2020（R2）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$ 四面体OABCの辺OAを$y:(1-y)$に内分する点をD，辺ABを$(1-x):x$に内分する点をE，辺BCを$(1-y):y$に内分する点をFとする。ただし，x，yは$0<x<1$，$0<y<1$を満たすものとする。3点D，E，Fを通る平面と直線OCの交点をGとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答よ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{DE}$および$\overrightarrow{DF}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x，yを用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OG}=t\vec{c}$を満たす$t$の値を$x$を用いて 表せ。

(3) 辺の長さに関して，OA = OB = OC，AB = BC = CAが成り立つとする。

OA $= h$，OA：AB $= 1:k$として，線分EGの長さを最小にする xの値をkを用いて表せ。

また，そのときの線分EGの長さを hとkを用いて表せ。

＜解答＞

(1)

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{DA}=(1-y)\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=(1-x)\overrightarrow{AB}=(1-x)(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})=(1-x)(-\vec{a}+\vec{b})$

したがって，$\overrightarrow{DE}=(1-y)\vec{a}+(1-x)(-\vec{a}+\vec{b})=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$　（答）

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{DO}=-y\vec{a}$，$\overrightarrow{CF}=y\overrightarrow{CB}=y(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=y(-\vec{c}+\vec{b})$

したがって，$\overrightarrow{DF}=-y\vec{a}+\vec{c}+y(-\vec{c}+\vec{b})=-y\vec{a}+y\vec{b}+(1-y)\vec{c}$　（答）

(2)

$\overrightarrow{DG}=u\overrightarrow{DE}+v\overrightarrow{DF}$とおく。ただし u，v は実数

$\overrightarrow{OG}=t\vec{c}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}=y\vec{a}+u\overrightarrow{DE}+v\overrightarrow{DF}$

$=y\vec{a}+u(x-y)\vec{a}+u(1-x)\vec{b}-vy\vec{a}+vy\vec{b}+v(1-y)\vec{c}$

$=\{y+u(x-y)-vy\}\vec{a}+\{u(1-x)+vy\}\vec{b}+v(1-y)\vec{c}$

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は同一平面にないから，各ベクトルの係数について，以下が成立する。

$y+u(x-y)-vy=0$　①

$u(1-x)+vy=0$　②

$t=v(1-y)$　③

①，②，③から $t=1-x$　（答）

(3)

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}=-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}=-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OG}$

$=-\{(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}\}-y\vec{a}+(1-x)\vec{c}=-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}$

$\mathrm{EG}=|\overrightarrow{EG}|=\sqrt{|\overrightarrow{EG}|^2}$

$|\overrightarrow{EG}|^2=\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EG}=\{-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}\}\cdot\{-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}\}$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=h^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=h^2\cos\theta=\dfrac{h^2(2-k^2)}{2}$，余弦定理により$\cos\theta=\dfrac{h^2+h^2-(kh)^2}{2h^2}=\dfrac{2-k^2}{2}$

を用いて計算し，整理すると

$$|\overrightarrow{EG}|^2=\{x^2+(1-x)^2+(1-x)^2\}h^2+2\{x(1-x)-x(1-x)-(1-x)^2\}\frac{h^2(2-k^2)}{2}$$

$$=\{x^2+(1-x)^2k^2\}h^2=\{(k^2+1)x^2-2k^2x+k^2\}h^2$$

$$=\{(k^2+1)x^2-2k^2x+k^2\}h^2=\left\{(k^2+1)\left(x-\frac{k^2}{k^2+1}\right)^2+\frac{k^2}{k^2+1}\right\}h^2$$

したがって，$x=\dfrac{k^2}{k^2+1}$　（答）のとき，$|\overrightarrow{EG}|^2$は最小値$\dfrac{h^2k^2}{k^2+1}$をとるから，

線分EGの長さの最小値は$\dfrac{hk}{\sqrt{k^2+1}}$　（答）

<解説>

題意に沿って，図１のような図を手書きして考察を進める。正確な図である必要はないが，正確に近いほど，考察が容易となる。日頃から，問題に応じて図を手書きする習慣をつけよう。

(1)

できるだけ簡単なベクトルの合成によって，$\overrightarrow{DE}$ および $\overrightarrow{DF}$ を表現することを考える。$\overrightarrow{DE}$ については三角形ADE，$\overrightarrow{DF}$については四辺形ODFCに着眼する。各辺を容易にベクトル表現することができるからである。

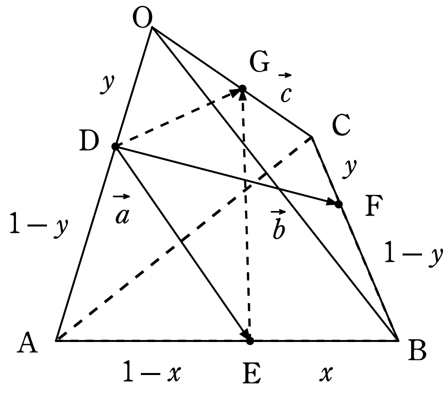

図１

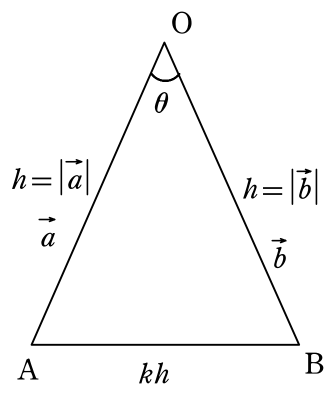

図２

(2)

Gはベクトル$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DF}$がつくる平面上の点だから，$\overrightarrow{DG}=u\overrightarrow{DE}+v\overrightarrow{DF}$と表現できる。同一平面上にはない３つの空間ベクトル（どのベクトルも他の２つのベクトルの和によって表されないということ）の和が0のときは，各ベクトルの係数は0であることを利用する。

