

数学 (理科) (配点120点) 150分

第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

< 解答 >

$$\left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) = x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^3 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2$$

$$\int \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$= \int x^2 dx + \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^3 dx + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2}, \therefore \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$x = \tan \theta \text{ とおく。 } dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, x=0 \rightarrow \theta=0, x=1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^3 dx &= \int \left(\frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \right)^3 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \sin \theta \right) d\theta = \frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^3 dx = \left[\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$\int \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{\tan \theta}{1+\tan^2 \theta} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int (\sin \theta \cos \theta)^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

$$\therefore \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 dx = \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

したがって,

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \frac{1}{3} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{35}{12} + \frac{\pi}{8} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

定積分の問題だから、まずは被積分関数の不定積分を求める必要がある。被積分関数は関数の積の形式で、そのままでは不定積分を求めるのは容易ではなさそうだ。展開すると、もう少し簡明な関数の和によって表されそうだから、展開して考える。

すると、現れる4つの関数のうち、2つは容易に不定積分が求まることがわかる。他の2つは、グッとにらんでも容易には求まらない。ここで $x = \tan \theta$ なる変数変換によって、 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int d\theta = \theta$ となったことを思い出そう。教科書に記載されている。すると、ありがたいことに、2つとも簡明な被積分関数に変換され、容易に不定積分が求まる。

第 2 問

一辺の長さが1の正方形 ABCD を考える。3点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり、3点 A, P, Q および 3点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。

$\frac{DR}{AQ}$ の最大値、最小値を求めよ。

< 解答 >

$AQ = x$, $DR = y$ とおく。 $0 < x, y \leq 1$

三角形 APQ の面積が $\frac{1}{3}$ であることから、 $AP = \frac{2}{3x}$

$0 < \frac{2}{3x} \leq 1$, $\therefore x \geq \frac{2}{3}$, したがって $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

図1において、

台形 PBCR の面積 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3x} + 1 - y \right) \times 1$

三角形 QDR の面積 $= \frac{1}{2} y(1-x)$

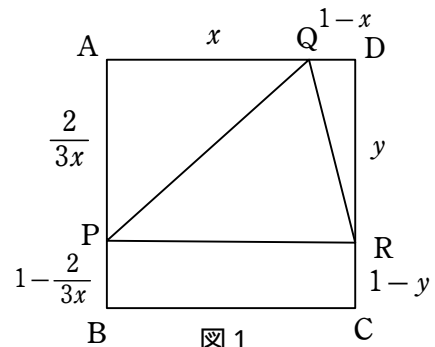
+ $= \frac{1}{3}$ から、 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3x} + 1 - y \right) + \frac{1}{2} y(1-x) = \frac{1}{3}$, $\therefore y = \frac{2}{3x} \left(2 - \frac{1}{x} \right)$

$\frac{DR}{AQ} = \frac{y}{x} = \frac{2}{3x^2} \left(2 - \frac{1}{x} \right)$, $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(2 - \frac{1}{x} \right)$ とおく。

$f'(x) = \frac{3-4x}{x^4}$, $f(x)$ は図2のように変化する。

x	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{9}{8}$		$\frac{32}{27}$		1

図2



$f(x)$ の最大値は $\frac{32}{27}$ ，最小値は1だから， $\frac{DR}{AQ} = \frac{2}{3} f(x)$ の最大値は $\frac{64}{81}$ ，最小値は $\frac{2}{3}$ （答）

< 解説 >

図1のような図を描いて考える。AQ=x, DR=yとおいて，与えられた条件の下で， $\frac{y}{x}$ の最大値，最小値を求めるという解答方針は直ちに決めることができるだろう。

三角形APQの面積=三角形PQRの面積= $\frac{1}{3}$ から，台形PBCRの面積+三角形QDRの面積= $\frac{1}{3}$ であることから， x, y の関係式が求まると予想して式を立ててみる。

x のとりうる値の範囲を求め，導関数の正負から関数値の変化を捉えるという常套手段により，最大値と最小値を求める。

第 3 問

座標空間内に5点 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2)を考える。
線分ABの中点 Mと線分ADの中点Nを通り，直線AEに平行な平面を α とする。
さらに， p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし，点P($p, 0, 2$)を考える。

- (1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。
- (3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体PABCDEの平面 α による切り口のうち $y \geq 0, z \geq 0$ の部分を点(x, y, z)が動くとき，座標平面上で点(y, z)が動く範囲の面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

頂点P, A, C, Eが平面 $y=0$ にあるから，切り口は四角形 PAEC となる。
直線MNは平面 $z=0$ 上にあり， x 軸と点(1, 0, 0)で交わるので，平面 α は z 軸と点(0, 0, -1)で交わる。
したがって，平面 $y=0$ すなわち xz 平面の(1, 0), (0, -1)を通る直線 $z=x-1$ が切り口である。
図1に示す。

(2)

八面体 PABCDEには12個の辺がある。平面 α による切り口が八角形となるということは，平面 α が8個の辺と交わることである。

図2のように， p の値の範囲に応じて，平面 $y=0$ による切り口が変化する。この図から，平面 α による切り口を考察する。(a)では，平面 α は辺 EC, EB, ED, AB, AD, PAの6個と交わる。
(b)では，辺EC, EB, ED, AB, AD, 点Pの6個と交わる。(c)ではEC, EB, ED, AB, AD, PC, PB, PDの8個と交わる。したがって，平面 α による切り口が八角形となるのは $3 < p < 4$ （答）

(3)

八面体を $x=0$ の平面に投影すると図3のように正方形 PDEB となる。

図2(c)における平面 α による切り口で、 $y \geq 0, z \geq 0$ となる部分は、 $x=0$ の平面に投影すると図3の打点部となる。

すなわち、平面 α と直線PC、直線PB、直線ABとの交点をF、G、Mとすれば、直線FG、GMと x 軸、 y 軸に囲まれた領域が打点部である。

直線PCと平面 α との交点Fは、 xz 平面における直線PCの式 $z = \frac{2}{p+2}(x+2)$ と $z = x-1$ との交点として、 $F\left(\frac{p+6}{p}, 0, \frac{6}{p}\right)$ となる。

直線PBと平面 α との交点Gは、 xz 平面における直線PBの式 $z = \frac{2}{p}x$ と $z = x-1$ との交点として、

$$G\left(\frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right) \text{ となる。}$$

直線ABと平面 α との交点Mは、ABの中点だから $M(1, 1, 0)$ である。

以上によって、打点部の面積 $= \frac{1}{2} \times \frac{6}{p} \times \frac{2p-6}{p-2} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{p-2} = \frac{7p-18}{p(p-2)}$ (答)

