2020 (R2) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）
・歯学部・薬学部・工学部・農学部・経済学部（理系）　　試験時間 150分

1　AB $=1$，AC $=1$，BC $=\dfrac{1}{2}$ である△ABCの頂点Bから辺ACに下ろした垂線と辺ACとの交点をHとする。

(1) ∠BACをθと表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１において，BC の中点をMとする。$\mathrm{AM}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2-\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2=\dfrac{7}{8}$　（答）

$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　（答）

(2)

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AH}+(1-s)\overrightarrow{AB}$

$\mathrm{AP}^2=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=s^2\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+2s(1-s)\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+(1-s)^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=s^2(\cos\theta)^2+2s(1-s)(\cos\theta)^2+(1-s)^2=\dfrac{49s^2}{64}+\dfrac{49s(1-s)}{32}+(1-s)^2$

$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CH}+(1-s)\overrightarrow{CB}$

$\mathrm{CP}^2=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}=s^2\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CH}+2s(1-s)\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}+(1-s)^2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=s^2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2+2s(1-s)\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi-\theta}{2}+(1-s)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\dfrac{s^2}{64}+\dfrac{s(1-s)}{32}+\dfrac{(1-s)^2}{4}$

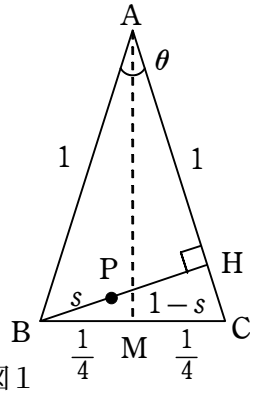

図１

$\mathrm{BP}=s\mathrm{BH}=s\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}s$，$\therefore\ \mathrm{BP}^2=\dfrac{15s^2}{64}$

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\dfrac{65s^2}{64}+\dfrac{25s(1-s)}{16}+\dfrac{5(1-s)^2}{4}$

$=\dfrac{5}{64}(9s^2-12s+16)=\dfrac{5}{64}\{(3s-2)^2+12\}\geqq\dfrac{15}{16}$　（等号は$3s-2=0$のとき）

以上によって，$s=\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{15}{16}$　（答）

＜解説＞

いろいろな解法が考えられるが，ここではベクトルを利用する解法を示した。教科書では，数学Ⅱ（三角関数），数学B（平面上のベクトル）の範囲である。

別解を示す。

図２のようにxy座標面上に△ABC を描く。点 P は$\left(\dfrac{15s}{32}-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}\,s}{32}\right)$

したがって，$\mathrm{AP}^2=\left(\dfrac{15s}{32}-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}\,s}{32}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2$

$\mathrm{BP}^2=\left(\dfrac{15s}{32}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}\,s}{32}\right)^2$

$\mathrm{CP}^2=\left(\dfrac{15s}{32}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}\,s}{32}\right)^2$

$\therefore\ \mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\dfrac{5}{64}(9s^2-12s+16)$

細かい数字の計算は少々煩瑣だが，こちらの解法がわかり易いかも知れない。

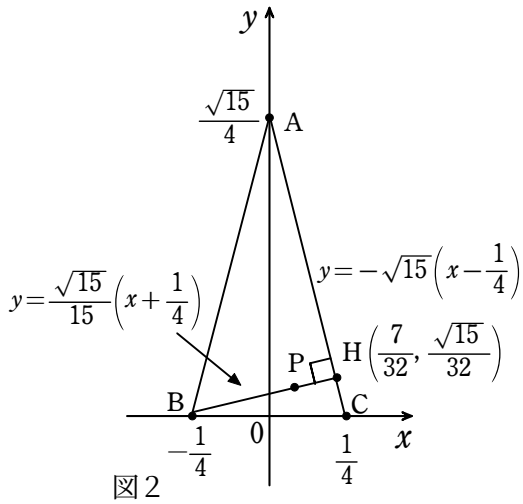

図２

$\boxed{2}$ a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 C：$x^2-2ax+y^2-4y+4=0$,
直線 L：$-4x+3y+a=0$，直線 M：$3x+4y-7a=0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 { P | 点 P は C と L の共有点} ∪ { P | 点 P は C と M の共有点} の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

