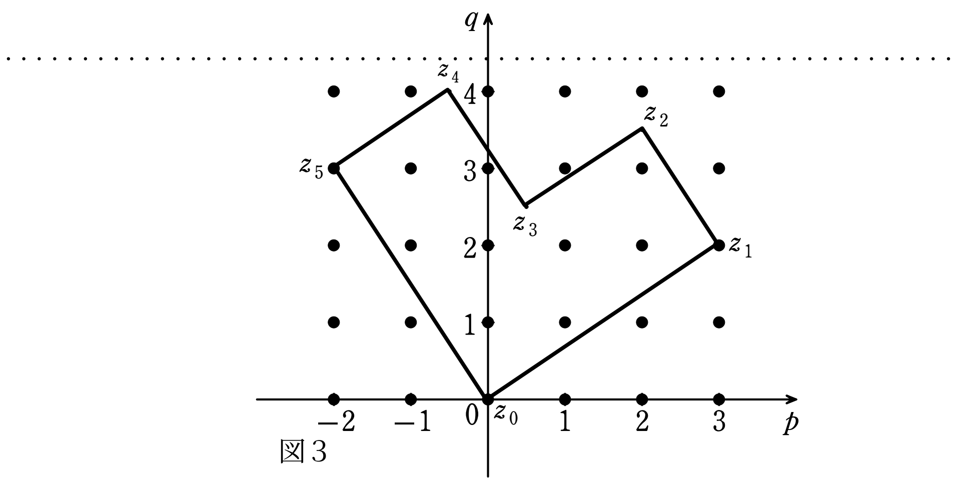

図３

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて考えるのが速い。円の内部の整数の組の個数を数える必要があるので，できるだけ丁寧に図を描く。

(2)

直線Lで囲まれた(x, y)複素数平面が(p, q)複素数平面ではどうなるかを考える。

６つの線分によって囲まれる領域(x, y)は図２になる。図２の領域が図３の領域(p, q)に対応する。したがって，図３の領域に含まれる整数の組(p, q)を数えれば良い。

別解を考える。

$\dfrac{(3p+2q)+(3q-2p)i}{13}$が図２のa，b，cの領域にある場合の整数の組$(p, q)$を求める。

a) 領域aにある場合

$0 \leqq \dfrac{(3p+2q)}{13} \leqq 0.5$　①，$0 \leqq \dfrac{(3q-2p)}{13} \leqq 0.5$　②

①から，$0 \leqq 3p+2q \leqq 6.5$，$\therefore -\dfrac{3}{2}p \leqq q \leqq -\dfrac{3}{2}p+\dfrac{6.5}{2}$　③

②から，$0 \leqq 3q-2p \leqq 6.5$，$\therefore \dfrac{2}{3}p \leqq q \leqq \dfrac{2}{3}p+\dfrac{6.5}{3}$　④

③，④を満たす領域は図４の打点部で整数の組(p, q)は$(0, 0)$，$(0, 1)$，$(0, 2)$，$(1, 1)$の4 組

b) 領域bにある場合

$0 \leqq \dfrac{(3p+2q)}{13} \leqq 0.5$　⑤，$0.5 \leqq \dfrac{(3q-2p)}{13} \leqq 1.0$　⑥

⑤から，$0 \leqq 3p+2q \leqq 6.5$，$\therefore -\dfrac{3}{2}p \leqq q \leqq \dfrac{6.5}{2}-\dfrac{3}{2}p$　⑦

⑥から，$6.5 \leqq 3q-2p \leqq 13$，$\therefore \dfrac{2}{3}p+\dfrac{6.5}{3} \leqq q \leqq \dfrac{13}{3}+\dfrac{2}{3}p$　⑧

⑦，⑧を満足する整数の組$(p,\ q)$は図５から，$(-2,3)$，$(-1,2)$，$(-1,3)$，$(0,3)$の4 組

c) 領域cにある場合

$0.5 \leqq \dfrac{(3p+2q)}{13} \leqq 1$　⑨，$0 \leqq \dfrac{(3q-2p)}{13} \leqq 0.5$　⑩