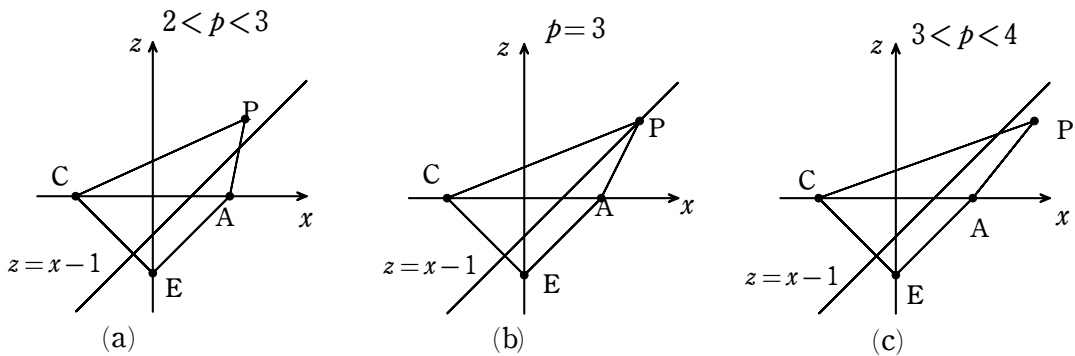
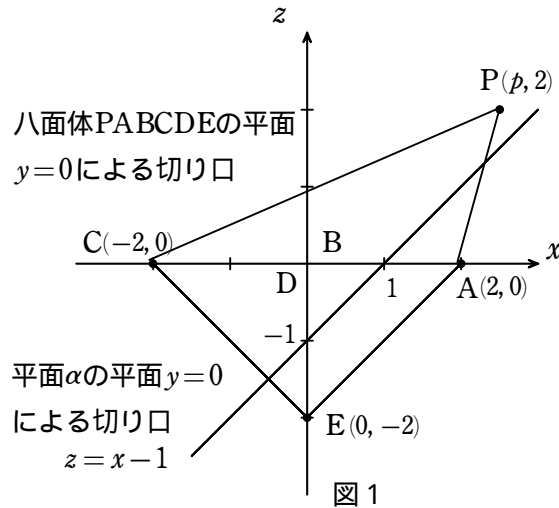
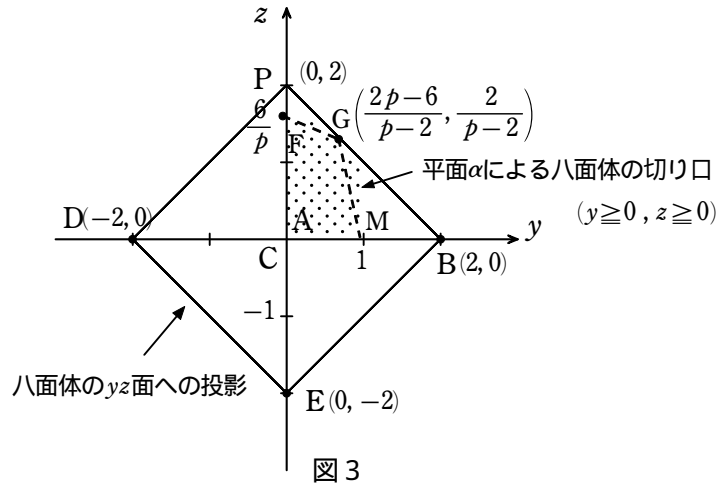


図2



< 解説 >

空間図形の問題。難しい計算を要する問題ではないが、 xz 平面、 yz 平面等の切り口がどのような図形になるか、スムーズに描けないと時間がかかりそうだ。脳内に空間図形の形状を描き、それを紙面等に描写することが得意な生徒には、扱い易い問題だろう。逆に、不得手な生徒には時間を要する問題になろう。

(1)

問題文を読みながら、 (x, y, z) 座標系と対象の空間図形を描き出す。すると、図 4(a)のような正八面体が元となる図形であることがわかる。底面が正方形、側面が正三角形の 2 つの 4 角錐が底面を共有して接続した空間図形である。

図 4(a)の z 軸上の頂点 P が xz 平面内で x 方向に p ずれた図 4(b)の図形が対象となることがわかる。大雑把に図 4 のような図を描いて、対象図形を把握する。

$y=0$ の平面は xz 平面である。頂点 A, P, C, E の y 座標は 0 だから、それらは $y=0$ の平面上にある。頂点 B, D は y 軸上にあるから、 xz 平面では原点に重なる。したがって、八面体 $PABCDE$ の平面 $y=0$ による切り口は四角形 $APCE$ となる。それぞれの (x, z) 座標は明らかだから、容易に図 1 を描ける。

次に AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り、直線 AE に平行な平面を α としたとき、平面 $y=0$ による α の切り口を考える。平面による平面の切り口は、両平面の交線だから、直線になることは当然である。

(2)

点 $P(p, 0, 2)$ が $2 < p < 4$ の変化によって動くとき、平面 α による八面体の切り口がどうなるかを考える。(1)によって得られる図 1 を参考にすると、 P と直線 $z = x - 1$ との位置関係によって、平面 α が横切る八面体の辺が変化することが予測される。

切り口が八角形になるということは、平面 α が八面体の 8 つの辺と交わり、8 個の頂点が定まるということに気づかなければならない。

(3)

平面 α による八面体の切り口で $y \geq 0, z \geq 0$ となる領域は yz 平面でどうなるかを考える。平面 α と辺 PC の交点 F は、辺 PC は xz 平面内にあるから、辺 PC の方程式と直線 $z = x - 1$ の交点である。次に、平面

α と辺PBとの交点Gは、 xz 平面における直線PBの式 $z = \frac{2}{p}x$ と $z = x - 1$ との交点として、

$x = \frac{p}{p-2}$, $z = \frac{2}{p-2}$ が求まる。 yz 平面における直線PBの式は $z = -y + 2$ だから、交点Gの y 座標は

$y = 2 - z = 2 - \frac{2}{p-2} = \frac{2p-6}{p-2}$ となり、 $G\left(\frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right)$ となる。

さらに、平面 α の定義によって辺ABと平面 α との交点はABの中点 $M(1, 1, 0)$ である。

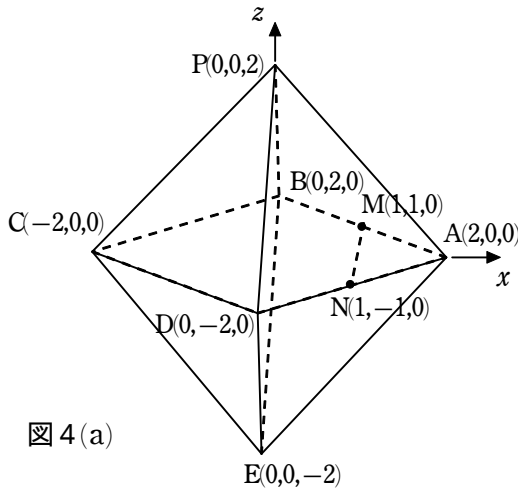


図 4 (a)

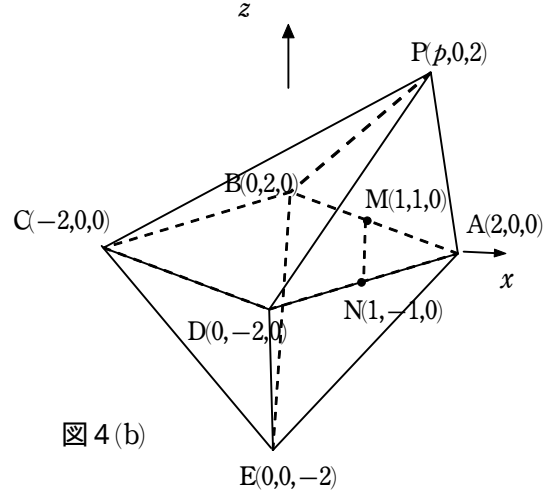


図 4 (b)