L と M の方程式を連立させて解くと，$x=a$，$y=a$，$\therefore$ L と M の交点は $(a,\ a)$

この交点が円C上にあるのだから，円 Cの方程式に$x=a$，$y=a$を代入して，$a=1$　（答）

(2)

円 C の方程式は $x^2-2ax+y^2-4y+4=(x-a)^2-a^2+(y-2)^2=0$，$\therefore (x-a)^2+(y-2)^2=a^2$

したがって，円 C は中心が $(a,\ 2)$，半径が $|a|$ の円

C と L が異なる2 つの共有点をもつことは，円 C の中心と直線 L との距離が半径よりも小さいこと

中心 $(a,\ 2)$ と L との距離 $\dfrac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$，$\therefore\ 3|2-a|<5|a|$

両辺は正だから，$3|2-a|<5|a| \Leftrightarrow (3|2-a|)^2<(5|a|)^2$,

$\therefore\ 4a^2+9a-9=(4a-3)(a+3)>0$，$\therefore\ a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$　（答）

(3)

定義された集合の要素が 3 となるのは以下の場合である。

イ）C と L が2 個の共有点，C と M が2 個の共有点をもち，うち1 個が同じ点の場合

(1)の場合だから，$a=1$，このとき直線 L と M は明らかに異なる直線だから，円 Cとはそれぞれ他の点でも交わる。したがって，集合の要素は 3 である。

ロ）直線 L と M のいずれかが円 C と交わり，他が C と接する場合

L が交わり，M が接する場合

L が交わるのは(2)の場合，$\therefore a<-3,\ a>\dfrac{3}{4}$　①

M が接する場合，中心 $(a, 2)$ と M との距離 $\dfrac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=|a|$，$\therefore |8-4a|=5|a|$

両辺は正だから，$|8-4a|=5|a| \Leftrightarrow (|8-4a|)^2=(5|a|)^2$，$\therefore (9a-8)(a+8)=0$

$\therefore a=-8,\ \dfrac{8}{9}$　②，②は①を満たすから，$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$

M が交わり，L が接する場合

中心 $(a, 2)$ と Mとの距離 $\dfrac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$，$\therefore |8-4a|<5|a|$

$\therefore (9a-8)(a+8)>0$，$\therefore a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$　③

中心 $(a, 2)$ と Lとの距離 $\dfrac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=|a|$，$\therefore 3|2-a|=5|a|$

$\therefore\ a=-3,\ \dfrac{3}{4}$　④，④は③を満たさないので，M が交わり L が接する場合は存在しない。

以上によって，$a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1$　（答）

＜解説＞

(2)

別解を示す。2次方程式の解の問題として考える方法である。

L の方程式から $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{a}{3}$，これを C の方程式に代入して，

$25x^2-2(13a+24)x+a^2+12a+36=0$,

異なる 2 つの共有点をもつとは，この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつこと。

解の判別式 $D=(13a+24)^2-25(a^2+12a+36)=144a^2+12\cdot 27a-12\cdot 27>0$

$\therefore (4a-3)(a+3)>0$，したがって $a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$（答）

点と直線の距離の公式を覚えていない場合は，この方法を採用したい。計算がやや煩瑣になる。

(3)

同様に，上記の別解のように考えることもできる。

$\boxed{3}$　n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする。

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $2^n+n^2+8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3) 等式 $2^n+n^2+8 = 3^n+an+b$ を満たすa，b，n の組 (a, b, n) をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

与えられた不等式 $2^n+n^2+8 < 3^n$　①　について

$n=3$のとき，左辺は$2^3+3^2+8 = 25$，右辺は 27，したがって①は成立する。

$n = k > 3$のとき，①は成立し，$2^k+k^2+8 < 3^k$とする。すると，$3(2^k+k^2+8) < 3^{k+1}$

$n=k+1$のとき，①の左辺　$2^{k+1}+(k+1)^2+8 = 2^{k+1}+k^2+2k+9$

$3(2^k+k^2+8)-(2^{k+1}+k^2+2k+9) = 2^k+2k^2-2k+15 = 2^k+2k(k-1)+15 > 0$

$\therefore 2^{k+1}+(k+1)^2+8 < 3(2^k+k^2+8) < 3^{k+1}$

すなわち，$n = 3$ のとき不等式①は成立し，$n = k > 3$のとき，①が成立するとすれば，$n=k+1$のときも①は成立する。

したがって，数学的帰納法によって，$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n+n^2+8 < 3^n$ が成立する。