⑨から，$6.5 \leqq 3p+2q \leqq 13$，$\therefore -\dfrac{3}{2}p+\dfrac{6.5}{2} \leqq q \leqq 6.5-\dfrac{3}{2}p$　⑪

⑩から，$0 \leqq 3q-2p \leqq 6.5$，$\therefore \dfrac{2}{3}p \leqq q \leqq \dfrac{2}{3}p+\dfrac{6.5}{3}$　⑫

⑪，⑫を満足する整数の組$(p,\ q)$は図６から，$(1,2)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,2)$の4 組

以上から，

６つの線分によって囲まれる領域の内部または境界に含まれるMの要素の個数は 12　（答）

この方法は容易に思いつくが，式が錯綜するので誤り易い。

図４，５，６の打点部を合わせた領域が図３の領域となる。

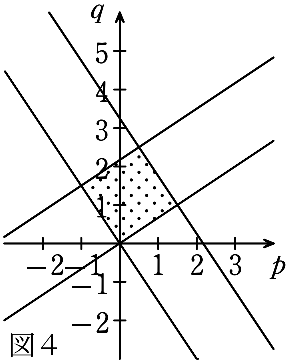

図４

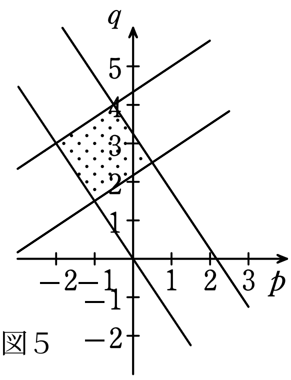

図５

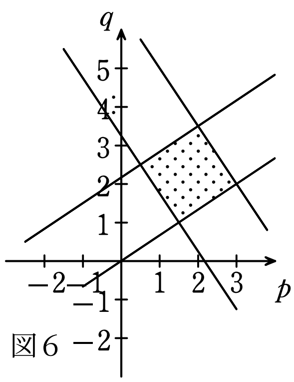

図６

$\boxed{4}$ (60点)

H_1，・・・，H_n を空間内の相異なるn 枚の平面とする．H_1，・・・，H_n によって空間が$T(H_1$，・・・，$H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を$(x,\ y,\ z)$とするとき，

●平面$x=0$をH_1，平面$y=0$をH_2，平面$z=0$をH_3とすると$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=8$,

●平面$x=0$をH_1，平面$y=0$をH_2，平面$x+y=1$をH_3とすると$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$,

●平面$x=0$をH_1，平面$x=1$をH_2，平面$y=0$をH_3とすると$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=6$,

●平面$x=0$をH_1，平面$y=0$をH_2，平面$z=0$をH_3，平面$x+y+z=1$をH_4とすると$T(H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4)=15$,

である．

(1)　各n に対して $T(H_1$，・・・，$H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2)　各n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ.
　ただし$n \geqq 2$とする.
(3)　各n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ.
　ただし$n \geqq 3$とする.

＜考察＞

この問題に取り組み，断続的に 10 時間以上を費やした。思考がなかなか進まず，時間の無駄と戒め，ネット上の解答，解説を読んだ。相当の難問であることを，改めて理解した。それらを基に，解答，解説を書くことも考えたが，むしろ，なにゆえに難問であったかの考察等を記載する方が，後続の読者の皆さんのためになるかと思う。解答と解説はしかるべきサイトで学んで頂きたい。

(1)

空間内の平面は空間を2 つに分割する。2 枚目の平面はさらに2 分割し，3 枚目がさらに2 分割するから，3 枚の平面で空間は最大 8 個の領域に分割されると推定される。すなわち2^3 個の領域となる。しかし，$n \geqq 4$ になると，2^4 個とはならない。8 個の領域すべてを横切る平面が思い浮かばない。平面の数の2乗の領域になるということは，平面がすべての領域を横切ることが前提となる。

平面が平行でなければ，必ず交わるから交線をもつ。すると2 分されていた領域が交線においてさらに2 分されることになる。交線の増加ごとに，領域が2 個増える。平面の数と領域の数の関係は下記のようになる。そこで空間を分割する平面の増加と交線の増加について考察すれば，領域の最大個数についての知見が得られるのではないかと考える。