(3)

$\overrightarrow{EG}$をできるだけ簡単なベクトルによって表現する。四辺形EDOGに着目することが(2)で求めた結果を活用することができて，良いであろう。

図２に三角形OAB ≡ 三角形OBC ≡ 三角形OAC である三角形を示す。ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 間の内積とh，khとの関係がわかる。

$\boxed{2}$　mを正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときのm の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2) (1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解を求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

方程式 $70x+130y=m$ は，x，y がともに正の整数である解を３組もつ。

<解答>

(1)

$70x+130y=m$ から，$7x+13y=\dfrac{m}{10}$

x，y は整数だから，$\dfrac{m}{10}$ は正の整数，最小の正の整数は１だから，$\dfrac{m_0}{10}=1$，　$\therefore$　$m_0=10$

$7x+13y=\dfrac{m}{10}=1$ となって，7と13 は互いに素だから，これを満たす整数解 x，y が存在する。

したがって，$m_0=10$　（答）

(2)

$70x+130y=m_0=10$，$7x+13y=1$　①

$x=\dfrac{1-13y}{7}=-2y+\dfrac{1+y}{7}$，$\therefore 1+y=0$，$y=-1$，$x=2$ は解の一つ

① に$x=2$，$y=-1$ を代入して，$7\times2+13\times(-1)=1$　②

①−②から，$7(x-2)+13(y+1)=0$，$\therefore 7(x-2)=-13(y+1)$，7と−13 は互いに素だから，

$x-2=-13n$，$y+1=7n$とおける。ただし n は整数

したがって，$x=-13n+2$，$y=7n-1$　（n は整数）　（答）

(3)

$7x+13y=\dfrac{m}{10}=k$　③　（k は正の整数）とおく。すると，$x=2k$，$y=-k$ は解の一つ

$7\times(2k)+13\times(-k)=k$　④

③−④から，$7(x-2k)+13(y+k)=0$，$\therefore$　$x-2k=-13j$，$y+k=7j$　（j は整数）

$x=-13j+2k\geqq1$，$\therefore j\leqq\dfrac{2k-1}{13}$

$y=7j-k\geqq1$，$\therefore j\geqq\dfrac{1+k}{7}$

すなわち，$\dfrac{1+k}{7} \leqq j \leqq \dfrac{2k-1}{13}$

3個の整数jが決まるためには，$\dfrac{2k-1}{13}-\dfrac{1+k}{7} \geqq 2$，$\therefore k \geqq 202$

最小の$k=202$のとき，$\dfrac{203}{7} \leqq j \leqq \dfrac{403}{13}$，$29 \leqq j \leqq 31$

確かに，$j=29$，30，31の３つに対してx，yがともに正の整数である解を３組もつ。

すなわち$x=404-13j$，$y=7j-202$

方程式 $70x+130y=m$ において，x，yがともに正の整数である解を３組もつmの最小値は

$\dfrac{m}{10}=202$，$\therefore m=2020$　（答）

＜解説＞

(1)

数学Aの教科書に記載の「aとbが互いに素であるとき，不定方程式 $ax+by=c$ は，必ず整数解をもつ」との定理を覚えておこう。

(2)

与式の不定方程式を変形して，$x=\dfrac{1-13y}{7}=-2y+\dfrac{1+y}{7}$から，解の一つを見出す。

(3)

$ax+by=1$の解の一つがx_1，y_1であれば，$ax+by=k$の解の一つはkx_1，ky_1である。

$\boxed{3}$　nを正の整数とする。３種類の数字1，２，３を並べて，各位の数が1，2，3のいずれかであるn桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。

次の問いに答えよ。

(1) 各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_nとする。y_n+x_n，y_n-x_n およびy_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2) 各位の数の合計が４の倍数になる整数の総数をz_nとするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3) y_n，z_n は(1)，(2)で求めたものとする。初項 c_1 は０でないとして，次の条件を満たす等比級数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。数列 $\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が０でない値に収束する。

＜解答＞

(1)

y_n+x_n は3種類の数字１，２，３を並べてできる整数の総数だから，$y_n+x_n=3^n$　①　（答）

y_n になるのは各位の数の合計が偶数になる整数の総計y_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が2，奇数になる整数の総計x_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が1 または3 の２つの場合だから，

$y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}$　②

x_n になるのはx_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が2，y_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が1 または3 の２つ

の場合だから，

$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$　③

②−③から

$y_n-x_n=-(y_{n-1}-x_{n-1})=(-1)^2(y_{n-2}-x_{n-2})=\cdots=(-1)^{n-1}(y_1-x_1)$

$=(-1)^{n-1}(-1)=(-1)^n$　④　（答）

①＋④から

$2y_n=3^n+(-1)^n$，$\therefore\ y_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$　（答）

(2)

$(n-1)$桁までの各位の整数の和が偶数で4の倍数ではない整数の個数をy'_{n-1}とすれば

$y_{n-1}=z_{n-1}+y'_{n-1}$　⑤

y'_{n-1} に含まれる整数の n 桁目が2であれば4の倍数，x_{n-1} に含まれる整数の n 桁目が1または3であれば，それぞれ 0.5 の確率で4 の倍数，したがって

$z_n=y'_{n-1}+0.5\times 2x_{n-1}=y'_{n-1}+x_{n-1}$　⑥

⑥−⑤から

$z_n-y_{n-1}=x_{n-1}-z_{n-1}$，$\therefore\ z_n+z_{n-1}=x_{n-1}+y_{n-1}=3^{n-1}=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{3^{n-1}}{4}$

したがって，$z_n-\dfrac{3^n}{4}=-\left(z_{n-1}-\dfrac{3^{n-1}}{4}\right)=(-1)^2\left(z_{n-2}-\dfrac{3^{n-2}}{4}\right)$

