

2020 (R2)年度 京都大学 前期 入学試験 数学解説

数学 (理系) 教育学部 (理系)、医学部 (人間健康科)

総合人間学部 (理系)、経済学部 (理系)

理学部、工学部、薬学部、医学部 (医学科)、農学部

数学 (文系) 総合人間学部 (文系)、文学部、教育学部 (文系)、法学部、経済学部 (一般)

数学 (理系)

200点満点, 150分

1

(30点)

a, b は実数で, $a > 0$ とする. z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ.

< 解答 >

$(*)$ の 3 つの複素数解を α, β, γ とする.

3 次方程式は少なく 1 つの実数解をもつ. その実数解を γ とする.

他の 2 つは実数解か, 複素数解である.

複素数平面上で正三角形をなすことから, 他の 2 つの解は実数解ではない。

2 つの解が複素数解であれば, それらは共役だから, $\beta = \bar{\alpha}$ である。

p, q を実数として, $\alpha = p + qi, \beta = \bar{\alpha} = p - qi$ とおく. ただし, $q > 0$ とする。

解と係数の関係により,

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \bar{\alpha} + \gamma = 2p + \gamma = -3a$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\gamma + \gamma\alpha = p^2 + q^2 + 2p\gamma = b$$

$$\alpha\beta\gamma = \alpha\bar{\alpha}\gamma = (p^2 + q^2)\gamma = -1$$

複素数平面上の点 α, β, γ が辺長 $\sqrt{3}a$ の正三角形をなすことから,

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{3}a \text{ から, } 2q = \sqrt{3}a$$

$$|\gamma - \alpha| = \sqrt{3}a \text{ から, } (p - \gamma)^2 + q^2 = 3a^2$$

$$\text{から } q = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{を } \text{に代入して整理すると, } p^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{-1}{\gamma}$$

$$\text{を } \text{に代入して整理すると, } (p - \gamma)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2, \therefore p - \gamma = \pm \frac{3}{2}a$$

で $p - \gamma = \frac{3}{2}a$ のとき,

$$+ \text{ から, } p = -\frac{a}{2}, \gamma = -2a, \text{ これらを } \text{に代入して, } 2a^3 = 1, a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$p = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, r = -2^{\frac{2}{3}}, q = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{から, } b = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

3つの解は,

$$\alpha = p + qi = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}(1 - \sqrt{3}i), \beta = \bar{\alpha} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}(1 + \sqrt{3}i), r = -2^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{で } p - r = -\frac{3}{2}a \text{ のとき,}$$

$$+ \text{ から, } p = -\frac{3a}{2}, r = 0 \text{ となるが, から } r \neq 0 \text{ だから, このような解はない。}$$

$$\text{以上によって, } a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, b = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{答})$$

$$3 \text{ つの解は } \alpha = p + qi = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}(1 - \sqrt{3}i), \beta = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}(1 + \sqrt{3}i), r = -2^{\frac{2}{3}} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

3次方程式の3つの解のうち, 1つは必ず実数である。他の2つの解は2次方程式の解であるから, 2つの実数解, 1つの実数の重解, 2つの複素数解, のいずれかである。複素数平面上で解の点が正三角形の頂点であることから, 実数解ではない。なぜなら, すべての解の点が実数軸上にあるので, 三角形の頂点にならないから。

2つの複素数解は互いに共役である。したがって, 図1に示すような正三角形の頂点となる。これらと, 3次方程式の解と係数の関係を用いて, 3つの解を求める。

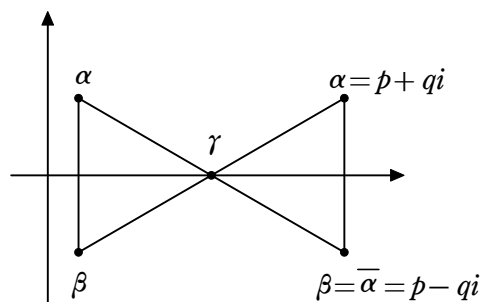


図 1

2

(30点)

p を正の整数とする. α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の2つの解で, $|\alpha| > 1$ であるとする.

- (1) すべての正の整数 n に対し, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$ を求めよ.

< 解答 >

(1)

2 次方程式の解と係数の関係から,

$$\alpha + \beta = 2p, \alpha\beta = -1$$

$n = 1$ のとき, $\alpha + \beta = 2p$ となり, 整数であり, 偶数である。

$n = 2$ のとき, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4p^2 + 2$ となり, 整数であり, 偶数である。

$n = k$ のとき, $\alpha^k + \beta^k = 2u$ とする。 k, u は正の整数とする。

$n = k + 1$ のとき, $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = 2v$ とする。 v は正の整数とする。

すると $\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} = (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) = 4pv + (\alpha^k + \beta^k) = 4pv + 2u$ となり, 整数であり, 偶数である。

$n = k, k + 1$ のとき, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを仮定すると, $n = k + 2$ でも $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数である。 $n = 1, 2$ で $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり偶数であるから, 数学的帰納法により, すべての正の整数 n に対し, $\alpha^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数である。