平面の数n	交線の数	交線の増加	領域の増加	領域の最大個数
0	0	0	0	1
1	0	0	1	2
2	1	1	2	4
3	3	2	4	8
4	${}_4C_2=6$	3	7	15
5	${}_5C_2=10$	4	11	26

$n=4$で平面どうしの交線の数が ${}_4C_2=6$本となったとき，領域の数は $2^n=2^4=16$とならないのはなぜか。そこで，3次元空間ではなく2次元空間，すなわち平面を線で分割する場合はどうかを考え，ヒントを探ることにする。

線の数 n	交点の数	交点の増加数	分割平面の増加数	分割平面の最大数
0	0	0	0	1
1	0	0	1	2
2	1	1	2	4
3	${}_3C_2=3$	2	3	7
4	${}_4C_2=6$	3	4	11
5	${}_5C_2=10$	4	5	16

線の数が n 本のとき， 分割された平面の数は $(n-1)$ 本のときより n 個増加する。 すなわち線の本

数nに対して分割平面の数S_nは，$S_n-S_{n-1}=n$の階差数列をなす。$n=1, 2, 3, ...$

$$S_n-S_0=\frac{1}{2}n(n+1),\quad S_n=\frac{1}{2}n(n+1)+S_0=\frac{1}{2}n(n+1)+1=\frac{n^2+n+2}{2}$$

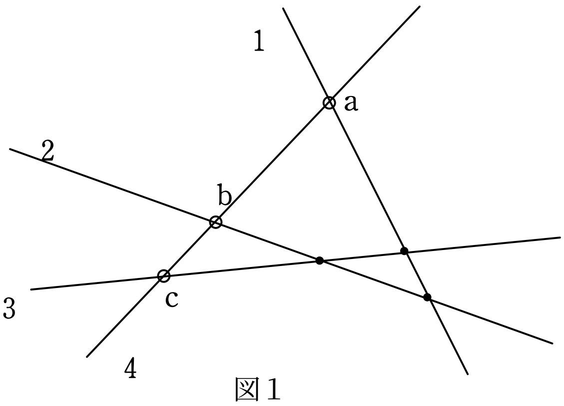

図１

平面を直線で分割するときにできる領域の個数の問題は，容易ではあるが，面白い内容を含んでいる。二次元の問題をこの三次元の問題に利用できないかを考える。すると図１の平面を5番目の平面と考え，直線１，2，3，4は平面1，2，3，4と平面5との交線と考えることが思い浮かぶ。図１からわかることは，平面５はその垂直方向に領域を2 分割するから，図1 の分割平面の数だけ領域が増加するということである。

このような場合，n 枚の平面が分割してつくる空間領域の数 $T(H_1, \cdots, H_n)$は， n 枚目の平面が加わることにより，$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}=\dfrac{n^2-n+2}{2}$ ずつ増加することが解かる。

ここで考慮すべきことは，各nに対して最大の$T(H_1, \cdots, H_n)$はどのような場合か，である。図１のような分割平面の数が最大になる場合だから，各直線どうしが交点をもつ，すなわち平行ではない，という場合である。これは分割する平面どうしの交線が平行ではない，ということだから，$H_1, \cdots,$ H_nが互いに平行ではない場合である。

すると，最大の$T(H_1, \cdots, H_n)=T_m(H_1, \cdots, H_n)$について

$$T_m(H_1, \cdots, H_n)-T_m(H_1, \cdots, H_{n-1})=S_{n-1}=\frac{n^2-n+2}{2},\quad n=2, 3, 4, \cdots$$

したがって，$T_m(H_1, \cdots, H_n)=\dfrac{(n-1)(n^2+n+6)}{6}+2=\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{5}{6}n+1$　（答）

ここまで辿り着くのにいっぱいとなった。(2)，(3)は手に余るので，考察を終わりにしたい。

$\boxed{5}$ (60点)

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える.

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ.