$=\cdots=(-1)^{n-2}\left(z_2-\dfrac{3^2}{4}\right)=(-1)^{n-2}\left(3-\dfrac{3^2}{4}\right)=\dfrac{(-1)^{n-2}\cdot 3}{4}=\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$

$z_n=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$，$n=1$のとき$z_1=0$，$n=2$のとき$z_2=3$となり，正しい。

したがって，$z_n=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$　（答）

(3)

$\dfrac{z_n}{y_n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{3^n+(-1)^n\cdot 3}{3^n+(-1)^n}$，$\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 3-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}\right\}=\dfrac{(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$

したがって，$\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{c_n(-1)^n}{3^n+(-1)^n}=\dfrac{c_n(-1)^n/3^n}{1+(-1)^n/3^n}$

したがって，$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\{c_n(-1)^n/3^n\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\{c_n(-1)^n/3^n\}$が 0でない実数 t となるためには，$c_n(-1)^n=3^nt$，$\therefore\ c_n=(-3)^nt$

したがって，等比級数列 $\{c_n\}$ の公比は -3　（答）

＜解説＞

(1)

y_n+x_n については，容易に考えることができる。x_n，y_nについて表式を思い浮かべることは，なかなか難しい。ここで漸化式の考え方を思い出したい。n 桁目までの整数の総数と$n-1$桁目までの整数の総数との関係（漸化式）が求まれば，一般的な表式を求めることは容易になる。

(2)

(1)と同様に，z_nを$(n-1)$桁目までの整数の個数によって表現する。n桁目の数字と各位の整数の和が4の倍数になる場合との関係を考える。

ここで，$z_n+z_{n-1}=x_{n-1}+y_{n-1}=3^{n-1}$の漸化式で表される数列の一般項を求めることがポイントである。$3^{n-1}=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{3^{n-1}}{4}$であることに気づくと計算は容易だ。

$\boxed{4}$　nを0以上の整数とし，次の式でI_nを定める。

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx,\ \ I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1およびI_2の値を求めよ。

(2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$の値をnを用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\infty$および$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$が成り立つことを証明せよ。

<解答>

(1)

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$x=2\sin\theta$とおく。$\theta=0\to x=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}\to x=2$，$\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\cos\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$，

したがって$\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos2\theta+1)d\theta=2\left[\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$

したがって$I_0=2\pi$　（答）

$f_n(x)=x^n\sqrt{4-x^2}$はnが奇数のとき奇関数，

なぜなら$f_n(-x)=(-x)^n\sqrt{4-(-x)^2}=(-1)^nx^n\sqrt{4-x^2}=-f_n(x)$

したがって$\displaystyle I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx$は，$n$が奇数のとき$I_n=0$，$\therefore I_1=0$　（答）

$\displaystyle\int x^n\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int(2\sin\theta)^n\cos^2\theta\,d\theta=2^{n+2}\int\sin^n\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$n=2$のとき，$\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=2^4\int\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=2^2\int(2\sin\theta\cos\theta)^2d\theta=2^2\int\sin^22\theta\,d\theta$

$$=2\int(1-\cos4\theta)d\theta=2\left(\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\right)$$

$\displaystyle I_2=\int_{-2}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^2x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=4\left[\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$　（答）

(2)

$$I_{2n}=\int_{-2}^{2}x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^2 x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx=2^{2n+3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta \quad ①$$

$$I_{2n+2}=\int_{-2}^{2}x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^2 x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2^{2n+5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\cos^2\theta\,d\theta \quad ②$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^4\theta\,d\theta \quad ③$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta=A_{2n}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\cos^2\theta\,d\theta=A_{2n+2}$ とおく。

③から，$A_{2n+2}=A_{2n}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^4\theta\,d\theta$ ④

$\cos^4\theta=\cos^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta(1+\cos2\theta)$を用いて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^4\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}A_{2n}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta(1-\sin^2\theta)\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}A_{2n}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\cos2\theta\,d\theta \quad ⑤$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin^{2n}\theta\sin2\theta-2n\int\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2n\left[\int\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta=-2nA_{2n} \quad ⑥$$

同様に，$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}\theta\cos2\theta\,d\theta=-(2n+2)A_{2n+2}$ ⑦

⑤に⑥，⑦を代入して，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos^4\theta\,d\theta=\frac{1}{2}A_{2n}-nA_{2n}+(n+1)A_{2n+2}$ ⑧

⑧を④に代入して，

$$A_{2n+2}=A_{2n}-\frac{1}{2}A_{2n}+nA_{2n}-(n+1)A_{2n+2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)A_{2n}-(n+1)A_{2n+2}$$

$$\therefore A_{2n+2}=\frac{2n+1}{2(n+2)}A_{2n}$$

①から $I_{2n}=2^{2n+3}A_{2n}$，②から $I_{2n+2}=2^{2n+5}A_{2n+2}$

したがって，$\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\dfrac{2^2A_{2n+2}}{A_{2n}}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}$　（答）

(3)

$\dfrac{I_{2n}}{I_{2n-2}}=\dfrac{2(2n-1)}{n+1}$から，$I_{2n}=\dfrac{2(2n-1)}{n+1}I_{2n-2}=\dfrac{4-2/n}{1+1/n}I_{2n-2}=r_nI_{2n-2}$，（ただし $n\geqq 1$）

$r_1=1$，$r_2=2$，$r_{n+1}>r_n$，$1\leqq r_n=\dfrac{4-2/n}{1+1/n}<4$，$\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=4$

$I_{2n}=r_nI_{2n-2}=r_nr_{n-1}I_{2n-4}=\cdots=r_nr_{n-1}\cdots r_1I_0=2r_nr_{n-1}\cdots r_1\pi$