(2)

$$\beta = \frac{-1}{\alpha}, \alpha - \frac{1}{\alpha} = 2p$$

$$\alpha^n + \beta^n = \alpha^n + \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n = 2q \text{ とおける。 } q \text{ は正の整数}$$

$$\alpha^n = 2q - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \text{ を用いて,}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha^n \pi) &= \sin\left\{2q\pi - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi\right\} = \sin 2q\pi \cos\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi - \sin\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi \cos 2q\pi \\ &= -\sin\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi \end{aligned}$$

$$(-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi) = \frac{-\sin\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi}{\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n} = \pi \times \frac{-\sin\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi}{\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi} = -\pi \times \frac{\sin\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi}{\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi}$$

$$|\alpha| > 1 \text{ だから, 明らかに } \alpha > 1 \text{ となり, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \pi = 0$$

$$\text{したがって, 極限 } \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi) = -\pi$$

< 解説 >

(1) はすべての正の整数 n に対する証明問題だから, 数学的帰納法を用いることに直ぐに気づきたい。

(2) は(1)を活用することに, 直ぐに気づくだろう。ここでのポイントは $\alpha^n + \beta^n$ が(1)で証明されたように, 偶数ということである。また, よく知られているように $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを利用する。

3

(35点)

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径1の球面上の4点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k$$

このとき， k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X, Y に対して， $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$ は $\overrightarrow{OX}$ と $\overrightarrow{OY}$ の内積を表す．

<解答>

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \text{ から, } \angle AOB = \angle COD = \frac{\pi}{3}, \therefore \triangle OAB, \triangle OCD \text{ は正三角形}$$

したがって， $AB = CD = 1$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \text{ から, } (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} \text{ から, 同様に } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

したがって， $\triangle OAB$ の面と $\triangle OCD$ の面は直交する。

$O(0, 0, 0)$ として， $\triangle OAB$ の面を xz 平面， $\triangle OCD$ の平面を yz 平面とする。

xz 平面上に，点 $A\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，点 $B\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすれば， $\triangle OAB$ は正三角形である。

$$yz \text{ 平面上に, } C_0\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = C_0\left(0, \sin \frac{\pi}{6}, -\cos \frac{\pi}{6}\right)$$

$$D_0\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = D_0\left(0, -\sin \frac{\pi}{6}, -\cos \frac{\pi}{6}\right)$$

なる点 C_0, D_0 を考える。すると， $\triangle OC_0D_0$ は正三角形である。

$$\text{点 } C\left(0, \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right), -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)\right), \text{ 点 } D\left(0, \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right), -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

とすれば， $\triangle OCD$ は $\triangle OC_0D_0$ を x 軸を軸として反時計方向に θ 回転した三角形となる。

したがって，与式を満たす $\triangle OCD$ の θ と k を求めればよい。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \text{ または } \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} + \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ のとき, } \theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} + \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ のとき, } \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = k, \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} k$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} k, \therefore k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

$$\begin{aligned} \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \end{aligned}$$

$$k > 0 \text{ だから, } k = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

問題のベクトルがつくる立体がどのようなものか、速やかに理解しよう。Oを中心とする球を描き、ベクトルの内積の関係式を少し考慮して、球面上にA, B, C, Dをとる。立体としてOを頂点とする四角錐を想像できるだろう。そして、与えられたベクトルの関係の式をよく見つめ、立体の特性に関する情報を抽出しよう。

まずは与式 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}$ から OABと OCDが辺長1の正三角形であることを理解したい。次に第2, 3の与式, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ から, OABと OCDの2つの三角形の面が直交することに気づきたい。すると図1のような空間図形を頭に描くことができるだろうから、改めて解答用紙の余白に描きたい。そして与式を見つめ、題意を把握しよう。

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ の値を $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ としたとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ の値 k を求める問題と理解する。

このような理解のうえで、解答方針を考える。ベクトルの内積演算で条件が与えられているので、ベクトルの演算式を記述して、 k を求めようと努める。ところが、うまくいかない。なぜ、だめなのか、目下のところ、筆者には説明できない。解答方針を変える必要がある。

OCDを原点Oを中心として面内で回転すれば、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を満たす。そこで図2のように、OCDを θ 回転したときの $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ を利用して k を求めるという着想を得る。

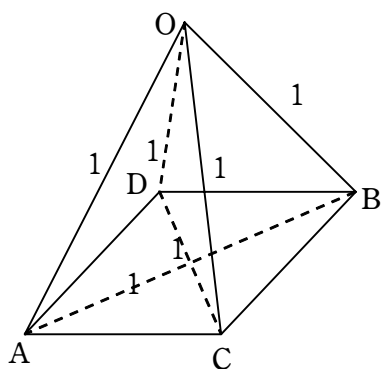


図1

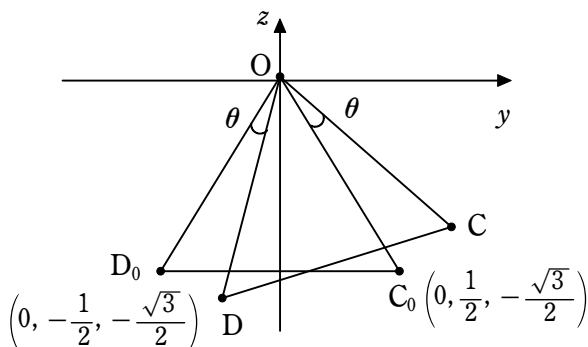


図2

正の整数 a に対して,

$$a=3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a)=b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5)=2$ である.