(2)

不等式 $2^n+n^2+8 \geqq 3^n$　②　において，(1)の結果より，$n \geqq 3$では②は成立しない。

$n = 2$ では，②の左辺は $2^2+2^2+8 = 16$，右辺は $3^2 = 9$，②は成立する。

$n = 1$ では，②の左辺は $2^1+1^2+8 = 11$，右辺は $3^1 = 3$，②は成立する。

したがって，②を満たすすべての n は1，2　（答）

(3)

$2^n+n^2+8 < 3^n$ を満たす n は $2^n+n^2+8 = 3^n+an+b$　③を満たすことはない。

したがって$n = 1$，2の場合のみを考える。

$n = 1$のとき $3+a+b = 11$，$\therefore a+b = 8$，$\therefore (a, b) = (a, 8-a)$，$a=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$n = 2$ のとき $9+2a+b = 16$，$\therefore 2a+b = 7$，$\therefore (a, b) = (a, 7-2a)$，$a=0, 1, 2, 3$

以上によって，③を満たす組 (a, b, n) は

$(a, 8-a, 1)$，$a=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ と $(a, 7-2a, 2)$，$a=0, 1, 2, 3$　（答）

＜解説＞

一読，難しそうな問題だが，実際にはそうではない。(1)では，数学的帰納法の活用が直ぐに思い浮かぶであろう。$2^{k+1}+(k+1)^2+8 < 3(2^k+k^2+8) < 3^{k+1}$を容易に導くことができるから，容易に数学的帰納法によって証明できる。

$\boxed{4}$　白球 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を1個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1) 2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2) 3 回の試行の結果，手元の玉が白玉が 1 個，赤玉1個の計2個となる確率を求めよ。

(3) n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4) (3)の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

＜解答＞

(1)

1回目の試行で，白玉を取り出し，硬貨を表にする確率　$\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

2回目の試行で，白玉を取り出し，硬貨を表にする確率　$\frac{3-1}{5-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

求める確率は両者が続けて起こる確率だから，$\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{40}$　（答）

(2)

先に白が手元に来て，後で赤が手元に来て，玉を戻す確率

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{80}$$

先に赤が手元に，後で白が手元に，玉を戻す確率

$$\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{80}$$

両方の確率は同じ。

硬貨の裏が出て玉を箱に戻す事象は，この後の試行に影響を与えないから，硬貨の裏が出る試行は1回目，2回目，3回目であっても，白玉1個，赤玉1個となる確率に影響しない。

したがって，手元の玉が白玉 1 個，赤玉1個の計 2 個となる確率は $\left(\frac{3}{80}+\frac{3}{80}\right)\times3=\frac{9}{40}$　（答）

(3)

n 回目で試行が停止するとは，n 回目でちょうど白玉 3 個，赤玉 2 個手元に来る，ということ。

そのためには，n 回の試行のうち $(n-1)$ 回の試行のうち 4 回表が出て，n 回目で表が出ること。

その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-4}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$(n-1)$ 回の試行のうち 4 回表が出る場合の数は ${}_{n-1}C_4$ 通り。