第 4 問

n を 1 以上の整数とする。

- (1) $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ の最大公約数 d_n を求めよ。
- (2) $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

< 解答 >

(1)

$5n^2 + 9 = (n^2 + 1) \times 5 + 4$, したがって $5n^2 + 9$ と $n^2 + 1$ の最大公約数 d_n は $n^2 + 1$ と 4 の最大公約数。

k を正の整数として、

n が奇数 $n = 2k - 1$ のとき、 $n^2 + 1 = (2k - 1)^2 + 1 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ は偶数、また 4 の倍数ではない。

したがって $n^2 + 1$ と 4 の最大公約数は $d_n = d_{2k-1} = 2$ 。 (答)

n が偶数 $n = 2k$ のとき、 $n^2 + 1$ と 4 は互いに素。したがって $d_n = d_{2k} = 1$ 。 (答)

(2)

n が奇数のとき、 $\frac{n^2 + 1}{2}$ と $\frac{5n^2 + 9}{2}$ は互いに素。すると、 $(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ が整数の 2 乗であるため

には、 $\frac{n^2 + 1}{2}$ と $\frac{5n^2 + 9}{2}$ とが、ともに整数の 2 乗でなければならない。

ともに整数の 2 乗になると仮定する。

$$\frac{n^2+1}{2} = \frac{(2k-1)^2+1}{2} = 2k^2-2k+1 = m_1^2 \quad , \text{ただし } m_1 \text{ は奇数}$$

$$\frac{5n^2+9}{2} = \frac{5(2k-1)^2+9}{2} = 10k^2-10k+7 = m_2^2 \quad , \text{ただし } m_2 \text{ は奇数}$$

, から k を消去して, $m_2^2 = 5m_1^2 + 2$, したがって $m_2^2 - m_1^2 = 4m_1^2 + 2$

$$(m_2 + m_1)(m_2 - m_1) = 2(2m_1^2 + 1)$$

の左辺は, $m_2 + m_1$ は偶数, $m_2 - m_1$ も偶数だから因数 2^2 をもつ。

の右辺は $2m_1^2 + 1$ は奇数だから, 因数 2 のみで, 2^2 の因数をもたない。これは矛盾である。

, がともに成立するとした仮定が誤り。すなわち, $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

n が偶数のとき, n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素。すると, $(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗であるためには, n^2+1 と $5n^2+9$ とが, ともに整数の 2 乗でなければならない。しかし, n^2+1 は整数の 2 乗にならない。なぜなら, l を整数として, $n^2+1=l^2$ とすれば, $1=l^2-n^2=(l+n)(l-n)$ となって $l+n=1$, $l-n=1$, $\therefore l=1$, $n=0$ となって, 矛盾である。

以上によって, $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

< 解説 >

(1)

整数の問題なのだが, 2つの整式「 n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数」と問われて, これらの公約数となる整式があるのか? などと考えこむと, 時間が過ぎてゆく。ここは直ちに, そのような整式はないのだから, 実際の公約数は何か, と具体的に考えてみよう。

$$n=1: \quad n^2+1=1, \quad 5n^2+9=14, \quad d_1=2$$

$$2: \quad 5, \quad 29, \quad 1$$

$$3: \quad 10, \quad 54, \quad 2$$

$$4: \quad 17, \quad 89, \quad 1$$

$$5: \quad 26, \quad 134, \quad 2$$

$$6: \quad 37, \quad 189, \quad 1$$

さらに暗算して見れば, d_n には 2 と 1 が交互に現れることがわかる。こうして考えると, n が奇数のとき $d_n=2$, 偶数のとき $d_n=1$ と推定できる。

n を偶奇に分けて, 一般的な解として最大公約数が 2 または 1 となることを示せば良い。

そこで, $\frac{5n^2+9}{n^2+1} = 5 + \frac{4}{n^2+1}$ と除算してみる。すると, $5n^2+9$ と n^2+1 の最大公約数は n^2+1 と 4 の

最大公約数であることがわかる (ユークリッドの互除法の原理による, 数Aの教科書に記載)。

(2)

a と b が互いに素な整数とする。 c を正の整数として $ab=c^2$ ならば, $a=c_1^2$, $b=c_2^2$, $c=c_1c_2$ である。このことを説明する。

$a=p_1p_2 \cdots$, $b=q_1q_2 \cdots$ と素因数分解したとき, a と b は共通の素因数をもたない。したがって, a の素因数 p_j がただ 1 つ, また b の素因数 q_k がただ 1 つしか含まれないとすれば, $ab=c^2$ とはならない。 a の素因数 p_j が偶数個, b の素因数 q_k も偶数個含まれて, はじめて $ab=c^2$ となる。すなわち, $a=c_1^2$,

$b=c_2^2, c=c_1c_2$ となる。

これを利用すれば、 n が奇数のとき $(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の2乗であるためには、 $\frac{n^2+1}{2}$ と $\frac{5n^2+9}{2}$ とが、ともに整数の2乗でなければならない。そして、ともに整数の2乗でなければ、 $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗とならない。

第 5 問

以下の問いに答えよ。

(1) n を1以上の整数とする。 x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は、ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し、 $\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ に対し、

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n, \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

< 解答 >

(1)

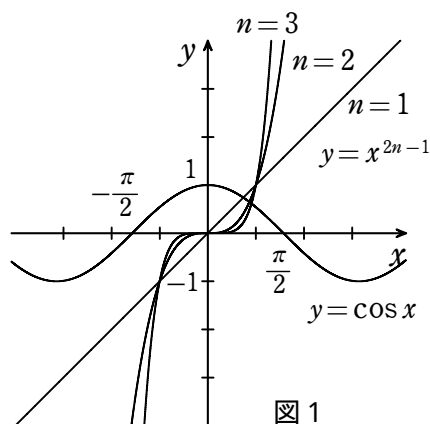
$f_n(x) = x^{2n-1}$ とおく。 $f_n'(x) = (2n-1)x^{2n-2} \geq 0$ 、したがって $f_n(x)$ は単調増加関数

$$f_n(0) = 0, \quad f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} > 1, \quad f_n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} < -1$$

$-\infty < x < \infty$ に対して $-1 \leq \cos x \leq 1$ であり、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対して $1 \geq \cos x \geq 0$ だから、

$y = x^{2n-1}$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフは、図1のように $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において1回だけ交わる。

すなわち、方程式 $x^{2n-1} = \cos x$ はただ一つの実数解をもつ。



(2)

$$0 < a_n < \frac{\pi}{2} \text{ であり, } f_n(a_n) = (a_n)^{2n-1} = \cos a_n < 1$$

$$f_n(1) = (1)^{2n-1} = 1 \text{ であり, } f_n(x) \text{ は単調増加だから, } a_n < 1,$$

$$\cos x \text{ は } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において単調減少だから, } \cos a_n > \cos 1$$