m, n は 整数で, 次の条件を満たすとする.

$$(\quad) 1 \leq m \leq 30$$

$$(\quad) 1 \leq n \leq 30$$

$$(\quad) n \text{ は } 3 \text{ で割り切れない.}$$

このような (m, n) について

$$f(m, n)=m^3+n^2+n+3$$

とするとき,

$$A(m, n)=B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

< 解答 >

($\quad$)より, $n=3k+1$ (k は $0 \leq k \leq 9$ の整数), または $3k-1$ (k は $1 \leq k \leq 10$ の整数) だから,
 $n=3k+1$ のとき,

$$f(m, n)=m^3+(3k+1)^2+(3k+1)+3=m^3+3^2k^2+3^2k+5, m=3j+1 \text{ のときのみ } 3 \text{ の倍数となり,}$$

$$f(m, n)=(3j+1)^3+3^2k^2+3^2k+5=3^3j^3+3^3j^2+3^2j+3^2k^2+3^2k+3 \times 2$$

$$=3(3^2j^3+3^2j^2+3j+3k^2+3k+2), \therefore B(f(m, n))=1$$

$n=3k-1$ のとき,

$$f(m, n)=m^3+(3k-1)^2+(3k-1)+3=m^3+3^2k^2-3k+3=m^3+3^2k^2-3(k-1)$$

$$m=3j \quad (j \text{ は } 1 \leq j \leq 10 \text{ の整数}) \text{ のときのみ } 3 \text{ の倍数となり,}$$

$$f(m, n)=3^3j^3+3^2k^2-3(k-1)=3^2(3j^3+k^2)-3(k-1)$$

$$(k-1) \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき, } B(f(m, n)) \geq 2 \text{ となる.}$$

したがって, $n=3k-1, m=3j, (k-1)$ が3の倍数, $B(f(m, n)) \geq 2$ のときを考える。

$$k-1=0, 3, 6, 9 \text{ のとき, } 3(k-1)=3^2 \times 0, 3^2 \times 1, 3^2 \times 2, 3^2 \times 2 \text{ だから,}$$

$$k=1 \text{ のとき, } f(m, n)=3^2\{3j^3+1\}, \therefore B(f(m, n))=2$$

$$k=4 \text{ のとき, } f(m, n)=3^2\{3j^3+4^2-1\}=3^3\{j^3+5\}, \therefore B(f(m, n)) \geq 3$$

$$k=7 \text{ のとき, } f(m, n)=3^2\{3j^3+7^2-2\}=3^2\{3j^3+47\}, \therefore B(f(m, n))=2$$

$$k=10 \text{ のとき, } f(m, n)=3^2\{3j^3+10^2-3\}=3^2\{3j^3+97\}, \therefore B(f(m, n))=2$$

したがって, $k=4, f(m, n)=3^2\{3j^3+4^2-1\}=3^3\{j^3+5\}, B(f(m, n)) \geq 3$ のときを考える。

$$j^3+5=6, 13, 32, 69, 130, 221, 348, 517, 734, 1005 \text{ の中で, } 3 \text{ の倍数となるのは,}$$

$$j=1 \text{ で } j^3+5=6=3 \times 2, j=4 \text{ で } j^3+5=69=3 \times 23, j=7 \text{ で } j^3+5=348=3 \times 116,$$

$$j=10 \text{ で } j^3+5=1005=3 \times 335$$

以上によって, $k=4, j=1, 4, 7, 10$ のとき $B(f(m, n))$ は最大値 4 (答)

$$m=3j \text{ から } m=3, 12, 21, 30, n=3k-1=11,$$

$$\therefore A(m, n)=B(f(m, n))=4 \text{ となる } (m, n)=(3, 11), (12, 11), (21, 11), (30, 11) \quad (\text{答})$$

< 解説 >

整数の問題である。問題がいかに数学的と思われるような形式 ($B(a)=b$ や $A(m, n)=B(f(m, n))$ など) で表現されているので、困惑しそうである。しかし、このような問題文を理解して解答することも、数学的能力の一つである。

「(), (), () を満たす整数 m, n の多項式 $f(m, n)=m^3+n^2+n+3$ によって与えられる値において、 $f(m, n)=3^b c$ と表現したとき、 b の最大値とそれを与える整数の組 (m, n) を求めよ」などと問題文を速やかに理解したいところである。つまりは、 $f(m, n)$ で表される数値を素数 3 のべき乗で因数分解したときのべき数の最大値をもとめよ、という問題である。

すると解答方針として、 m, n を $3p+r$ ($r=0, 1, 2$) のように表現して、 $f(m, n)$ を 3 のべき乗の倍数によって表現することを考える、という着想が浮かぶであろう。しかも n は 3 で割り切れないことから、 $n=3k\pm 1$ と表現できる。ここで、 $n=3k+2$ の代わりに $n=3k-1$ と表現したのは、 $f(m, n)$ の計算が容易になると思われたからである。