したがって，$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n{}_{n-1}C_4$　（答）

(4)

$$r_n=\frac{p_n}{p_{n+1}}=\frac{2(n-4)}{n}=2-\frac{8}{n},\ p_{n+1}=\frac{p_n}{r_n}$$

$$r_5=\frac{2}{5},\ r_6=\frac{2}{3},\ r_7=\frac{6}{7},\ r_8=1,\ r_9=\frac{10}{9},\ r_{10}=\frac{6}{5},\ \cdots,\ 0.4\leqq r_n<2$$

r_n は n の増加に伴い一様に増加する。

したがって，$r_8=1$ に達するまでは p_{n+1} は増加するが，その後は減少する。

$p_5=\left(\frac{1}{2}\right)^5{}_4C_4=\frac{1}{32}$，$p_6=\left(\frac{1}{2}\right)^6{}_5C_4=\frac{5}{64}$，$p_7=\left(\frac{1}{2}\right)^7{}_6C_4=\frac{15}{128}$，$p_8=\left(\frac{1}{2}\right)^8{}_7C_4=\frac{35}{256}$

$p_9=\left(\frac{1}{2}\right)^9{}_8C_4=\frac{35}{256}$，$p_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}{}_9C_4=\frac{63}{512}$

$p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}$

$p_8=p_9$ で最大値 $\frac{35}{256}$ に達し，その後は減少する。

したがって，確率 p_n が最大となる n は，$n=8$，9　（答）

＜解説＞

確率の問題は，個別の問題に対応する着眼，着想が必要なため、意外に手こずる恐れがある。

(2)

3回の試行で白玉1個，赤玉1個となる場合は，どちらを先に取るかという場合がある。そこで，まずは，白玉が先，赤玉が先の場合について，確率を求めてみると同じであることに気づく。

また，硬貨の裏が出る事象は，玉を箱に戻すことだから，後の試行に影響を与えない。したがって，1，2，3回目のどの試行で裏が出ても，白玉，赤玉が1個ずつとなる事象は同じであることに気づきたい。

(3)

複雑そうな問題だが，容易な問題であることに気づきたい。n 回目で試行が停止するとは，どういう事象かを考察する。できるだけ単純に事象を表現する。すると，白赤に関係なく，n 回目の試行で硬貨の表がちょうど 5 回目になるということに気づく。すなわち，$(n-1)$ 回目までの試行で 4 回表が出て，n 回目の試行で表が出ることである。

(4)

$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n{}_{n-1}C_4=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2^n4!}$ だから，n の関数とした場合，どのような変化をするか，見通し難い。数列 p_5，p_6，p_7，p_8，… の変化だから，項比によって変化を考察することを着想したい。

$\boxed{5}$　実数 t に対して複素数 $z=\frac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 絶対値 $\left|z-\frac{i}{2}\right|$ を求めよ。

(3) 実数 t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

＜解答＞

(1)

$$z=\frac{-1}{t+i}=\frac{-1(t-i))}{(t+i)(t-i)}=\frac{-t+i}{t^2-i^2}=\frac{-t+i}{t^2+1}$$，したがって

zの実部：$\dfrac{-t}{t^2+1}$，zの虚部：$\dfrac{1}{t^2+1}$　（答）

(2)

$$\left|z-\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{-t+i}{t^2+1}-\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{-2t+2i-(t^2+1)i}{2(t^2+1)}\right| = \left|\frac{-2t+(1-t^2)i}{2(t^2+1)}\right|$$

$$= \frac{1}{2(t^2+1)}\sqrt{(-2t)^2+(1-t^2)^2} = \frac{1}{2}$$　（答）

(3)

$z = x+yi$ とおく。すなわち$x = \dfrac{-t}{t^2+1}$，$y = \dfrac{1}{t^2+1}$

$y \neq 0$だから $t = -\dfrac{x}{y}$，$y = \dfrac{1}{\left(\dfrac{-x}{y}\right)^2+1} = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$，$x^2+y^2-y=0$，したがって，

$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$-1 \leqq t \leqq 1$において，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \leqq 0$，$\therefore$ x は t に関して一様減少，$\therefore$ $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$