(3)

$$(2) \text{ から, } 0 < a_n < 1$$

$$(a_n)^{2n-1} = \cos a_n > \cos 1, \text{ したがって } a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

$$\text{したがって } (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0, 0 < \cos 1 < 1 \text{ であるから, } \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$$

$$\text{したがって, } \text{ から, はさみうちの原理より } a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (\text{答})$$

$$(a_n)^{2n-1} = \cos a_n, \therefore a_n^{2n} = a_n \cos a_n, \text{ したがって } a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{\cos 1} \quad (\text{答})$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ だから, } h \text{ を微小として, } a_n = 1 - h < 1 \text{ とおけば, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{h \rightarrow 0} a_n = 1$$

$$a_n^n - b = \sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}$$

$$\frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \frac{b - a_n^n}{a - a_n} = \frac{\sqrt{\cos 1} - \sqrt{a_n \cos a_n}}{1 - a_n} = \frac{\sqrt{\cos 1} - \sqrt{(1-h)\cos(1-h)}}{h}$$

$$g(x) = \sqrt{x \cos x} \text{ とおけば, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 1} - \sqrt{(1-h)\cos(1-h)}}{h} = g'(1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\cos x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \sin x, g'(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\cos 1} - \frac{1}{2} \frac{\sin 1}{\sqrt{\cos 1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 1 - \sin 1}{\sqrt{\cos 1}} \right)$$

$$\text{したがって, } c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

(1)

実数解の存在や個数を考察するとき、グラフの利用が効果的である場合が多い。手書きグラフだから、大雑把なものになるが、要点をふまえたものでありたい。

(2)

当然と思われる事実の証明だが、結論への筋道を明確にして、混乱することのないように。

$a_n < 1$ をいえば、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\cos x$ は単調減少だから、 $\cos a_n > \cos 1$ である。

(3)

a_n を求めるために、 $(a_n)^{2n-1} = \cos a_n > \cos 1$ 、 $a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$ を導くことがポイントである。

$$\frac{a_n^n - b}{a_n - a} = \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} = \frac{\sqrt{(1+h)\cos(1+h)} - \sqrt{\cos 1}}{h}$$

$$g(x) = \sqrt{x \cos x} \text{ において, } g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+h)\cos(1+h)} - \sqrt{\cos 1}}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^n - b}{a_n - a}$$

解る。ここでは, $a_n < 1$ だから, $a_n = 1 - h$ において扱う。

第 6 問

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ および実数 a, b が, 次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1 : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は相異なる。

条件 2 : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3 : 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり, 虚部は 0 でない。

- (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち, ちょうど 2 つが実数であり, 残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。
- (2) b を a で示せ。
- (3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

< 解答 >

(1)

$$z^4 - 2z^3 - 2az + b = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta) \quad \text{とおける。}$$

条件 3 から, $\alpha\beta + \gamma\delta = ci$, ただし $c \neq 0$ の実数

2 次以上の実数係数の方程式において, 複素数解があれば, その共役な複素数も解であることが知られている。すると 4 次方程式の解 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ について, ありえるのは下記の (a), (b), (c) のいずれかである。

(a) すべて実数解

条件 3 を満たさないので (a) はありえない。

(b) 2 組の共役複素数解 (複素数とその共役複素数の解が 2 組)

$\beta = \bar{\alpha}, \delta = \bar{\gamma}$ とすれば, $\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} \neq ci$ となって, 条件 3 を満たさない。

$\gamma = \bar{\alpha}, \delta = \bar{\beta}$ とすれば, $\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\beta + \overline{\alpha\beta} \neq ci$ であり, 条件 3 を満たさない。

$\delta = \bar{\alpha}, \gamma = \bar{\beta}$ とすれば, $\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\beta + \bar{\beta}\bar{\alpha} = \alpha\beta + \overline{\alpha\beta} \neq ci$ であり, 条件 3 を満たさない。

したがって (b) はありえない。

(c) 2 つの実数解と 1 組の共役複素数解

以上によって, ありえるのは (c) の場合で,

ちょうど 2 つが実数であり, 残りの 2 つは互いに共役な複素数である。

(2)

(1) から, 4 次方程式は下記のように実数解をもつ 2 次方程式と共役複素数解をもつ 2 次方程式の積となる。

$$z^4 - 2z^3 - 2az + b = (z^2 - p_1z + q_1)(z^2 - p_2z + q_2) = 0 \quad , \text{ただし } p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ は実数}$$

を満たすために, α と γ が実数解, β と δ が複素数解とする(実数解と複素数解が逆でも良い)。

$$\text{2次方程式の解と係数の関係から, } p_1 = \alpha + \gamma, q_1 = \alpha\gamma, p_2 = \beta + \delta = \beta + \bar{\beta}, q_2 = \beta\delta = \beta\bar{\beta}$$

条件2から

$$p_1 + p_2 = 2$$

$$p_1p_2 + q_1 + q_2 = 0$$

$$p_1q_2 + p_2q_1 = 2a$$

$$q_1q_2 = b$$

$$\text{条件3から, } \alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\beta + \gamma\bar{\beta} = (\alpha + \gamma)\beta_1 + (\alpha - \gamma)\beta_2i = ci, \therefore \alpha + \gamma = p_1 = 0 \quad ,$$

ただし $\beta = \beta_1 + \beta_2i$ とおき, β_1, β_2 は実数

$$\text{すると, から } p_2 = 2 \quad , \quad \text{ から } q_1 + q_2 = 0, \therefore q_2 = -q_1 \quad ,$$

$$\quad , \quad \text{ から } p_2q_1 = 2q_1 = 2a, \therefore a = q_1 \quad , \quad \text{ から } q_1q_2 = -q_1^2 = b$$

$$\quad , \quad \text{ から } b = -a^2 \quad (\text{答})$$

(3)

$$p_1 = \alpha + \gamma = 0, a = q_1 = \alpha\gamma = -\alpha^2, \therefore \alpha = \pm\sqrt{-a}, \text{ただし } a < 0$$

$$p_2 = \beta + \delta = \beta + \bar{\beta} = 2\beta_1 = 2, \therefore \beta_1 = 1,$$

$$q_2 = \beta\delta = \beta\bar{\beta} = \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 + \beta_2^2, \therefore \beta_2^2 = q_2 - 1 = -a - 1 > 0, \therefore \beta_2 = \pm\sqrt{-(1+a)}, \text{ただし } a < -1$$

$$\alpha + \beta = \pm\sqrt{-a} + (1 \pm \sqrt{-(1+a)})i = (\pm\sqrt{-a} + 1) \pm \sqrt{-(1+a)}i, (a < -1)$$

以上によって, 複素数 $\alpha + \beta = (x, yi)$ は, $a < -1$ において

$$(x, yi) = (\sqrt{-a} + 1, \sqrt{-(1+a)}i)$$

$$= (\sqrt{-a} + 1, -\sqrt{-(1+a)}i)$$

$$= (-\sqrt{-a} + 1, \sqrt{-(1+a)}i)$$

$$= (-\sqrt{-a} + 1, -\sqrt{-(1+a)}i)$$

$$\text{から, } (x-1)^2 - y^2 = 1, (2 < x, 0 < y)$$

$$\text{から, } (x-1)^2 - y^2 = 1, (2 < x, y < 0)$$

$$\text{から, } (x-1)^2 - y^2 = 1, (x < 0, 0 < y)$$

$$\text{から, } (x-1)^2 - y^2 = 1, (x < 0, y < 0)$$

以上によって, 複素数 $\alpha + \beta = (x, yi)$ がとりうる範囲は図1の双曲線 $(x-1)^2 - y^2 = 1$ で, 点 $(0, 0), (2, 0)$ を除く。