しかし、これは実際に計算してみないとわからないことである。 $n=3k+2$ で計算を進めても同じことなのだが、やや煩瑣になる。

$n=3k+2$ と表現した場合、

$$f(m, n)=m^3+(3k+2)^2+(3k+2)+3=m^3+3^2k^2+3\times 5k+3^2=m^3+3(3k^2+5k+3)$$

$m=3j$ (j は $1\leq j\leq 10$ の整数) のときのみ 3 の倍数となり、

$$f(m, n)=3^3j^3+3(3k^2+5k+3)=3(3^2j^3+3k^2+5k+3) \quad ,$$

したがって、 $(5k+3)$ が 3 の倍数であれば $B(f(m, n))\geq 2$ となる。

$5k+3$ が 3 の倍数 となるのは $k=0, 3, 6, 9$ のときで 3, 18, 33, 48

$$k=0 \text{ のとき } , f(m, n)=3(3^2j^3+3)=3^2(3j^3+1) , B(f(m, n))=2$$

$$k=3 \text{ のとき } , f(m, n)=3(3^2j^3+45)=3^3(j^3+5) , B(f(m, n))\geq 3$$

$$k=6 \text{ のとき } , f(m, n)=3(3^2j^3+141)=3^2(3j^3+47) , B(f(m, n))=2$$

$$k=9 \text{ のとき } , f(m, n)=3(3^2j^3+291)=3^2(3j^3+97) , B(f(m, n))=2$$

したがって、 $k=3$ 、 $f(m, n)=3^3(j^3+5)$ 、 $B(f(m, n))\geq 3$ のときを考える。

j^3+5 が 3 の倍数になれば、 $B(f(m, n))\geq 4$ となる。以降は解答とほぼ同じである。

上記の解答、解説では、やや煩瑣な計算を強いられた。この問題は整数に関わるものだから、数学 A の範囲である。数学 A の教科書の整数の章の [発展：合同式] を活用すれば、もっと簡素に扱うことができる。

5

(35点)

縦 4 個、横 4 個のマスのそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく。このマスの横の並びを行といい、縦の並びを列という。どの行にも、どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。下図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

< 解答 >

図1で、 a, b, c, d は1, 2, 3, 4の異なる数字を示すものとする。2, 3, 4行目の a が入るマス目の組合せは $3!$ 通りある。その1つを図1に示した。このとき図2のように、 b の入るマス目を1列目とすると、 d は3列目、 c は4列目となり、3行目では b は4列目、4行目では b は3列目となる。 c, d は空白のマス目に入れることができるので、2通りある。

図3のように2行目の b を3列目とすると、 d は1列目、 c は4列目に決まり、3行目の b を4列目とすると、 c は1列目、 d は2列目に決まり、4行目では b は1列目で、 c は2列目、 d は3列目に決まる。つまり1通りである。

図4のように、2行目の b を4列目とすると、1通りの行列が決まる。

以上の結果、図1の a の配置に対して、 $2+1+1=4$ 通りの行列が決まる。 a の配置は上述のように $3!$ 通りあるから、 $3! \times 4 = 24$ 通りの行列が決まる。

a, b, c, d の並びは $4! = 24$ 通りあるから、どの行にも列にも同じ数字が現われない入れ方は $24 \times 24 = 576$ 通り (答)

a	b	c	d
	a		
		a	
			a

図1

a	b	c	d
b	a	d	c
		a	b
		b	a

図2 2行目の b を1列目

a	b	c	d
d	a	b	c
c	d	a	b
b	c	d	a

図3 2行目の b を3列目

a	b	c	d
c	a	d	b
b	d	a	c
d	c	b	a

図4 2行目の b を4列目

< 解説 >

どのように扱うべきか、着想が必要である。ここでは、具体的な数字の並べ方をあげて、何通りの並べ方があるかを考察するとよい。この方法での難点は、図1に示した a の配置以外の配置でも、4通りの行列がある、ということは保証されていないことである。

以下に示すような別解もある。

1, 2, 3, 4 の並べ方の数は $4! = 24$ 通り。

それぞれに対して、2つの数字の組を入れ替えることにより、3つの行を作ることができる。
 図5で元の1行を1 2 3 4を例として考える。2つの数の組は全部で ${}_4C_2 = 6$ 組あり、2組の数を交換して行を作ることになると、新たな行が3つできる。

1	2	3	4	
2	1	4	3	1行目の(1と2),(3と4)を入れ替え
3	4	1	2	1行目の(1と3),(2と4)を入れ替え
4	3	2	1	1行目の(1と4),(2と3)を入れ替え

図5

元の1行にこの3行を加えてできる行列は、題意を満たす。2つの数の組は6組しかなく、数の位置の交換によって、元の行の列の数字と同じにならないように行をつくるには、2組ずつ交換するしかないから、新たにできる行は3行だけである。

これらの4行を入れ替えてできる行列は $4! = 24$ 通りある。元の行の並べ方は $4!$ 通りだから、どの行にも列にも同じ数字が現われない入れ方は $24 \times 24 = 576$ 通り。

この別解で示した方法以外に、元の行の列に同じ数字が並ばない行のつくり方がある。

図6の例のように、1, 2, 3, 4を元の行とすれば、1行目の数字を右斜め下のマス目に記入し、右斜め下にマス目がないとき、下行の左端のマス目に記入する。この操作を2, 3行まですれば、縦横に同じ数字が1回しか現れない4行の数字の並びができる。しかし、このような行のつくり方では、行の数字の並びが同じ円循環となる。問題図に示された行列の行も、1, 2, 3, 4の円循環の行となっていて、実質的に図6と同じ行列といえる。