また $\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$

点zの軌跡は図１のようになる。

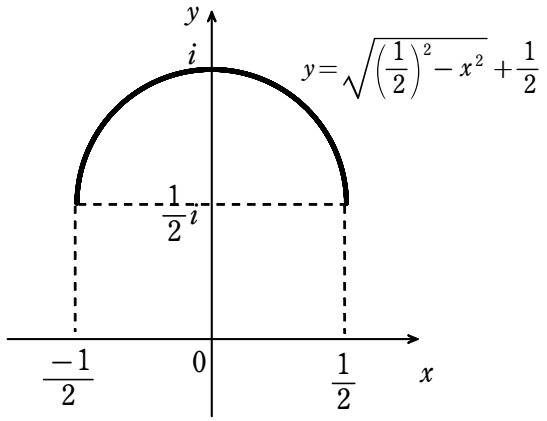

図１

＜解説＞

複素数の基本的な理解を問う問題。解答に示したので，特段の解説は必要ないだろう。(3)では，tを消去してx，y の関係式を求めれば良い。

$\boxed{6}$　正の整数 m，n に対して実数 $A(m, n)$を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

(2) $A(m, 1)$を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1}A(m+2, n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m, n)$ は有理数であることを示せ。

＜解答＞

(1)

$t = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおく。x が $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t は $\dfrac{\pi}{2} \to 0$

$\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$，$\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$，$dt = -dx$

したがって，

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^m t \cos^n t\,(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^m t\, dt = A(n, m)$$

$$A(m+2, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\,(1 - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^{n+2} x dx$$

$$= A(m, n) - A(m, n+2)$$

したがって，$A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$

(2)

$$A(m, 1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin x\, dx = \left[-\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m+1} \quad \text{（答）}$$

(3)

$B(m, n) = \int \cos^m x \sin^n x\, dx$ とすれば，$A(m, n) = \Big[B(m, n)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$B(m+2, n) = \int \cos^{m+2} x \sin^n x dx = \int \cos^{m+1} x \sin^n x \cos x\, dx$

ここで，$f(x) = \cos^{m+1} x$，$g'(x) = \sin^n x \cos x$ として，部分積分法すなわち

$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$，を適用すると

$$B(m+2, n) = \cos^{m+1} x \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} - (m+1) \frac{1}{n+1} \int \cos^m x\,(-\sin x) \sin^{n+1} x\, dx$$

$$= \cos^{m+1} x \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+1}{n+1} \int \cos^m x \sin^{n+2} x\, dx$$

$$= \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+1}{n+1} B(m, n+2)$$

したがって，

$$A(m+2, n) = \Big[B(m+2, n)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+1}{n+1} B(m, n+2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{m+1}{n+1} \Big[B(m, n+2)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{m+1}{n+1} A(m, n+2)$$

したがって，$A(m, n+2) = \dfrac{n+1}{m+1}A(m+2, n)$

(4)

m は正の奇数として，$m = 2k-1$，$k = 1, 2, 3, \ldots$

(1)と(3)の結果から，$A(m+2, n) + \dfrac{n+1}{m+1}A(m+2, n) = A(m, n)$

したがって，$\dfrac{2k+n+1}{2k}A(2k+1, n) = A(2k-1, n)$

$A(2k+1, n) = \dfrac{2k}{2k+n+1}\ A(2k-1, n)$　①，$k = 1, 2, 3, \ldots$

k=1のとき，(2)により，$A(1, n) = A(n, 1) = \dfrac{1}{n+1}$，すなわち$A(1, n)$は有理数

$k = j$ のとき$A(2j-1, n)$が有理数とすれば，①から$A(2j+1, n)$も有理数
すると，$k = j+1$ のとき，①から$A(2j+3, n)$も有理数
したがって，数学的帰納法により，$A(2k-1, n) = A(m, n)$ は有理数

$A(m, n) = A(n, m) = A(n+2, m) + \dfrac{m+1}{n+1}A(n+2, m)$ だから，

同様に n が $n = 2k-1$と奇数のとき，$A(n, m) = A(m, n)$ は有理数となる。
以上より，m または n が奇数ならば，$A(m, n)$ は有理数である。

＜解説＞

(1)

m と n を交換しても，定積分の結果が同じであることを証明しようと考えると，原始関数を求めることが必要になって迷路にはまり込む。

ここは，与えられた定積分の形式を凝視して，m とn を交換しても形式が不変にならないかを考えてみよう。すると，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$によって，$\sin x$と$\cos x$の表示を交換できることに気づきたい。

(2)