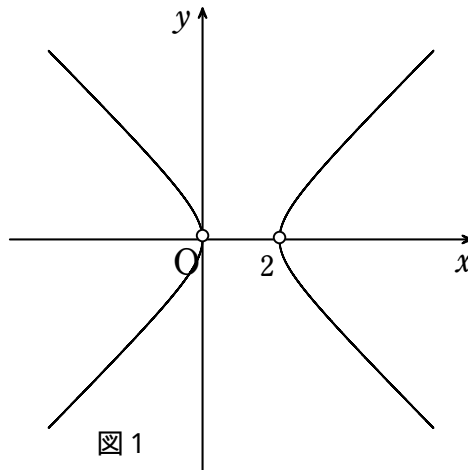


図 1

< 解説 >

4次方程式をどのように扱うべきか、悩んだ。数 の教科書にごく簡単な記載があるだけである。

(1)

4次方程式 の複素数解 α について、 $\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2a\alpha + b = 0$

両辺の共役複素数についても等号は成立するから、 $\overline{\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2a\alpha + b} = 0$

$\overline{\alpha^4} = \overline{\alpha^2 \alpha^2} = \overline{\alpha^2} \cdot \overline{\alpha^2} = \overline{\alpha}^2 \cdot \overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha}^4$ 、 $\overline{\alpha^3} = \overline{\alpha \alpha^2} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\alpha^2} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha}^3$ 、 $\overline{a} = a$ 、 $\overline{b} = b$ だから、

は $\overline{\alpha}^4 - 2\overline{\alpha}^3 - 2a\overline{\alpha} + b = 0$ 、したがって α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ も4次方程式 の解である。

このように、複素数解があればその共役複素数も解であるという理解あるいは気づきがないと、この問題の扱いは難しくなる。

条件 1, 2, 3 から得られる下記の条件から、4つの解の2つが実数であり、残りの2つは互いに共役な複素数であることを示そうと試みても、容易には示すことができない。

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha + \alpha\gamma + \beta\delta = 0$$

$$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = 2a$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = b$$

$$\alpha\beta + \gamma\delta = ci$$

したがって、この問題のポイントは複素数解の共役な複素数も解となることである。これをまず示すことができれば、解答のように(a)すべて実数解、(b)2組の共役複素数解、(c)2つの実数解と1組の共役複素数解の3種について妥当性を調べ、(c)のみが該当することを明らかにすれば良いことになる。

実数係数の4次方程式は2つの2次方程式の積に分解される。この問題のように4つの解の存在を前提にすれば、このことは成立する。しかし2つの2次方程式の係数が実数かどうかは自明のこととはいえない。少なくとも、数 の教科書には記載がない。

そこで、実数係数の4次方程式は実数係数の2つの2次方程式の積に分解される、ということを前提として、解答を記述しても正解とされるだろう。そうすれば、解答は非常に容易になる。すなわち、実数係数の2次方程式の解は実数解か、あるいは共役な複素数解か、いずれかであるからだ。

いずれにしても難しそうだと諦めないで、自分が学んだ範囲内の知識で、論理を進めることも必要だ。論理的整合性を求めるあまり、時間超過で次の問題に手をつけられない、などのことがないようにしたい。

(2)

(1)を正確に示せなくても、(1)を前提にしてこの問題を解くことは可能である。上記のように、この4次方程式が2つの2次方程式に分解されるとして、解と係数の関係と条件1, 2, 3とから容易に b を a で示すことができる。

α が実数解としたとき、 β を実数解とすれば、 γ と δ が共役な複素数解となるので、条件3が成立しない。したがって γ か δ のいずれかが実数解となる。ここでは γ を実数解として議論を進めるが、 δ を実数解、 γ を複素数解としても議論の内容は変わらない。

(3)

実数解 α 、複素数解 β を具体的に求めて、複素数 $\alpha+\beta$ が複素数平面 (x, yi) で、どのような範囲にあるかを求める。

< 総評 >

東大の数学問題は、難易度をバランス良く出すことを心がけていると感じる。全問を一読して、問題の主旨を理解し難易を判断し、解答順序を大雑把に決める。まずは第2問を完答して落ち着いて他の問題に取り組みたい。

第1問

一見複雑な被積分関数の定積分の問題だが、教科書に掲載されている変数変換によって、容易に不定積分を求めることができる。計算ミスに気をつけて完答しよう。難易度はB。

第2問

図形における容易に定式化可能な量に関する最大値、最小値問題。導関数により極値を求めるという常套的方法を用いる。解答方針の決定に困難はなかろう。難易度はC。

第3問

正八面体の1つの頂点の位置をずらした空間図形を平面で切ったときの切り口に関する問題。直線の辺からなる図形の問題だから、計算が煩瑣になるものではない。しかし、平面による空間図形の切り口を平面座標系に投影した場合の図形や直線と平面との交点の座標を求めるなどのためには、空間図形の形状、辺の直線の方程式、平面 α の特性などについて、把握しなければならない。

これらを脳内に描き、正答を導くことがやや複雑煩瑣である。難易度はA-。

第4問

整数問題である。整式と整式の最大公約数を求めよ、ということから、整式が一般解として存在するのかと、考え過ぎないこと。こういう場合、 $n=1, 2, \dots$ と具体的な場合について最大公約数を求め、その結果を考察して、一般解を求めるようにしよう。すると、 n の偶奇に応じて、最大公約数が決まることが直ちに推定できる。ここで、それだけを記載しても、部分点は得られるだろう。しかし、その根拠を示さなければならない。

ここで $5n^2+9$ と n^2+1 の整式の類似性に着眼して、ユークリッドの互除法の適用を思い出すことがポイントである。ユークリッドの互除法によって、最大公約数を求める対象の数を小さくして、求める最大公約数の見通しを良くすることができる。着眼、着想が必要で、論理を的確に追う必要があるため、難易度はB+。

第5問

グラフを上手に活用しながら，考察を進めたい。c が $g(x)=\sqrt{xcos x}$ の $x=1$ における微分係数になっていることに気づくことが重要だ。こういう気づきは演習問題をこなし，直感を養っておくことから生まれるであろう。着眼，着想が必要なので，難易度はB+。

第6問

一見，易しそうな問題であるが，案外手強い。というのも，高校数学では少ししか記載されていない4次方程式の扱いに関わる問題だからだ。まずは複素数解の共役な複素数も解であることを示せば，後の議論が容易になる。この気づきがないときは，実数係数の4次方程式は実数係数の2次方程式の積に分解される，との前提で解答することでも良いだろう。少々論理的飛躍があるのだが，高校数学の自分の知識の範囲で記載すれば，80%以上の部分点が得られるであろう。

(1)の事実を前提にすれば，(2)，(3)は容易に計算できるのでから，(1)の論証に時間を取られ過ぎないことが大事だ。難易度A。

191220

数学（文科）（配点80点）100分

第 1 問

座標平面の原点を O とし， $O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を辺の長さが1の正方形の頂点とする。3点 $P(p, 0), Q(0, q), R(r, 1)$ はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり，3点 O, P, Q および3点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする。