$4! = 24$ 個の元の行には、同じ円循環の行が4個ずつあるから、それらは同じ行列をつくってしまう。したがって、このような行のつくり方では、どの行にも列にも同じ数字が現われない入れ方を網羅することができないので注意する。

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

図1

6

(35点)

x, y, z を座標とする空間において、 xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を z 軸のまわりに1回転するとき、この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする。この S をさらに x 軸のまわりに1回転させるとき、 S が通過した部分よりなる立体を V とする。このとき、 V の体積を求めよ。

< 解答 >

図 1 は問題文から想像される立体 V の概略図である。外形が樽型で、 $z = \sqrt{\log(1+x)}$ を x 軸の周りに回転した凹みがある。

図 2 に xz 面における V の断面の外形を示す。

x の正方向から yz 面を見たのが図 3 である。破線の大きい円は $x=0$ における V の断面の外形を示す。その半径 $r_1(x=0) = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + (\sqrt{\log(1+y)})^2} = \sqrt{1 + \log 2}$, ただし $x=0$ のとき、 V の断面の外形は点 $(y, z) = (y, \sqrt{\log(1+y)}) = (1, \sqrt{\log 2})$ を原点を中心として回転したものである。

破線の小さい円は $x=1$ における V の断面の外形を示す。

その半径は $r_2(x=1) = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + (\sqrt{\log(1+x)})^2} = \sqrt{0 + (\sqrt{\log(1+x)})^2} = \sqrt{\log 2}$,

ただし、 $x=1$ における V の断面の外形は $(y, z) = (y, \sqrt{\log(1+x)}) = (0, \sqrt{\log 2})$ を原点を中心として回転したものである。

以上のように考えると、 V の $x=x$ における yz 面に平行な断面の外形は、半径 $r_1(x)$ と $r_2(x)$ の原点を中心とする 2 つの同心円であることがわかる。

V の外形上の点 $(x, y, z) = (x, \sqrt{1-x^2}, \sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})})$ だから、

$$r_1^2(x) = z^2 + y^2 = \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) + y^2 = (\sqrt{\log 2})^2 + 1 - x^2$$

$$r_2^2(x) = (\sqrt{\log(1+x)})^2 = \log(1+x)$$

V は yz 面に関して対象だから、

$$V \text{ の体積} = 2 \int_0^1 \pi \{r_1^2 - r_2^2\} dx = 2\pi \int_0^1 \{(\log 2 + 1 - x^2) - \log(1+x)\} dx$$

$$= 2\pi \left[(1 + \log 2)x - \frac{x^3}{3} - (1+x)\log(1+x) + (1+x) \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3} + \log 2 - 2\log 2 + 2 - 1 \right) = 2\pi \left(\frac{5}{3} - \log 2 \right) \quad (\text{答})$$

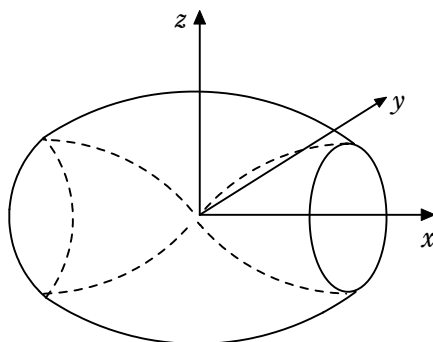


図 1

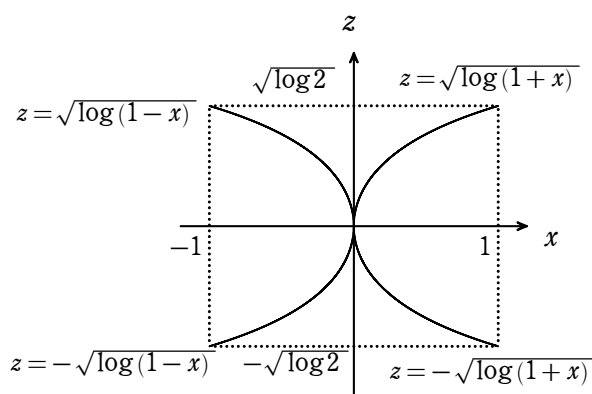


図 2

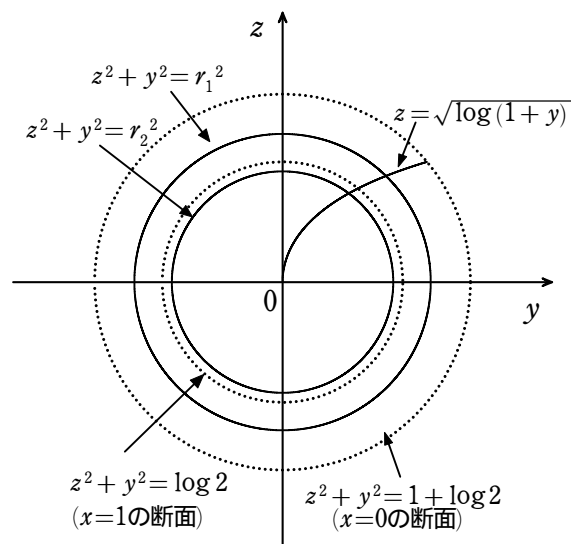


図 3

< 解説 >

関数によって与えられる立体図形の体積に関する問題。 x 軸の周りに回転してできる立体だから、 x 軸に垂直な断面（すなわち yz 面に平行な面）の図形は円もしくは円環である。この図形の面積を x 軸方向に加算していけば体積を求めることができる。