$\dfrac{I_{2n}}{2^n}=\left(\dfrac{r_n}{2}\right)\left(\dfrac{r_{n-1}}{2}\right)\cdots\left(\dfrac{r_1}{2}\right)I_0$，任意の整数 $k\geqq 3$ に対して $1<\dfrac{r_k}{2}<2$

したがって，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{r_n}{2}\right)\left(\dfrac{r_{n-1}}{2}\right)\cdots\left(\dfrac{r_1}{2}\right)=\infty$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{2n}}{2^n}=\infty$

$$\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=\frac{r_nI_{2n-2}}{2^{2n}}=\left(\frac{r_n}{2^2}\right)\frac{I_{2n-2}}{2^{2n-2}}=\left(\frac{r_n}{2^2}\right)\left(\frac{r_{n-1}}{2^2}\right)\frac{I_{2n-4}}{2^{2n-4}}=\cdots=\left(\frac{r_n}{2^2}\right)\left(\frac{r_{n-1}}{2^2}\right)\cdots\left(\frac{r_1}{2^2}\right)I_0$$

$$=2\left(\frac{r_n}{2^2}\right)\left(\frac{r_{n-1}}{2^2}\right)\cdots\left(\frac{r_1}{2^2}\right)\pi$$

任意の正の整数 kに対して $0<\dfrac{r_k}{2^2}<1$

したがって，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{r_n}{2^2}\right)\left(\dfrac{r_{n-1}}{2^2}\right)\cdots\left(\dfrac{r_1}{2^2}\right)=0$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$

<解説>

(1)

$I_0=\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$，$I_n=\displaystyle\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx$　のような積分では，$x=2\sin\theta$という変数変換によって，√ を外した計算が可能になることは，読者の皆さんはよく承知のことと思う。

(2)

I_{2n}，I_{2n+2}が①，②のように簡潔に表現されるのだが，両者の関係を示す表式を求めることは容易ではない。原始関数を単純に求められないので，定積分を実行できない。部分積分法の活用が閃くだろうが，式の変形の方向性が明瞭に定まらない。

①と②を凝視し，まず②を①を露わに含む形で表現してみる。残る項を，さらに①の表式に近い表式で表現することを考える。すると③，④のような簡潔な関係式が得られる。この過程は思考を導く指導原理があるわけでなく，試行錯誤的な計算になるので，計算の方向を誤ると大きな時間ロスを招きかねない。

⑥の導出において，部分積分法を用いて，表式を整理することがポイントとである。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cos 2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin^{2n}\theta\sin 2\theta-2n\int\sin^{2n}\theta\cos^2\theta\,d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\displaystyle\int f(\theta)\cdot g'(\theta)d\theta=f(\theta)g(\theta)-\int f'(\theta)g(\theta)d\theta$ において，

$f(\theta)=\sin^{2n}\theta$，$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ としている。

(3)

(2)の結果である $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\dfrac{2^2A_{2n+2}}{A_{2n}}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}$，$\dfrac{I_{2n}}{I_{2n-2}}=\dfrac{2(2n-1)}{n+1}$ の表式が明らかになれば容易であろう。

$\boxed{5}$ 複素数を極形式で表したときの偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n=i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，$\cdots$，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答よ。

(1) $k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，α_kを極形式で表せ。

(2) $k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，$\alpha_k=\alpha_0\beta_k$と $(\beta_k)^n=1$を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3) $k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$ に対して，$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$とする。また，$\gamma_k$を表す複素数平面上の点を$\mathrm{P_k}$とする。このとき，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\cdots$，$\mathrm{P_{n-1}}$ を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4) $n=6$とし，(3)で求めた正6角形の頂点$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\cdots$，$\mathrm{P_5}$を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。

＜解答＞

(1)

$z=\cos\theta+i\sin\theta$として，ド・モアブルの定理から $z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=i$

したがって，$\cos n\theta=0$，$\sin n\theta=1$，$\therefore\ n\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}(1+4k)$，$k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$

したがって，$\theta_k=\dfrac{\pi}{2n}(1+4k)$，$k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$

$0<\theta_k\leqq\dfrac{\pi}{2n}(1+4n-4)=\dfrac{\pi}{2n}(4n-3)=2\pi\left(1-\dfrac{3}{4n}\right)<2\pi$だから，偏角の条件 $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす。

したがって，$\alpha_k=\cos\dfrac{\pi}{2n}(1+4k)+i\sin\dfrac{\pi}{2n}(1+4k)$，$k=0$，1，2，$\cdots$，$n-1$　（答）

(2)

ド・モアブルの定理を活用して，

$$\beta_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_0}=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}(1+4k)+i\sin\frac{\pi}{2n}(1+4k)}{\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{1+4k}}{\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{4k}$$

このβ_kについて，$(\beta_k)^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{2n}+i\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)^{4kn}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$

したがって，$\alpha_k=\alpha_0\beta_k$と $(\beta_k)^n=1$を同時に満たす複素数 β_k が存在する。

(3)

$\gamma'_k=\dfrac{\gamma_k}{\alpha_0}$とすれば，

$\gamma'_k=\dfrac{\gamma_k}{\alpha_0}=\dfrac{\alpha_0}{\alpha_0}+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}+\cdots+\dfrac{\alpha_k}{\alpha_0}=\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k$，$k=0, 1, 2, \cdots, n-1$

$(\beta_k)^n=1$だから，β_kは1のn乗根で，複素数平面上の原点を中心とする単位円の円周をn等分する点を示す複素数で，$\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}=0$，$\beta_k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$

γ'_kを表す複素数平面上の点をP'_kとすれば，$\overrightarrow{P'_{k-1}P'_k}=\beta_k$，$|\beta_k|=1$

$\beta_0=1$，$\overrightarrow{P'_{n-1}P'_0}=\beta_0-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_{n-1})=\beta_0=1$