- (1) q と r を p で表し， p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\frac{CR}{OQ}$ の最大値，最小値を求めよ。

< 解答 >

(1)

図1を参照して考える。

$$\text{三角形OPQの面積} = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{3}, \therefore q = \frac{2}{3p} \quad (\text{答})$$

$$\text{三角形PQR} = \text{台形OPRC} - \text{三角形OPQ} - \text{三角形CQR}$$

したがって

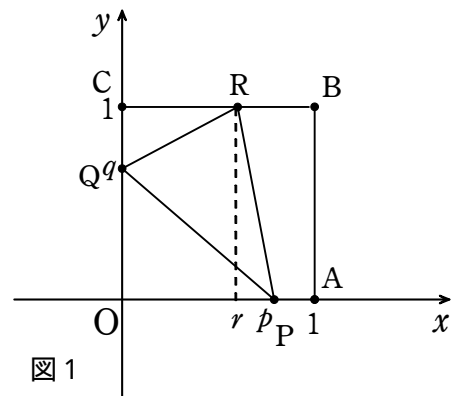
$$\text{三角形PQRの面積} = \frac{1}{2}(p+r) - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{2}(1-q)r = \frac{1}{3}, \therefore r = \frac{1}{2}p(4-3p) \quad (\text{答})$$

$$p = \frac{2}{3q}, 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1 \text{ だから, } \frac{2}{3} \leq p \leq 1 \quad (\text{答})$$

$$\text{同様に, } \frac{2}{3} \leq q \leq 1 \quad (\text{答})$$

$$r = \frac{1}{2}p(4-3p) = -\frac{3}{2}\left(p^2 - \frac{4}{3}p\right) = -\frac{3}{2}\left\{\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right\}$$

$$p = \frac{2}{3} \text{ のとき最大値 } r = \frac{2}{3}, p = 1 \text{ のとき最小値 } r = \frac{1}{2} \text{ だから, } \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$



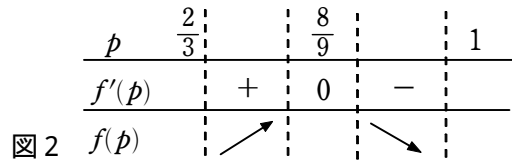
(2)

$$\frac{CR}{OQ} = \frac{r}{q} = \frac{1}{2}p(4-3p) \times \frac{3}{2}p = \frac{3}{4}p^2(4-3p)$$

$$f(p) = p^2(4-3p) \text{ とおく。 } f'(p) = 8p - 9p^2 = -9p\left(p - \frac{8}{9}\right)$$

$$f(p) \text{ は図 2 のように変化する。 } f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81} \times \frac{4}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}, f(1) = 1$$

$$\text{したがって, } \frac{CR}{OQ} = \frac{3}{4}f(p) \text{ の最大値は } \frac{64}{81}, \text{ 最小値は } \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$



< 解説 >

図 1 のような図を大雑把に描いて考える。ここではソフトによって描いたので、かなり正確な図だが、およその図を手書きできるようにしておく。

(1)

三角形OPQおよび三角形PQRの面積を p, q, r によって表現し、それらの面積が $\frac{1}{3}$ であることが

ら、 p, q, r の関係式と範囲を求める。

(2)

$\frac{CR}{OQ}$ を p の関数として表現し、導関数によって関数の極値と変化を求める常套的方法により、最大値、最小値を求める。

第 2 問

O を原点とする座標平面において、点 A(2, 2) を通り、線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P(p, q) が次の 2 つの条件を満たしながら動く。

$$\text{条件 1 : } 8 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \leq 17$$

条件 2 : 点 O と直線 l の距離を c とし、点 P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき $cd \geq (p-1)^2$
このとき、P が動く領域を D とする。さらに、 x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1) D を図示し、その面積を求めよ。

(2) $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$\text{条件 1 は, } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 2p + 2q, \therefore 8 \leq 2p + 2q \leq 17, \therefore 4 \leq p + q \leq \frac{17}{2}$$

直線 l の方程式は $y = -(x-2) + 2 = -x + 4$, 点 O と l の距離は $c = 2\sqrt{2}$

$$\text{点 } P(p, q) \text{ と直線 } l \text{ の距離は } d = \frac{|p+q-4|}{\sqrt{2}} = \frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{条件 2 は, } cd = 2\sqrt{2} \times \frac{p+q-4}{\sqrt{2}} = 2(p+q-4) \geq (p-1)^2$$

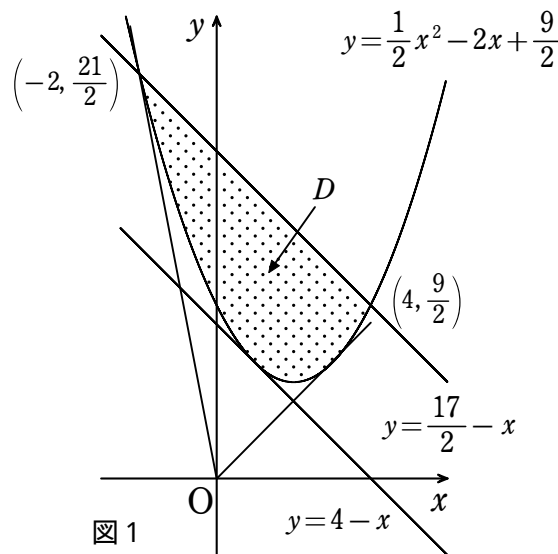
$$\text{を整理すると, } q \geq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2}$$

$$\text{から } 4 \leq x+y \leq \frac{17}{2}, \quad \text{から } y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2},$$

' , ' を満たす図 1 に示す打点部が点 $P(p, q)$ が動く領域 D である。境界線を含む。

$$y = \frac{17}{2} - x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \quad \text{の交点の } x \text{ 座標は } x = -2, 4$$

$$\begin{aligned} D \text{ の面積は } S &= \int_{-2}^4 \left\{ \left(\frac{17}{2} - x \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \right) \right\} dx = \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^4 = 18 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2)

図 1 を参照しながら考える。原点 O から領域 D の点に引いた線と x 軸正方向のなす角が θ 。

O から $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ に引いた 2 本の接線が D の端となるので, θ の範囲と考えられる。

$$\frac{dy}{dx} = x - 2, \text{ 接点を } (p_t, q_t) \text{ とすれば, 接線が原点 } O \text{ を通るから } p_t - 2 = \frac{q_t}{p_t}, \therefore q_t = p_t^2 - 2p_t$$

$$q_t = \frac{1}{2}p_t^2 - 2p_t + \frac{9}{2} \text{ だから, } p_t^2 - 2p_t = \frac{1}{2}p_t^2 - 2p_t + \frac{9}{2}, p_t^2 = 9, p_t = \pm 3$$

$p_t=3$ は D に含まれるが, $p_t=-3$ は含まれない。

$p_t=3$ のとき, 接線の傾きは $p_t-2=1$ となって θ は最小, $\therefore \cos \theta_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

と の交点 $(-2, \frac{21}{2})$ と O とを結ぶ線で θ が最大, $\therefore \cos \theta_{\max} = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (\frac{21}{2})^2}} = \frac{-4}{\sqrt{457}}$