まずは、図形 S 、立体 V の概形を把握する必要がある。立体図形を脳内に描くことには、得手不得手があるようで、筆者は非常に苦手としている。読者にも立体図形の把握を得意とする人、不得意とする人、様々であろう。問題文を読みながら、関数グラフをメモ書きして、 S 、 V の把握に努めるのだが、 S はともかく V の像がなかなか脳内に浮かばない。

そこで、 xz 面、 yz 面での図形の断面図、特定の方から見た図（投影図）などを描いて、 V の概形の把握に努める。その結果、図 1 のような V の概形を理解できるだろう。ここでは、 $z = \sqrt{\log(1+x)}$ を x 軸のまわりに回転した凹み（穴）ができることを理解しなければならない。したがって、 x 軸に垂直な V の断面図は円環になる。大きな円の半径は、図形 S 上の点 (x, y, z) を x によって表現すれば求めることができる。

体積積分では不定積分 $\int \log(1+x) dx = (1+x)\log(1+x) - (1+x)$ を利用する。

< 理系総評 >

例年同様、なかなか手強い問題が揃っているので、解答に着手する順番が結果として得点を左右しそうである。問題をざっと一読して、分野、難易、得手不得手、解答方針などをおよそ見通し、順番を決めたい。私は、2, 1, 3, 5, 4, 6 の順番で取り組みたいと思った。

1

実数係数の3次方程式の解に関する問題。まずは、3次方程式の解の特性について理解し、それを活用しなければならない。複素平面上の点と図形を複素数演算によって扱うことが必要である。飛躍のある着想や難解な思考プロセスを必要とするものではないので、難易度は B。

2

2次方程式の解の特性に関する問題。帰納法を用いるという解答方針は容易に定まる。帰納法による証明も難しい数式処理を必要としないので、スムーズに解答したい。(2)は(1)の結果を活用する。難易度はB。

3

ベクトルによる空間図形の取り扱いの問題。ベクトルのみで扱おうと、ベクトルの合成と内積を計算しても、うまくいかない。着眼、着想を変える必要があるのだが、そこまで時間を使うと、厳しい。回転による座標表示に着眼できれば、定式化と計算は難しくはない。難易度はA-。

4

数学Aの整数の問題で、題意の理解と解答方針の着想に時間がかかるように思う。数学的な着想力、思考力を問うという数学らしい問題といえる。難易度はA。

5

場合の数の問題。数学Aの範囲なのだが、解答方針には着想が必要で、思考の具体化には、やや煩瑣な場合分けが必要である。別解のような解答方法を着想できれば、速やかに解答できるかも知れない。難易度はB+。

6

関数グラフの回転によって作られる立体の体積を求める問題。 xz 面内のグラフを z 軸のまわりに回転してできる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体図形が対象で、その概形を把握することに困難を伴う。求積計算は難しいものではないが、対数の不定積分の知識を必要とする。難易度はA-。

数学（文系）

150点満点 120分

1

(30点)

a を負の実数とする。 xy 平面上で曲線 $C: y=|x|x-3x+1$ と直線 $l: y=x+a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ。このとき、 C と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

<解答>

曲線 C は

$$x < 0 \text{ のとき } y = -x^2 - 3x + 1$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } y = x^2 - 3x + 1$$

と l が接するとすれば、2次方程式 $-x^2 - 3x + 1 = x + a$ 、すなわち $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ が重解をもつ。解の判別式 $D = 4 - (a - 1) = 5 - a = 0$ 、 $\therefore a = 5$ 、しかるに a は負の実数だから、これはない。

と l が接するとすれば、2次方程式 $x^2 - 3x + 1 = x + a$ 、すなわち $x^2 - 4x + 1 - a = 0$ が重解をもつ。解の判別式 $D = 4 - (1 - a) = 3 + a = 0$ 、 $\therefore a = -3$ （答）

したがって $(x-2)^2=0$ だから、接点は $(2, -1)$ となり、 $l: y = x + a = x - 3$

と l との交点の x 座標は2次方程式 $-x^2 - 3x + 1 = x - 3$ 、 $x^2 + 4x - 4 = 0$ から、 $x = p = -2 - 2\sqrt{2} = -2(1 + \sqrt{2})$

C と l で囲まれた部分、すなわち図1の打点部の面積は、

$$\begin{aligned}
& \int_p^0 \{(-x^2 - 3x + 1) - (x - 3)\} dx + \int_0^2 \{(x^2 - 3x + 1) - (x - 3)\} dx \\
&= \int_p^0 (-x^2 - 4x + 4) dx + \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_p^0 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{p^3}{3} + 2p^2 - 4p + \frac{2^3}{3} - 2^3 + 8 = \frac{p^3}{3} + 2p^2 - 4p + \frac{2^3}{3} \\
&= -\frac{8}{3}(1 + \sqrt{2})^3 + 8(1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + \frac{2^3}{3} = 16 + \frac{32}{3}\sqrt{2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

