令 和 2 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学（理系）

200 点満点

≪配点は，一般入試学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに，解答用ページ，計算用ページ，余白ページをあわせて 16 ページある．
3. 問題は全部で 6 題ある（1 ページから 3 ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して見開きに隣接する計算用ページに解答の続きを書いてもよい．その場合は，解答用ページに「計算用ページに続く」旨を記すこと．このときに限って，計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．また，余白ページに書かれたものは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページまたは余白ページに書いて，残しておいてもよい．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

1

(30 点)

a, b は実数で，$a > 0$ とする．z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a, b と$(*)$の 3 つの解を求めよ．

2

(30 点)

p を正の整数とする．α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で，$|\alpha| > 1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n + \beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ．

3

(35 点)

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X, Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

4

(35 点)

正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a) = b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である.

m, n は整数で, 次の条件を満たすとする.

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない.

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

5

(35 点)

縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の 1 例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6 (35 点)

x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1 + x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．このとき，V の体積を求めよ．

問題は，このページで終わりである．