(令和２年度前期日程)

数　　学

180　分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページ，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. **各**答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下 2 桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

試験問題は，つぎのページより始まります。

$\boxed{1}$ (60 点)

次の問いに答えよ.

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ.

(2) k 個の連続した正の整数 x_1, …, x_k に対して,

$$|x_j{}^2 - x_j - 23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と, その k に対する連続した正の整数 x_1, …, x_k をすべて求めよ. ここで k 個の連続した整数とは,

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである.

（下　書　き　用　紙）

2 (60 点)

複素数平面上の異なる3点A，B，Cを複素数α，β，γで表す．ここでA，B，Cは同一直線上にないと仮定する．

(1) △ABCが正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2) △ABCが正三角形のとき，△ABCの外接円上の点Pを任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径Rを用いて表せ．ただし2点X，Yに対し，XYとは線分XYの長さを表す．

(下　書　き　用　紙)

3 (60点)

座標空間に5点

$$O(0,0,0),\ A(3,0,0),\ B(0,3,0),\ C(0,0,4),$$
$$P(0,0,-2)$$

をとる．さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して2点 $Q(a,\ 0,0)$ と $R(0,\ b,\ 0)$ を考える．

(1) 点P，Q，Rを通る平面をHとする．平面Hと線分ACの交点Tの座標，および平面Hと線分BCの交点Sの座標を求めよ．

(2) 点Q，R，S，Tが同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{4}$ (60 点)

n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

（下　書　き　用　紙）

5 (60 点)

k を正の整数とし，$a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく.

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ.

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ.

(3) (2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 m, n $(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ.

(4) (2) と (3) の極限値 A, B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p, q, r $(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値を求めよ.

（下　書　き　用　紙）