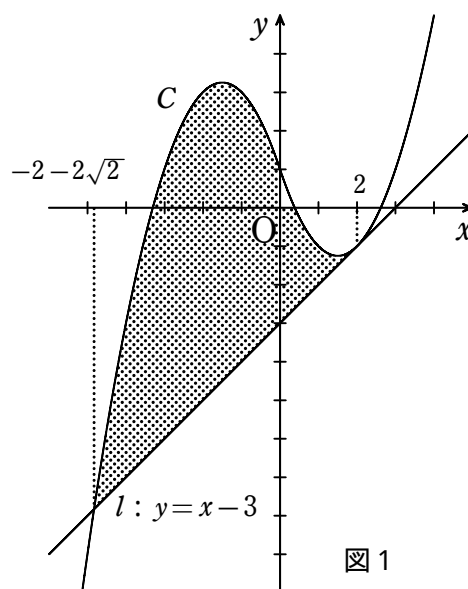


図 1

< 解説 >

まずは，曲線 C の方程式の絶対値記号を外し， x の正負に応じた具体的な関数表式を求める。そして，直線 l と接する条件を求める。

2

(30点)

x の 2 次関数で，そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。

ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。

< 解答 >

x の 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。 $y = x^2$ のグラフとこのグラフが 2 点で直交するためには，両者を連立させて得られる方程式

$$(a-1)x^2 + bx + c = 0$$

が 2 つの実数解 α, β をもつ必要がある。両グラフの共有点の x 座標が α, β である。

$$\text{の解と係数の関係から } \alpha + \beta = \frac{-b}{a-1}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a-1}$$

それぞれの導関数 $y' = 2x$ および $y' = 2ax + b$ から，共有点での傾きが直交することは，

$$2\alpha \times (2a\alpha + b) = -1, \therefore 4a\alpha^2 + 2b\alpha + 1 = 0$$

$$2\beta \times (2a\beta + b) = -1, \therefore 4a\beta^2 + 2b\beta + 1 = 0$$

$$- \quad \text{から, } 4a(\alpha^2 - \beta^2) + 2b(\alpha - \beta) = 0, \alpha \neq \beta \text{ だから, } \alpha + \beta = \frac{-b}{2a}$$

$$, \quad \text{から } \frac{-b}{a-1} = \frac{-b}{2a}, \text{ したがって } b=0 \text{ または } a-1=2a, \therefore a=-1$$

$b=0$ のとき,

$$\text{から } x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a-1}}, \quad \text{から } \alpha^2 = \frac{-1}{4a}, \quad \text{から } \beta^2 = \frac{-1}{4a}$$

$$\text{このとき, } a < 0, \frac{-c}{a-1} > 0, \text{ したがって } c > 0$$

$$\frac{-c}{a-1} = \frac{-1}{4a} \text{ から, } c = \frac{a-1}{4a}$$

$$\text{したがって, } y = ax^2 + \frac{a-1}{4a}, a < 0$$

$a=-1$ のとき,

$$\text{は } -2x^2 + bx + c = 0$$

$$\text{は } -4\alpha^2 + 2b\alpha + 1 = 0$$

$$\text{は } -4\beta^2 + 2b\beta + 1 = 0$$

$$\text{の解は } \alpha, \beta \text{ だから, } \quad , \quad \text{からして, } 2c=1, \therefore c=\frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } y = -x^2 + bx + \frac{1}{2}$$

以上をまとめて, $y=x^2$ のグラフと2点で直交するようなものは

$$y = ax^2 + \frac{a-1}{4a}, a \text{ は } a < 0 \text{ を満たす実数}$$

$$y = -x^2 + bx + \frac{1}{2}, b \text{ は } b \neq 0 \text{ の実数}$$

< 解説 >

実際に2点で直交するか, 確認してみよう。

$$y = ax^2 + \frac{a-1}{4a} \text{ のとき}$$

$$\text{は } (a-1)x^2 + \frac{a-1}{4a} = 0, x = \alpha, \beta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-1}{a}}$$

$$x = \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-1}{a}} \text{ における傾きは } 2\alpha \text{ と } 2a\alpha, \text{ それらの積は } 4a\alpha^2 = 4a \times \frac{-1}{4a} = -1 \text{ となり, 確かに}$$

直交する。

$$x = \beta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-1}{a}} \text{ でも同様である。}$$

$$y = -x^2 + bx + \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\text{は } -2x^2 + bx + \frac{1}{2} = 0, x = \alpha, \beta = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{4}$$

$$x = \alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{4} \text{ における傾きは } 2\alpha \text{ と } (-2\alpha + b),$$

それらの積は $2(-2\alpha^2 + b\alpha) = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1$ となり、確かに直交する。

$$x = \beta = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{4} \text{ においても同様である。}$$