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値Mを既約分数で表し，$b_k=M$となるkをすべて求めよ.

＜解答＞

(1)

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

$f''(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2(x+1)}>0$　$(x>0)$

したがって$f'(x)$は単調増加関数

$f'(1)=\log 2-1=\log 2-\log e=\log\dfrac{2}{e}<0$，さらに$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$,

したがって$f'(x)<0$　$(x>0)$，したがって$f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$は$x>0$で減少する。

(2)

$b_1=\dfrac{(1+1)^{1+1}}{a^1 1!}=\dfrac{4}{a}=\dfrac{4\times 3^4}{2^8}=\dfrac{81}{64}$

$\dfrac{b_k}{b_{k-1}}=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\dfrac{a^{k-1}(k-1)!}{k^k}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k+1}$，$\therefore\ b_k=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k+1}b_{k-1}$

(1)から，$f(k)=(k+1)\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$は$k$の増加とともに減少する。

すると対数の性質により，真数$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$も$k$の増加とともに減少する。

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}+1}=e\fallingdotseq 2.72$，$a=\dfrac{2^8}{3^4}=\dfrac{256}{81}\fallingdotseq 3.16$

したがって，$\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{k_0+1}{k_0}\right)^{k_0+1}\leqq 1$ なる k_0 において，$b_{k_0}\leqq b_{k_0-1}$となる。

$b_1=\dfrac{2^2}{a}=\dfrac{3^4}{2^6}=\dfrac{81}{64}>1$

$b_2=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 b_1=\dfrac{3^4}{2^8}\dfrac{3^3}{2^3}b_1=\dfrac{3^7}{2^{11}}\dfrac{3^4}{2^6}=\dfrac{3^{11}}{2^{17}}>b_1$

$b_3=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{4}{3}\right)^4 b_2=\dfrac{3^4}{2^8}\dfrac{4^4}{3^4}b_2=b_2=\dfrac{3^{11}}{2^{17}}$

$b_4=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{5}{4}\right)^4 b_3=\dfrac{3^4}{2^8}\dfrac{5^4}{2^8}b_3=\left(\dfrac{15}{16}\right)^4 b_3<b_3$

したがって，$k_0=3$において，$b_3=b_2$となり，$k\geqq 4$では，$b_k<b_{k-1}$となる。

以上によって，$b_2=b_3=M=\dfrac{3^{11}}{2^{17}}=\dfrac{177147}{131072}$，$b_k=M$となる$k$は，$k=2$，3　（答）

＜解説＞

(1)

$f(x)$が減少関数であることを示すには，導関数$f'(x)<0$であることを示せばよい。$y=f(x)$のグラフの各点でグラフの曲線の傾きが負だから，グラフの曲線はxの増加とともに下方へ進む。すなわち，$f(x)$は減少していく。

$f'(x)<0$を示すには，$f''(x)$の振る舞いを調べて，$f'(x)$がどのように振る舞うかを考察する。$f''(x)>0$だから，$f'(x)$は増加関数であることがわかる。$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$だから，$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$は0以上になることはない。0以上になれば，$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$のためには，$f'(x)$が減少することが必要となり，$f'(x)$が増加関数であることと矛盾するからである。したがって$f'(x)<0$。

(2)

隣り合う項どうしの関係を明らかにすることで，数列の基本的な性質や振る舞いを明らかにすることができる。まずは前後の項間の差分あるいは比をとってみることだ。ここでは，一般項の表式が乗除算のみだから，前後の項間の比をとってみる。

すると，$\frac{b_k}{b_{k-1}}=\frac{1}{a}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$という非常にきれいな表式になることがわかる。

特に$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$は(1)で扱った関数$f(x)=(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$の真数だから，これを応用するという方針を着想できる。$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$は$k$の増加とともに減少することが(1)から明らかだから，$\frac{1}{a}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}=1$となるような$k$において，$b_k=b_{k-1}$となって，最大値$M$をとることが推定できる。