$A(m, 1)$ の定積分計算に必要な原始関数を求める。

(3)

不定積分によって，式の変形を行ってから，定積分を行うことを着想したい。ここでは，部分積分法を用いると，不定積分 $B(m, n)$ の表式における関係式が見つかると予想される。もちろん，わざわざ不定積分 $B(m, n)$ のような表現を持ち出さなくても，定積分$A(m, n)$ において同様の変形ができるので，単に表式がわかり易くなるということだけのことである。

(4)

数学的帰納法で記述したが，$A(2k+1, n) = \dfrac{2k}{2k+n+1}\ A(2k-1, n)$　①，$k = 1, 2, 3, \ldots$

によって，$A(1, n)$が有理数だから，k が1ずつ増加して決まる$A(2k+1, n)$が有理数であることは明らかである。

＜総評＞

昨年に比べると，易化したように思う。今年の解答解説文 9.6 ページ，昨年は 10.4 ページと約 0.8 ページ短くなっている。150分という時間では手強い問題ではあるが，計算は複雑なものではないので，75%以上の得点をめざしたい。

1

数学Ⅱ，数学 B の範囲の問題。ベクトルを利用するかどうかにより，解法が分かれる。どちらによっても，2 次関数の最小値問題に帰着する。解法の着眼着想も難しいものではなく，計算ミスに気をつけて，スムーズに正解しよう。難易度はB。

2

これも二次関数の解の問題として扱うか，図形と方程式の問題として扱うか，解法が分かれるところだ。後者の方がやや扱い易いが，点と直線の距離の公式を覚えている必要がある。公式を覚えていない場合は，前者の解法によることもやむを得ない。難易度はB。

3

整数の問題。数学的帰納法の活用を着想して，速やかに解答したい。難易度はB－。

4

確率の問題。確率漸化式を求め，計算がやや複雑な昨年の確率の問題に対して，今年の問題は扱い易い。できるだけ単純に扱うためには，少々の着眼，着想が必要である。難易度はB。

5

去年は出題のなかった複素数の問題。複素数の基礎，基本の理解ができていれば，難しいことはなかろう。難易度はB－。

6

三角関数の積分の問題。(1)では着想が必要で，類似問題を扱った経験があれば，スムーズにいくであろう。試験場で初見問題と緊張すると，解答方針が迷路にはまり込んでしまう恐れがある。難しいと思ったら，ちょっとした気づき（着想）が正解に導くものだと，頭を柔らかくしてみよう。

前問が後問に活用されるよう，設問が構成されている。難易度はA－。

220809

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部(文系)・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

1　a を $-2 \leqq a \leqq 3$ を満たす実数とする。次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<-2\text{のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leqq x \leqq a\text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leqq x \leqq 3\text{ のとき}) \\ 0 & (x>3\text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。また，$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$y = f(x)$のグラフは図１のようになる。

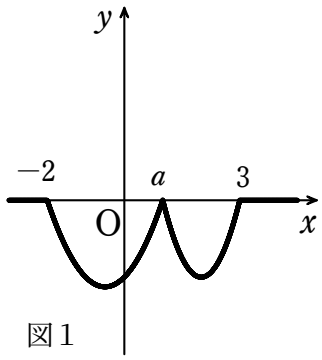

図１

$$S(a) = \int_{-2}^{a}\{0-(x+2)(x-a)\}\,dx + \int_{a}^{3}\{0-2(x-a)(x-3)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(a+2)^3 + \frac{1}{3}(3-a)^3$$

$$= \frac{1}{6}(-a^3+24a^2-42a+62) \quad \text{（答）}$$

$a = -2$ のとき，$S(a)$ の第一項は 0，$a = 3$ のとき第二項は 0 となり上の式は成立する。

(2)

$$S'(a) = -\frac{1}{2}(a^2-16a+14) = -\frac{1}{2}\{(a-8)^2-50\} = -\frac{1}{2}\{a-(8-5\sqrt{2})\}\{a-(8+5\sqrt{2})\}$$

a	-2		$8-5\sqrt{2}$		3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

図２

$S(a)$ は図２のような変化をするから，$a = 8-5\sqrt{2}$ （答）で最小値をとる。

また $S(a)$ は $-2 \leqq a \leqq 3$ の両端のいずれかで最大値をとる。

$S(-2) = \dfrac{125}{3}$，$S(3) = \dfrac{125}{6}$，したがって，$S(a)$ が最大となるのは $a = -2$ （答）