O と領域 D の点を結ぶすべての直線は上記 2 つの直線の間に入る。

以上の結果, $\frac{-4}{\sqrt{457}} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (答)

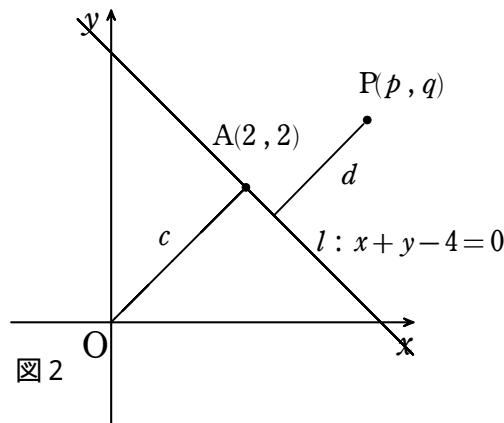
< 解説 >

(1)

図 2 のような図を描いて考える。条件 1, 2 を p, q によって表現し, 条件を満たす (p, q) を xy 座標面上に図示すれば良い。点と直線の距離の公式は覚えていないと, 計算に時間をとられる。数学の教科書によれば, 点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

図 1 が描ければ, 2 次関数の定積分問題だから, 面積計算は難しいものではない。



(2)

$\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ と条件 1, 2 から $\cos \theta$ の範囲を計算しようと考えたと, 迷路に入り込む。ここは, 図 1 を見つめ, θ が最大, 最小となる場合について考察するのが速い。すると, 原点 O から放物線に接線を引いた場合に, 最小, 最大となることが直ちに理解できる。接点が領域 D に含まれない場合は, 領域 D の端の点と O を結ぶ直線の傾きとなることも理解できる。

第 3 問

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また, 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ、表が出れば点Pを反時計回りに隣接する頂点に移動させ、裏が出れば点Pを時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば、点Pが点Hにある状態で、投げたコインの表が出れば点Aに移動させ、裏が出れば点Gに移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S : 操作を10回行った後に点Pが点Aにある。

事象 T : 1回目から10回目の操作によって、点Pは少なくとも1回、点Fに移動する。

- (1) 事象 S が起こる確率を求めよ。
- (2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

< 解答 >

(1)

10回の操作で起こる表と裏の組み合わせの場合の数は 2^{10} 通り。

点Pが点Aにあるということは10回の操作について、(表の回数) - (裏の回数) = 8の倍数となる場合である。すなわち

(a) 表と裏が出る操作が同数の5回

表が5回出る場合の数は ${}_{10}C_5 = 252$ 通り。

(b) 表が9回出て反時計回りに点Pが移動し、裏が1回出て点Aに至る。

表が9回出る場合の数は ${}_{10}C_9 = 10$ 通り。

(c) 裏が9回出て時計回りに点Pが移動し、表が1回出て点Aに至る。

表が1回出る場合の数は ${}_{10}C_1 = 10$ 通り。

上記(a), (b), (c)は排反事象だから、10回の操作によって点Pが点Aにある場合の数はそれらの和

したがって、事象 S が起こる確率は $\frac{252 + 10 + 10}{2^{10}} = \frac{17}{64}$ (答)

(2)

事象 S が起こる上記(a), (b), (c)について事象 T が起こる場合の数は以下の通り。

(a) 点Pが点Fに至る場合は以下の場合

裏0回の操作でFに至るのは、表が連続5回出る場合で、1通り。

裏3回の操作でFに至るのは、裏が連続3回出る場合で、 ${}_3C_3 \times {}_2C_7$ 通り = 21通り。

裏4回の操作でFに至るのは、裏が4回、表が1回出る場合で、 ${}_2C_3 \times {}_1C_5$ 通り = 15通り。

(ただし、裏の操作が初回から3回連続する場合を除く)

裏5回の操作でFに至るのは、裏が5回、表が2回出る場合で、 $({}_5C_2 - 1) \times {}_3C_3$ 通り = 9通り。

(ただし、裏の操作が初回から3回連続する場合を除く)

(b) 必ずFを通過するので事象 T に含まれ、場合の数は10通り。

(c) 必ずFを通過するので事象 T に含まれ、場合の数は10通り。

これらは排反事象だから、事象 S と事象 T がともに起こる場合の数は、これらの和だから、

$$\text{その確率は } \frac{1+21+15+9+10+10}{2^{10}} = \frac{33}{512} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

確率の問題。図1のような図を描いて考えよう。

(1)では、10回の操作によって点Pが点Aにあるための条件(ルール)として、(表の回数) - (裏の回数) = 8の倍数というルールを案出することが必要である。具体的な条件を考えていく過程で気づく可能性がある。同一方向8回移動で、点Aに戻ることから、速やかに気づきたい。

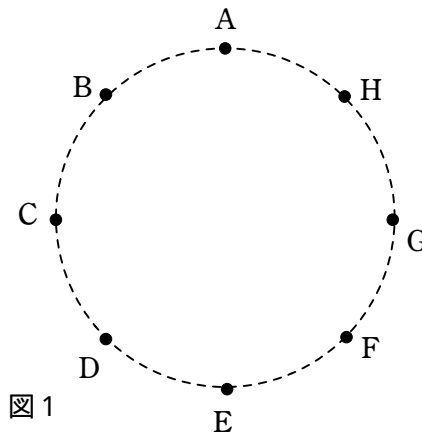
(2)はFに移動する場合の一般的なルールは何かと考えても、いろいろな場合があつて、なかなか焦点が定まらない。いたずらに時間が経過しそうな問題である。そこで、まずは考える方針を明確にすることを試みよう。点Fに移動するということは、操作によってちょうど点Fに至り、その後の移動は任意、というふうに考え方を整理する。

(1)(a)の事象Sの場合について考える。ちょうど点Fへ至るには、いくつかの場合があることに気づく。点Aから3回の操作で、ちょうど点Fに至る場合は連続して3回裏が出る場合である。4回の操作で、ちょうど点Fに至ることはない。5回の操作なら、1回の表と4回の裏とで、ちょうど点Fに至る。ただし、裏の操作が初回から3回連続するのは、3回の操作で点Fに至るのと同じだから場合の数に含めない。

6回の操作では、ちょうど点Fに至ることはない。7回の操作なら、2回の表と5回の裏とで、ちょうど点Fに至る。ただし、初回から連続して3回裏が出るのは、5回の操作のときと同様に場合の数に含めない。8回、9回、10回の操作では、ちょうど点Fに至ることはない。

これらの操作でちょうど点Fに至った後は、残りの操作は任意だから、場合の数は表と裏の操作の組み合わせの数となる。

(1)(b)(c)の事象Sでは、必ず点Fを通過するから、それらのすべての場合が事象Tに含まれる。



第4問

Oを原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x| + |y| \leq 1$$

が表す領域をDとする。また、点P, Qが領域Dを動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ をみたす点Rが動く範囲をEとする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし, 不等式

$$|x-a| + |y-b| \leq 1$$

が表す領域を F とする。また, 点 S, T が領域 F を動くとき, $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする。 G は E と一致することを示せ。