したがって，P'_0，P'_1，P'_2，…，P'_{n-1}を頂点とする多角形は，P'_{n-1}を原点とし，辺$P'_{n-1}P'_0$が実軸上にある，辺長1の正n角形である。

$\gamma_k=\alpha_0\gamma'_k$，$|\alpha_0|=1$，$\arg\alpha_0=\dfrac{\pi}{2n}$だから，

P_0，P_1，P_2，…，P_{n-1}を頂点とする多角形はP'_0，P'_1，P'_2，…，P'_{n-1}を頂点とする正多角形を原点の回りに$\dfrac{\pi}{2n}$回転した正多角形である。

(4)

P'_0，P'_1，P'_2，…，P'_5を頂点とする正6角形の中心C'は$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

正6角形P_0，P_1，P_2，…，P_5は，正6角形P'_0，P'_1，P'_2，…，P'_5を原点の回りに$\dfrac{\pi}{2\times6}=\dfrac{\pi}{12}$回転したものだから，中心$C(X, Y)$を表す複素数は

$$X+Yi=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

中心が表す複素数は$\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)i$　（答）

＜解説＞

(1)

ここは，ド・モアブルの定理を使うと直ちに考えたい。

(2)

ここも(1)と同様である。

(3)

(2)において，複素数β_kが1のn乗根であることから正n角形を構成する点であることに気づく。

すると，$\gamma'_k=\dfrac{\gamma_k}{\alpha_0}$ の表式を考察することを閃きたい。

(4)

$n=6$ の場合について図１に示す。β_kは1のn 乗根だから，複素数平面上の原点を中心とする単位円の円周を$n=6$ 等分する点である。したがって$\gamma'_k=\dfrac{\gamma_k}{\alpha_0}=\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k$は辺長を1とする正$n=6$角形の頂点である。その中心 C'は $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ でβ_1に一致する。

$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ はγ'_kがつくる正 $n=6$ 角形を角度 $\dfrac{\pi}{2\times n}=\dfrac{\pi}{2\times 6}=\dfrac{\pi}{12}$ だけ回転したものである。したがって，その中心 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ も $\dfrac{\pi}{12}$ 回転して点 C にくる。。

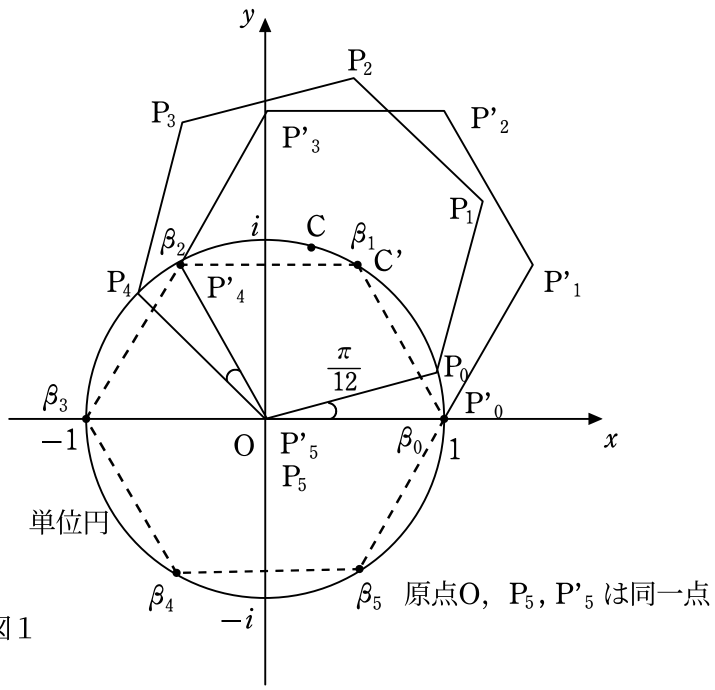

図１

<総評>

毎年のことであるが，高校数学の本質を捉えた良問が揃っていると感じる。難易が極端にならない範囲で思考力や直観力を通じて，高校数学の教科書に記載されている基本知識と方法を問うものになっている。

$\boxed{1}$

四面体のベクトルによる取り扱いの問題。空間図形の辺のベクトルを三角形や四辺形の辺のベクトルの加減によって表現する。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

不定方程式の問題。一つの整数解を容易に見出せるように式の変形を行う。数学Aの教科書には，ユークリッドの互除法によって，一つの整数解を求める方法が記載されているが，やや煩瑣である。多くの場合，$7x+13y=1$を，$x=\dfrac{1-13y}{7}=-2y+\dfrac{1+y}{7}$のように整数部分と分数部分の和に変形す

れば，視察により簡単に一つの解が見つかる。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$

整数の問題。一読したとき，やや難しい問題のように感じる。しかし確率漸化式のような問題と捉えることができれば，大きな困難なく解答にいたる。難易度Ｂ＋。

$\boxed{4}$

積分の問題。(2)では計算の方針の見通しが困難で，方向を誤ると迷路にはまって，思わぬ時間ロスを強いられそうだ。難易度Ａ。

$\boxed{5}$

複素数平面の問題として，その基本的な理解を問う適切な問題である。(3)，(4)の解答方針には少々の着想が必要であり，これも複素数平面に関する基本的な理解に関係する。難易度はＢ。

＜人文，教育，経済社会，農，創生学部＞

（90分）

$\boxed{1}$ nを正の整数とする。3 種類の数字1，2，3 を並べて，各位の数が1，2，3のいずれかであるn 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_nとする。