＜解説＞

(1)

定積分の公式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使う（数学Ⅱの教科書に記載）。

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{3}$ と同じ

$\boxed{3}$ 理系の $\boxed{2}$ と同じ。

$\boxed{4}$ 6 枚の硬貨を同時に投げて，表が出た硬貨が s 枚，裏が出た硬貨が t 枚であったとき，ベクトル $\vec{p} = (x, y)$ を $\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2)$ で定める。

(1) $x + y$ の値を求めよ。

(2) $\vec{p} = (0, 6)$ となる確率を求めよ。

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q} = (3, 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

$x = 2s - t = 2s - (6 - s) = 3s - 6$

$y = -s + 2t = -s + 2(6 - s) = 12 - 3s$

$\therefore x + y = 6$　（答）

(2)

(1)の結果から，$\vec{p} = (0, 6) \Leftrightarrow s = 2$

6 枚の硬貨のうち 2 枚が表になる場合の数は，${}_6C_2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = 15$ 通り。

2 枚が表，4 枚が裏になる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^6}$，$\therefore s = 2$ となる確率は $\dfrac{1}{2^6} \times 15 = \dfrac{15}{64}$　（答）

(3)

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とすれば，$\cos\theta = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \dfrac{s-1}{\sqrt{5}\sqrt{s^2-6s+10}}$

$\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2) = s(2, -1) + (6-s)(-1, 2) = (3s-6, 12-3s)$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = (3s-6, 12-3s)\cdot(3, 1) = 9s-18+12-3s = 6s-6$

$|\vec{p}| = 3\sqrt{(s-2)^2+(4-s)^2} = 3\sqrt{2s^2-12s+20}$

$|\vec{q}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$|\theta| \leqq \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{s-1}{\sqrt{5}\sqrt{s^2-6s+10}} \leqq 1$

$\dfrac{41-\sqrt{75}}{11} \leqq s \leqq \dfrac{41+\sqrt{75}}{11}$，$\therefore 3 \leqq s \leqq 4$，すなわち $s = 3, 4$

$s = 3, 4$ となる確率は，$\dfrac{1}{2^6} \times ({}_6C_3 + {}_6C_4) = \dfrac{1}{2^6} \times (20 + 15) = \dfrac{35}{64}$　（答）

＜解説＞

(1)，(2)

$s + t = 6$ であることを忘れない。

(3)

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{s-1}{\sqrt{5}\sqrt{s^2-6s+10}}$ から，$15s^2 - 90s + 150 \leqq 4s^2 - 8s + 4$，$\therefore 11s^2 - 82s + 146 \leqq 0$

したがって，$\dfrac{41-\sqrt{75}}{11} \leqq s \leqq \dfrac{41+\sqrt{75}}{11}$，$2.9 \leqq s \leqq 4.6$，$\therefore s$ は整数だから，$s = 3, 4$

$0 \leqq \dfrac{s-1}{\sqrt{5}\sqrt{s^2-6s+10}} \leqq 1$ から，$s \neq 0$，$(s-1)^2 \leqq 5s^2 - 30s + 50$，$\therefore (2s-7)^2 \geqq 0$，すべての s で成立

したがって，$s = 3, 4$

＜総評＞

$\boxed{1}$

図形と微分積分の問題。文系の問題としては標準的な難易度でＢ。

$\boxed{2}$

理系の $\boxed{3}$ に同じ。文系の問題としては標準的な難易度でＢ。

$\boxed{3}$

理系の $\boxed{2}$ に同じ。文系の問題としてはやや難しいかも知れない。難易度Ｂ＋。

$\boxed{4}$

ベクトル分野と確率分野に関する，数学Ｂの範囲の問題。文系の問題としては，適切な難易度でＢ。

220814