3

(30点)

a を奇数とし、整数 m, n に対して、

$$f(m, n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$$

とおく。 $f(m, n)$ が 16 で割り切れるような整数の組 (m, n) が存在するための a の条件を求めよ。

< 解答 >

与えられた条件として、 $f(m, n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8 = 16h$ とおく。 h は整数。

m, n は奇数または偶数だから、 $m = 2p + r, n = 2q + s$ 、 (p, q は整数、 r, s は 0 または 1)

$$f(m, n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8 = (2p + r)(2q + s)^2 + a(2p + r)^2 + (2q + s)^2 + 8$$

$$= (2 \text{ の倍数}) + (rs^2 + ar^2 + s^2) = 16h$$

したがって、 $g(r, s) = rs^2 + ar^2 + s^2$ は偶数

$$r = 0 \text{ のとき, } g(0, s) = s^2, \therefore s = 0$$

$$r = 1 \text{ のとき, } g(1, s) = s^2 + a + s^2 = a + 2s^2 \neq \text{偶数}$$

したがって、 が成立するためには、 $r = s = 0$ すなわち m, n は偶数である。

$$r = 0, s = 0 \text{ とすれば, } 8pq^2 + 4ap^2 + 4q^2 + 8 = 16h, \therefore 2pq^2 + ap^2 + q^2 + 2 = 4h$$

$$\therefore 2pq^2 + ap^2 + q^2 = (2p + 1)q^2 + ap^2 = 2(2h - 1)$$

p 偶数 かつ q 偶数は と矛盾。なぜなら、左辺は 4 の倍数だが、右辺は 4 の倍数ではない。

p 奇数 かつ q 奇数は と矛盾しない。

p 奇数 かつ q 偶数は と矛盾。なぜなら、このとき左辺は奇数、右辺は偶数だから。

p 偶数 かつ q 奇数は と矛盾。なぜなら、このとき左辺は奇数、右辺は偶数だから。

$\therefore m = 2 \times \text{奇数} = 2(2j - 1), n = 2 \times \text{奇数} = 2(2k - 1)$ とおける。 j, k は整数

$$f(m, n) = 2^3(2j - 1)(2k - 1)^2 + 2^2(2j - 1)^2a + 2^2(2k - 1)^2 + 8 = 4^2h$$

$$\text{したがって, } 2(2j - 1)(2k - 1)^2 + (2j - 1)^2a + (2k - 1)^2 + 2 = 4h$$

$$(2j - 1)(2k - 1)^2 + \frac{1}{2}\{(2j - 1)^2a + (2k - 1)^2\} = 2h - 1$$

$$\frac{1}{2}\{(2j - 1)^2a + (2k - 1)^2\} = (2h - 1) - (2j - 1)(2k - 1)^2 = \text{偶数}, \therefore (2j - 1)^2a + (2k - 1)^2 \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$

$$(2j - 1)^2a + (2k - 1)^2 = (4j^2 + 4j + a) + (4k^2 + 4k + 1) = 4(j^2 + j + k^2 + k) + (a + 1)$$

したがって、 $a + 1 = 4$ の倍数 $= 4l$ 、 $\therefore a = 4l - 1 = 4(l - 1) + 3$ 、 l は整数

すなわち， $f(m, n)$ が16で割り切れるような整数の組 (m, n) が存在するための a の条件は
4 で割ったとき余りが 3 になる整数 （答）

< 解説 >

理系の問題 4 と同様の整数の問題。解答方針の着想に時間を要する。与えられた条件式 を凝視しても，着想のきっかけが浮かばない。このようなとき，整数 m, n に何か条件はないのかを調べることである。式には a よりも m, n に関する情報が多いのだから，それらの具体的な条件が解れば， a の条件が具体化できるだろう。

最も素朴な整数に関する条件として，偶数奇数，あるいは正負などの区分がある。ここでは，16で割り切れる条件や式中の 8 の存在などによって，偶奇に関しての条件を考えることが妥当だろう。

こうして， m, n とも偶数であること，さらに両者は（偶数×奇数）の構造をとることなどの具体条件を明らかにすることができる。こうした具体条件の式を以降の式のように導けば， a に対する条件が求まる。やや煩瑣な式の展開になるので，ケアレスミスに注意する。

4

(30点)

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k$$

このとき， k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X, Y に対して， $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$ は $\overrightarrow{OX}$ と $\overrightarrow{OY}$ の内積を表す．

理系の問題 3 に同じ。

5

(30点)

縦 4 個，横 4 個のマスのそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく．このマスの横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

理系の問題 5 に同じ。

< 文系総評 >

例年通り，文系といえども手強い問題が揃っている。昨年より難化した印象である。

1

2次関数の積分の問題。題意はは明確であり，解答方針に苦労するところはない。計算ミスがなければ，正答は容易である。難易度はB -。

2

2次関数のグラフと2次方程式に関する，なかなか面白い問題である。解答方針の着眼や2次方程式の確な理解と数学思考力が必要である。難易度はB +。

3

理系の問題 4 に類似の整数の問題。解答方針の着想と粘り強い思考の展開が必要である。文系の問題としては，やや難しいので，難易度はA -。

4

理系の志望者にとっても，なかなか手強い問題と思われるので，文系の志望者にとって難解な印象を受けたことであろう。難易度はA。

5

4と同様であり，文系志望者がどの程度の出来栄なのか気になるところである。難易度はA。

210815