また，各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数をz_n とする。次の問いに答えよ。

(1) nを 2 以上の整数とするとき，

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}$$

$$y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}$$

を満たす定数a，b，c，dの値をそれぞれ求めよ。

(2) $y_n + x_n$，$y_n - x_n$ および y_nの値をnを用いてそれぞれ表せ。

(3) z_nの値をnを用いて表せ。

＜解答＞

理系の $\boxed{3}$ から(3)を除いたものとほぼ同じ。解答もほぼ同じになるが，記載する。

(1)

x_n になるのは各位の数の合計が奇数になる整数の総計x_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が2，偶数になる整数の総計y_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が1 または 3 の 2 つの場合だから，

$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$ ①，したがって，$a=1$，$b=2$ （答）

y_n になるのは各位の数の合計が偶数になる整数の総計y_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が2，奇数になる整数の総計x_{n-1} に含まれる整数のn 桁目が1 または3 の 2 つの場合だから，

$y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}=2x_{n-1}+y_{n-1}$ ②，したがって，$c=2$，$d=1$ （答）

(2)

y_n+x_n は 3 種類の数字 1，2，3 を並べてできるn 桁の整数の総数だから，

$y_n+x_n = 3^n$ ③ （答）

②−①から

$y_n-x_n=-(y_{n-1}-x_{n-1})=(-1)^2(y_{n-2}-x_{n-2})=\cdots=(-1)^{n-1}(y_1-x_1)$

$=(-1)^{n-1}(-1)=(-1)^n$ ④ （答）

③＋④から

$2y_n=3^n+(-1)^n$, $\therefore\ y_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$ （答）

(3)

$(n-1)$桁までの各位の整数の和が偶数で4の倍数ではない整数の個数をy'_{n-1}とすれば

$y_{n-1}=z_{n-1}+y'_{n-1}$ ⑤

y'_{n-1} に含まれる整数の n 桁目が2であれば4の倍数，x_{n-1} に含まれる整数の n 桁目が1または3であれば，それぞれ0.5の確率で4の倍数，したがって

$z_n=y'_{n-1}+0.5\times 2x_{n-1}=y'_{n-1}+x_{n-1}$ ⑥

⑥－⑤から

$z_n-y_{n-1}=x_{n-1}-z_{n-1}$, $\therefore\ z_n+z_{n-1}=x_{n-1}+y_{n-1}=3^{n-1}=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{3^{n-1}}{4}$

したがって，$z_n-\dfrac{3^n}{4}=-\left(z_{n-1}-\dfrac{3^{n-1}}{4}\right)=(-1)^2\left(z_{n-2}-\dfrac{3^{n-2}}{4}\right)$

$=\cdots=(-1)^{n-2}\left(z_2-\dfrac{3^2}{4}\right)=(-1)^{n-2}\left(3-\dfrac{3^2}{4}\right)=\dfrac{(-1)^{n-2}\cdot 3}{4}=\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$

$z_n=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$, $n=1$のとき$z_1=0$, $n=2$のとき$z_2=3$ となり，正しい。

したがって，$z_n=\dfrac{3^n}{4}+\dfrac{(-1)^n\cdot 3}{4}$ （答）

＜解説＞

解説は理系を参照する。

(1)，(2)

理系 $\boxed{3}$ の(1)にほぼ同じ。

(3)

理系 $\boxed{3}$ の(2)に同じ。

$\boxed{2}$ 正四面体 OABC の辺 OA を2：1 に内分する点をD，辺ABを$(1-x):x$ に内分する点をE，辺 BC を 1：2 に内分する点を F とする。ただし，x は $0<x<1$ を満たす。3 点 D，E，F を通る平面と直線 OC の交点をG とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答よ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{DE}$および$\overrightarrow{DF}$を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OG}=t\vec{c}$ を満たすt の値をx を用いて 表せ。

(3) 線分EG の長さを最小にする x の値を求めよ。

また，線分 EG の長さの最小値は辺 OA の長さの何倍であるか求めよ。

＜解答＞

理系の問題$\boxed{1}$を少々易化した問題。易化したところは，正四面体であること，変数yを定数としたことである。

(1)

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{DA}=\frac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=(1-x)\overrightarrow{AB}=(1-x)(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})=(1-x)(-\vec{a}+\vec{b})$

したがって，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\vec{a}+(1-x)(-\vec{a}+\vec{b})=\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$　（答）

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{DO}=-\frac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})=\frac{2}{3}(-\vec{c}+\vec{b})$

したがって，$\overrightarrow{DF}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}(-\vec{c}+\vec{b})=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　（答）

(2)

$\overrightarrow{DG}=u\overrightarrow{DE}+v\overrightarrow{DF}$ とおく。ただし u，v は実数

$\overrightarrow{OG}=t\vec{c}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\vec{a}+u\overrightarrow{DE}+v\overrightarrow{DF}$

$=\frac{2}{3}\vec{a}+u\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+u(1-x)\vec{b}-\frac{2}{3}v\vec{a}+\frac{2}{3}v\vec{b}+\frac{1}{3}v\vec{c}$

$=\left\{\frac{2}{3}+\left(x-\frac{2}{3}\right)u-\frac{2}{3}v\right\}\vec{a}+\left\{(1-x)u+\frac{2}{3}v\right\}\vec{b}+\frac{1}{3}v\vec{c}$

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は同一平面にないから，各ベクトルの係数について，以下が成立する。

$\frac{2}{3}+\left(x-\frac{2}{3}\right)u-\frac{2}{3}v=0$　①

$(1-x)u+\frac{2}{3}v=0$　②

$t=\frac{1}{3}v$　③

①，②，③から $t=1-x$　（答）

(3)

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}=-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}=-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OG}$

$=-\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}\right\}-\frac{2}{3}\vec{a}+(1-x)\vec{c}=-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}$

