令和２年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で５ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

　別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（選抜方法Ａ）及び工学部	○	○	○	○	○	５枚	120分
理学部（選抜方法Ｂ，Ｃ）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		４枚	90分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	４枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 四面体 OABC の辺 OA を $y:(1-y)$ に内分する点を D，辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E，辺 BC を $(1-y):y$ に内分する点を F とする。ただし，x，y は $0<x<1$，$0<y<1$ を満たすものとする。3 点 D，E，F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x，y を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3) 辺の長さに関して，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立つとする。$\mathrm{OA}=h$，$\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=1:k$ として，線分 EG の長さを最小にする x の値を k を用いて表せ。また，そのときの線分 EG の長さを h と k を用いて表せ。

2

m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x + 130y = m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2) (1) で求めた m_0 に対して，方程式 $70x + 130y = m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

方程式 $70x + 130y = m$ は，x，y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

3

n を正の整数とする。3 種類の数字 1，2，3 を並べて，各位の数が 1，2，3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1) 各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。$y_n + x_n$，$y_n - x_n$ および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2) 各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3) y_n，z_n は (1)，(2) で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして，次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

数列 $\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n} - \dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。

4 n を 0 以上の整数とし，次の式で I_n を定める。

$$I_0 = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx, \quad I_n = \int_{-2}^{2} x^n \sqrt{4 - x^2}\, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 および I_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ の値を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{2^n} = \infty$ および $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{2^{2n}} = 0$ が成り立つことを証明せよ。

5 複素数を極形式で表したときの偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n = i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，$\cdots$，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1) $k = 0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，α_k を極形式で表せ。

(2) $k = 0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，$\alpha_k = \alpha_0\beta_k$ と $(\beta_k)^n = 1$ を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3) $k = 0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，$\gamma_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ とする。また，γ_k を表す複素数平面上の点を P_k とする。このとき，P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_{n-1} を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4) $n = 6$ とし，(3) で求めた正 6 角形の頂点 P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_5 を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。