こういう問題では，$k=1$，2，3,... を計算して，b_kの値とその変化を具体的に知ることが速い。

＜総評＞

昨年記載したことと同じことを記載したくなるが，繰り返しになるのでやめる。

大学センター試験が改革され，2021年1月から大学入試共通試験に衣替えする。その問題作成方針によれば，数学に関しては「数学的な問題解決の過程を重視する。事象の数量等に着目して数学的な問題を見出すこと，構想･見通しを立てること，目的に応じて数･式，図，表，グラフなどを活用し，一定の手順に従って数学的に処理すること，･･･」とある。

こうした問題を受験生に問うことは良いことだとは思うが，各大学がそれぞれの入試において，受験生に求める能力を問うているので，上記の点も各大学の試験に任せても良いように思う。東工大の数学の入試問題から，同大学の受験生の数学的能力に関する強い期待あるいはこだわりが伺えるからである。

$\boxed{1}$

東工大の問題としては，意外に素直な問題だ。まずは正答して落ち着きたい。2次関数が正の値をとる問題と気づくことが必要だ。難易度はB。

$\boxed{2}$

解答方針を案出するのに時間がかかりそうだ。まずは、与えられた積分式から絶対値記号を外して，

取扱い易い表式に変換して考えよう。未知の定数を含む恒等式が得られるのだから，具体的な変数値で得られる表式が成立するように，定数を計算していく。やや煩瑣な計算を含むので，ミスをしないようにしたい。難易度はA－。

3

複素数平面における変数変換に関する問題。やや錯綜するので，上手に図を描いて活用したい。意外な着想を必要とする問題ではないので，難しくはないのだが，ミスし易いので注意。難易度はB＋。

4

解答方針に着想と粘り強い思考が必要な難問であり，この問題に着手した受験生，(1)でも正答できた受験生が何人くらいか知りたいところだ。空間図形問題は苦手，という受験生は多いだろうから，他の4 問に集中し，終わってから本問に取りかかる，ということで良いであろう。難易度はA＋。

受験生の解答状況が非常に低調であるならば，この問題が受験問題として適切か，ということも問われると思う。この問題に取り組むよりも，他の4 問にしっかり取り組んだ方が，高得点を得る可能性が高いからだ。数学が好きで，難問の魅力にひきつけられて，懸命に取り組むうちに，解答に至る前に時間を失ってしまう，という危険性がある。

本問が難問である所以（ゆえん）を考えてみたい。平面で空間を分割する操作を続けるわけだから，平面を一枚付け加えるごとに，空間領域が何個増加するかを考えねばならない。その場合，すでに存在する平面との関係が問題になろう。H_1にH_2を付加する場合，両者が平行であるより交わる場合の方が分割領域の数が多いことは容易にわかる。同様のことはH_3，H_4，・・・と平面の数を増やしても成立するから，最大の空間領域は，既に存在する平面とは平行でない平面を付加することによって，生成されることは容易にわかる。

ところが，平面を付加することによって，空間領域が何個増えるか，考察が進まない。付加する平面が存在するすべての領域を横切ることができれば，領域数は2倍になるはずだ。しかし，H_1，H_2，H_3によってできる8個の領域すべてを通るH_4を考えることができない。平面を付加することによって，増える領域の数を考える着想が必要だ。空間，複数の平面，分割された空間領域を頭の中に思い浮かべ，紙面の余白に立体図を描いたりして考えるが，もともと空間認知力が弱いのか，なかなか着想が浮かばない。

そこで，平面（2 次元）によって空間（3 次元）を分割する代わりに，平面を線（1 次元）によって分割してできる平面領域の数はどうなるか，を考察することが参考になるかも知れないと思いつく。ここに至るまでに相当の時間を費やすことになった。幸い，このことが，平面どうしの交線の増加による分割平面の増加すなわち分割領域の増加という過程に結び付くことがわかり，考察を進めることができた。

5

(1)は対数関数の変化に関する問題で，１次導関数，２次導関数を活用して証明する。(2)は数列の問題で，(1)の結果を活用する。数列の問題だから，項間の関係を明らかにすると，(1)との関係が明瞭になり，解答方針が明らかになる。難易度はB＋。

200729