$\mathrm{EG}=|\overrightarrow{EG}|=\sqrt{|\overrightarrow{EG}|^2}$

$|\overrightarrow{EG}|^2=\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EG}=\{-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}\}\cdot\{-x\vec{a}-(1-x)\vec{b}+(1-x)\vec{c}\}$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=h$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=h^2\cos 60^\circ=\frac{h^2}{2}$，とおいて整理すると

$|\overrightarrow{EG}|^2=\{x^2+(1-x)^2+(1-x)^2\}h^2+2\{x(1-x)-x(1-x)-(1-x)^2\}\frac{h^2}{2}$

$= \{ x^2 + (1-x)^2 \} h^2 = (2x^2 - 2x + 1) h^2 = \left\{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\} h^2$

したがって，$x=\frac{1}{2}$ （答）のとき，$|\overrightarrow{EG}|^2$のは最小値$\frac{h^2}{2}$をとるから，

線分 EG の長さの最小値は$\frac{h}{\sqrt{2}}$，したがって辺OAの長さの$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍　（答）

<解説>

図１，図２のような図を描いて考察する。各ベクトルをベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$によって表現する。

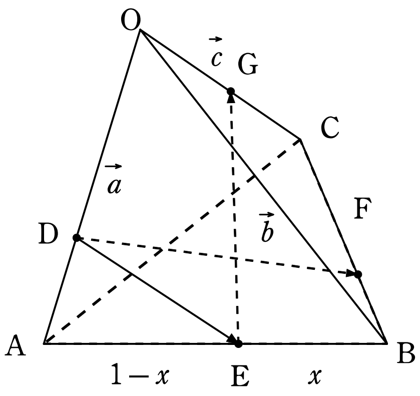

図１

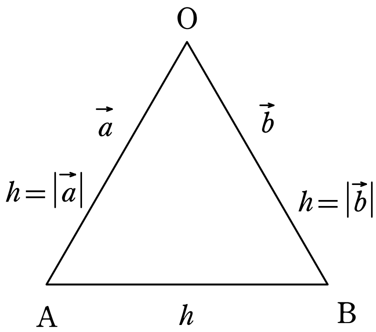

図２

$\boxed{3}$　放物線に関する次の問いに答よ。

(1) 正の整数の組 (m, n) に対して，次の条件を考える。

放物線 $y=mx^2-6x+n$ は，x 軸と$0 < x < \frac{3}{2}$の範囲で相異なる2点で交わる。

この条件を満たす正の整数の組 (m, n) のうちで，$m+n$の値が最小になるのは，(4 , 1)のときであることを証明せよ。

(2) ２つの放物線 $y=4x^2-6x+1$と $y=x^2-6x+4$の両方に接する直線は2本ある。
それらの直線の方程式を求めよ。

(3) 不等式 $x>0$ で表される領域において，(2)の２つの放物線と(2)で求めた直線のうち1 本で囲まれた部分の面積を求めよ。

<解答>

(1)

$$y = f(x) = mx^2-6x+n = m\left(x-\frac{3}{m}\right)^2-\frac{9}{m}+n$$

条件を満たすためには,

$0 < \frac{3}{m} < \frac{3}{2}$，したがって $2 < m$　①

$-\frac{9}{m}+n < 0$，したがって $n < \frac{9}{m}$　②

$f(0)=n>0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}m-9+n>0$, したがって $n>9-\dfrac{9}{4}m$　③

①からmは$m\geqq 3$の整数，②から$m\leqq\dfrac{8}{n}$，$n\geqq 1$だから，$m\leqq 8$

$m=3$ のとき，②，③から $\dfrac{9}{4}<n<3$，∴ 整数nは存在しない。

$m=4$ のとき，②，③から $0<n<\dfrac{9}{4}$，∴ $n=1$，または 2

$5\leqq m\leqq 8$ のとき，②から $n<\dfrac{9}{m}$，∴ $n=1$

以上によって，$m+n$ が最小になるのは，$(m, n)=(4, 1)$ のとき。

(2)

$y=f_1(x)=4x^2-6x+1$　④,

④と接する直線の方程式を$y=ax+b$　⑤

④，⑤を連立させた方程式 $4x^2-6x+1=ax+b$，すなわち $4x^2-(6+a)x+1-b=0$　⑥

⑥は重解をもつので，解の判別式 $D_1=(6+a)^2-16(1-b)=0$　⑦

$y=f_2(x)=x^2-6x+4$　⑧,

⑧と⑤を連立させると，$x^2-6x+4=ax+b$，すなわち$x^2-(6+a)x+4-b=0$　⑨

⑨が重解をもつとすれば，⑤は⑧に接する。⑨の解の判別式は $D_2=(6+a)^2-4(4-b)=0$　⑩

⑦，⑩が共通のa，bをもてば，$y=ax+b$は２つの放物線の接線である。

⑦，⑩を連立させると，$b=0$，$a=-6\pm 4=-2$または-10

したがって，２つの放物線と接する直線は $y=-2x$，$y=-10x$　（答）

(3)

題意を満たす接線は$y=-2x$　⑪

$x>0$において，④と⑪の接点は$\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$，⑧と⑪の接点は$(2, -4)$，④と⑧の交点は$(1, -1)$

したがって，求める面積は $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{(4x^2-6x+1)-(-2x)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x^2-6x+4)-(-2x)\}dx$

$=\left[\dfrac{4}{3}x^3-2x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{1}^{2}=\dfrac{1}{2}$　（答）

＜解説＞

放物線と2次方程式に関する問題。

(1)

放物線の頂点の位置，xの範囲の両端の値を，条件を満たすようにする必要がある。この際，図１のような図を描いて考察することが良い。条件を満たす (m, n) から$m+n$ が最小になるものを探す。

(2)

放物線と直線が接するとは，両者の方程式を連立させた2次方程式が重解をもつということである。

(3)