< 解答 >

(1)

$$|x| + |y| \leq 1$$

(x, y) の存在領域が第 1 ~ 4 象限に応じて, は以下ようになる。

第 1 象限: $x + y \leq 1$

第 2 象限: $-x + y \leq 1$

第 3 象限: $-x - y \leq 1$

第 4 象限: $x - y \leq 1$

したがって, が表す領域 D は図 1 の小さな菱形とその内部。

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + (-\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QP}$$

$|\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{QP}|$ が最大となるのは, 点 Q, P が菱形の辺上にあり, 点 Q, O, P が一直線のとき,

すなわち $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{OP}$, したがって $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OP}$

したがって 点 R の動く範囲 E は点 P の領域 D と相似で 2 倍の大きさ

すなわち, E は図 1 に示す $|x| + |y| \leq 2$ の菱形とその内部。

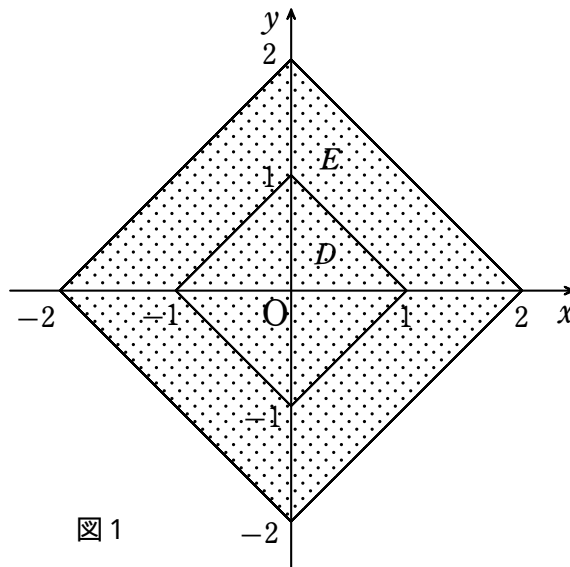


図 1

(2)

$$|x-a| + |y-b| \leq 1$$

(1)を参考にする, が表す領域 F は点 $A(a, b)$ を中心とする対角線長 2 の菱形で, 領域 D の菱形の中心 $O(0, 0)$ を点 $A(a, b)$ に移動したものである。

したがって, 領域 F の点 S, T に 1 対 1 で対応する点 P, Q が領域 D にあり,

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OQ}$ となる。

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}) = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$$

すなわち、点 S, T が領域 F を動くとき、点 P, Q が領域 D を動くことと同じだから、点 U が動く領域 G は点 R が動く領域 E と一致する。

< 解説 >

(1)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QP}$ を導くことにより、 \overrightarrow{QP} の動く範囲を考えれば良いことがわかる。

別の考え方を示そう。

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{とおけば}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}$$

すなわち領域 (X, Y) は領域 (x, y) をベクトル $\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}$ だけ移動したものだ。

点 $(-u, -v)$ は原点 $O(0, 0)$ の移動した点であり、 \overrightarrow{OR} がつくる菱形の中心である。

$Q(u, v)$ は領域 D を動くから、点 $(-u, -v)$ も領域 D を動く。領域 D の菱形の辺上を $Q(u, v)$ が動くとき、 \overrightarrow{OR} がつくる菱形の中心 $(-u, -v)$ も辺上を動くから、 \overrightarrow{OR} がつくる菱形の辺は図 2 の破線の菱形の辺上を動くことになる。

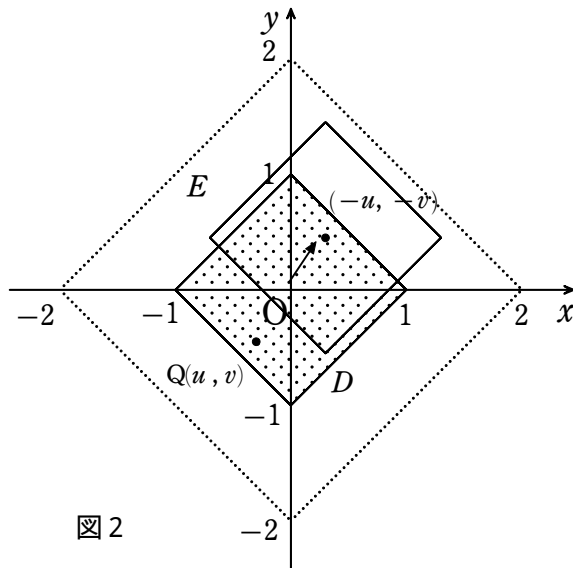


図 2

(2)

図 3 のような図を大雑把に描いて、

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AT}$$

$$= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} \text{であることを理解しよう。}$$

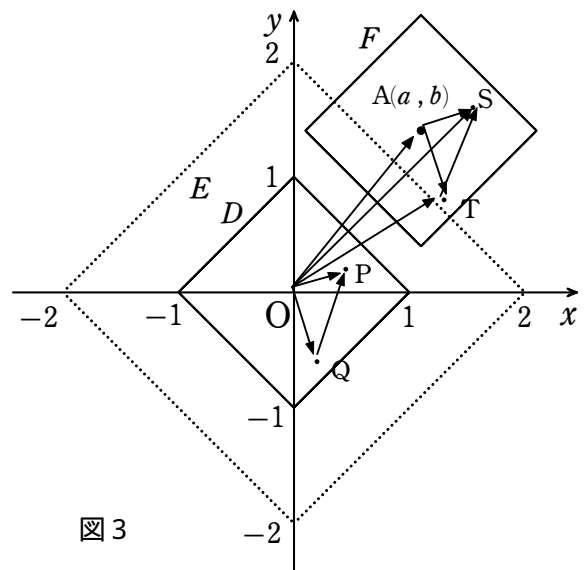


図 3

< 総評 >

第1問のみ理科の第2問に類似の問題であったが、他は別の問題であった。例年は、3問ほど理科の問題をベースにした問題であった。第1問を完答して落ち着き、第2問と第4問をほぼ正答して、第3問に臨みたい。

第1問

図形の計算問題で、大雑把な図を描いて、題意を理解する。解答方針は容易に打ち出すことができよう。文科にとっても容易な問題で、着実に正答したい。難易度はC。

第2問

図形と関数の問題で、接線の方程式、ベクトルの内積、点と直線の距離などの知識をベースとする。解答方針に小さな気づきが必要であるが、特段の難しさを含むものではない。文科の数学としては標準的なレベルの問題で、難易度はB。

第3問

理科にはなかった確率の問題が出題された。文科にとって、確率統計の考え方は重要ということだろうか。この問題では、まずは条件を満たす場合の数を考える。(1)は点Aをスタートして再び点Aに戻るといった条件を満たす操作の条件(ルール)を案出することは、難しくない。ただし、表、裏の操作が回数以外に、9回と1回というルールもあることを忘れないこと。難易度はB。

(2)は事象S、事象Tがともに起こるルールを案出することは難しい。事象Sを前提として、事象Tとなる条件(ルール)を逐一考えて、それを満たす場合の数を考えねばならないからだ。文科受験者のうち、正答できた者の割合はどのくらいであろうか。難易度A。

第4問

関数による図形の領域とベクトルによる領域の移動に関する問題。ベクトルの加減算による点の移動、そして図形の移動についての感覚と論理性を養っておきたい。証明の記述が必要であるが難しいものではない。難易度B。

191116