図２のような図を大雑把に描いて，題意を把握する。

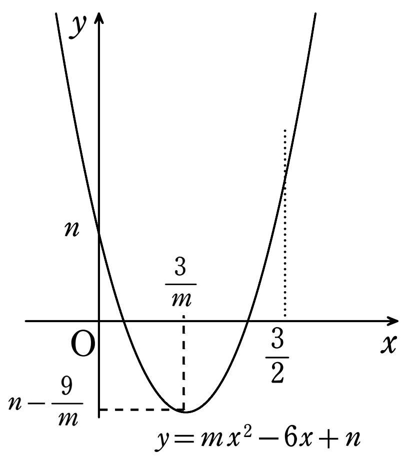

図1

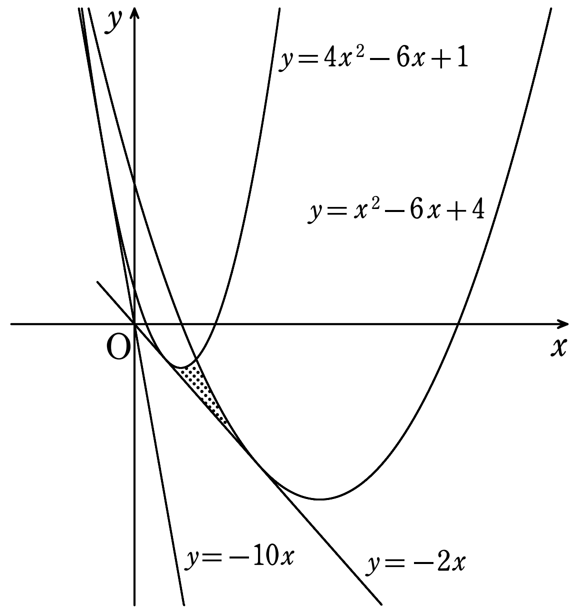

図2

$\boxed{4}$　単位円$x^2+y^2=1$上を動く点Qの座標を(X, Y)とする。次の問いに答えよ。

(1) x軸の正の部分に始線をとり，点Qが一般角θの動径上にあるとき，X，Yの値をθを用いてそれぞれ表せ。

(2) $2X+3Y$の取り得る値の範囲を求めよ。

(3) $XY-Y^2+\frac{1}{2}$の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点Qの座標をすべて求めよ。

(4) $6X^2-3X+4Y^2$の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点Qの座標をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

$X=\cos\theta$，$Y=\sin\theta$　（答）

(2)

$$2X+3Y=2\cos\theta+3\sin\theta=\sqrt{2^2+3^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}\cos\theta+\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\sin\theta\right)$$

$\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\sin\alpha$，$\frac{3}{\sqrt{13}}=\cos\alpha$とおけば，

$2X+3Y=\sqrt{13}(\sin\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha)=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

$0\leqq\theta<2\pi$だから，$\alpha\leqq\theta+\alpha<2\pi+\alpha$，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$だから，$-\sqrt{13}\leqq2X+3Y\leqq\sqrt{13}$　（答）

(3)

$$XY-Y^2+\frac{1}{2}=\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin2\theta+\cos2\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2\theta+\sin\frac{\pi}{4}\cos 2\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq\theta<2\pi$だから，$\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17\pi}{4}$，

したがって，$-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$だから，$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq XY-Y^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$のとき，最大値$\frac{1}{\sqrt{2}}$　（答）

このとき $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}+2\pi$，したがって $\theta=\frac{\pi}{8}$，$\frac{9\pi}{8}$

$\theta=\frac{\pi}{8}$のとき，$X=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$　（答）

$Y=\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　（答）

$\theta=\frac{9\pi}{8}$のとき，$X=\cos\frac{9\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$　（答）

$Y=\sin\frac{9\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　（答）

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$のとき，最小値$-\frac{1}{\sqrt{2}}$　（答）

このとき $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}+2\pi$，したがって $\theta=\frac{5\pi}{8}$，$\frac{13\pi}{8}$

$\theta=\frac{5\pi}{8}$のとき，$X=\cos\frac{5\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　（答）

$Y=\sin\frac{5\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$　（答）

$\theta=\frac{13\pi}{8}$のとき，$X=\cos\frac{13\pi}{8}=-\cos\frac{5\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$　（答）

$Y=\sin\frac{13\pi}{8}=-\sin\frac{5\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$　（答）

(4)

$$6X^2-3X+4Y^2=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4\sin^2\theta=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4(1-\cos^2\theta)$$

$$=2\cos^2\theta-3\cos\theta+4=2t^2-3t+4$$

$\cos\theta=t$とおけば，$0\leqq\theta<2\pi$だから，$-1\leqq t\leqq 1$

$f(t)=2t^2-3t+4=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$

したがって 最大値は$f(-1)=9$，最小値は $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{23}{8}$　（答）

最大値をとる $t=-1$のとき，$\cos\theta=-1$から $\theta=\pi$，$\therefore X=-1$，$Y=\sin\theta=0$　（答）

最小値をとる $t=\frac{3}{4}$のとき，$\cos\theta=\frac{3}{4}$，$\therefore X=\frac{3}{4}$，$Y=\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\pm\sqrt{7}}{4}$　（答）

＜解説＞

三角関数の基本公式を活用しながら，ていねいに計算すれば良い問題である。

(3)

$\sin\theta$，$\cos\theta$ は 2π を周期とする関数だから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の相異なる２つの θ において $\sin\theta$，$\cos\theta$ とも同一の値をとる，ことに注意する。

＜総評＞

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ とも理系の問題とほぼ同じだから，文系の問題としては少々手強い。難易度はＡ－とＢ＋。$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は標準レベルの問題で，難易度はＢ。

200828