2020（R2）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$（60点）

次の問いに答えよ．

(1)　$|x^2-x-23|$ の値が，3 を法として2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2)　k 個の連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ に対して，

$$|x_j{}^2-x_j-23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \dots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである。

＜解答＞

(1)

$x^2-x-23<0$ のとき，$1 \leqq x < \dfrac{1+\sqrt{93}}{2}$，$\therefore x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$|x^2-x-23| = -x^2+x+23 = -x^2+x+(3\cdot7+2) = 3p+2 \quad (p=0,1,2,...)$

$\Leftrightarrow -x^2+x = 3(p-7) \equiv 0 \pmod 3$　①，①を満たすx は 1，3，4

$x^2-x-23 \geqq 0$ のとき，$\dfrac{1+\sqrt{93}}{2} \leqq x$，$\therefore 6 \leqq x$

$|x^2-x-23| = x^2-x-23 = x(x-1)-(3\cdot7+2) = 3p+2$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 3(p+8)+1 \equiv 1 \pmod 3$　②

正の整数 x は$x=3q,\ 3q+1,\ 3q+2 \quad (q=0,1,2,...)$ と表せるが，

$3q(3q+1) \equiv 0 \pmod 3$，$(3q+1)(3q+2) \equiv 2 \pmod 3$，$(3q+2)(3q+3) \equiv 0 \pmod 3$ だから，

② を満たすx は存在しない。

以上によって，求める x は $x=1,\ 3,\ 4$　（答）

(2)

正の整数 x において，$|x^2-x-23|$が素数になる場合を考察する。

$x^2-x-23<0$ のとき，$1 \leqq x < \dfrac{1+\sqrt{93}}{2}$，$\therefore x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$f(x)=|x^2-x-23| = -x^2+x+23$ とおく。

$f(1)=23$，$f(2)=21$，$f(3)=17$，$f(4)=11$，$f(5)=3$，$x=3,\ 4,\ 5$ において素数が続く。

$x^2-x-23 \geqq 0$ のとき，$\dfrac{1+\sqrt{93}}{2} \leqq x$，$\therefore 6 \leqq x$

$f(x)=|x^2-x-23| = x^2-x-23$

$f(6)=7$，$f(7)=19$，$f(8)=33$，$x=6,\ 7$ において素数が続く。

$x=x_j=3q$ のとき，$f(3q)=3q(3q-1)-23 = 3(3q^2-q-8)+1 \equiv 1 \pmod 3 \quad (q=2,3,4,...)$

$x=x_{j+1}=3q+1$のとき，$f(3q+1)=3q(3q+1)-23 = 3(3q^2+q-8)+1 \equiv 1 \pmod 3$

$x=x_{j+2}=3q+2$のとき，$f(3q+2)=(3q+2)(3q+1)-23=3(3q^2+3q-7)\equiv 0\ (\mathrm{mod}3)$
したがって，$f(3q+2)$は素数ではない。
したがって，$6\leqq x$において，$f(x_j)$に素数が続くとしても，2 個まで。
以上によって，$k=5$，$x_1=3$，$x_2=4$，$x_3=5$，$x_4=6$，$x_5=7$　（答）

＜解説＞
整数の問題。
(1)
$|x^2-x-23|$の値が，3 を法として2 に合同であるとは，
$|x^2-x-23|=3p+2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$　$(p=0,1,2,...)$　であること。
まずは，絶対値記号を外して考える。$23=3\cdot 7+2$と表現できることに着目する。正の整数xについて，連続する整数の積$x(x-1)$を3 を法とした合同式による表現を考える。
合同式による整数の表現は数学Aの教科書における発展として記載されている。難しいものではなく，整数の徐算における剰余の表現を扱うことでもあるから使えるようにしよう。
(2)
$|x_j{}^2-x_j-23|$が素数になるかどうかは，x_jに具体的な値を定めて確かめるしかない。$x=3$，4，5 において素数が続くことがわかる。$x\geqq 6$では，$x=3q$，$3q+1$，$3q+2$と表現して，$|x_j{}^2-x_j-23|$が素数になる条件を考察してみよう。何らかの制約条件が見つからないと，非常に多くの素数を数え上げることになるから，制約条件が見つかるはずだと予測しよう。

$\boxed{2}$（60点）
複素数平面上の異なる 3 点A，B，C を複素数α，β，γで表す。ここでA，B，C は同一直線上にないと仮定する．
(1)　△ABC が正三角形となる必要十分条件は，
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$
であることを示せ．
(2)　△ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，
$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$
および
$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$
を外接円の半径Rを用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

＜解答＞
(1)
図１’は図１の頂点A(α)が原点A’(0)になるよう△ABCを平行移動した図である。
△ABC が正三角形$\Leftrightarrow$△A’B’C’ が正三角形$\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2-\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}+1=0$

$\Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

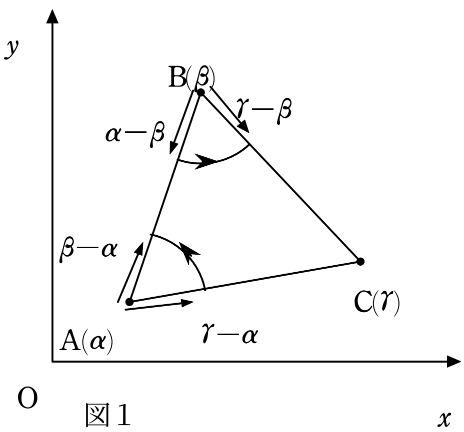

図１

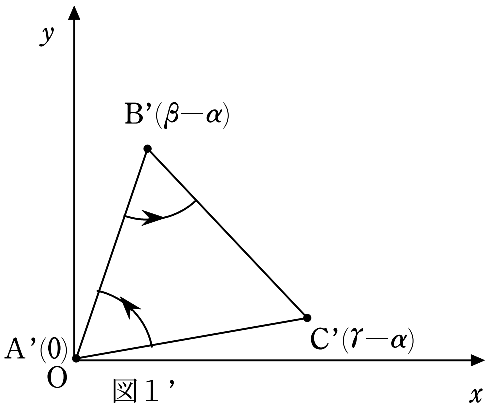

図１’

(2)

図２のように，正三角形の重心と外接円の中心 を座標系の原点 O とし，頂点A，B，C を定めても一般性を失わない。

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2+|z-\gamma|^2$

$=(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}+(z-\beta)\overline{(z-\beta)}+(z-\gamma)\overline{(z-\gamma)}$

$=3|z|^2+(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2)-z(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})-\overline{z}(\alpha+\beta+\gamma)$ ①

z, α, β, γ は外接円上の点だから，$|z|=|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=R$ ②

$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とする。

α, β, γ が原点を中心とする円に内接する正三角形の頂点であることから，

$\beta=\omega\alpha$, $\gamma=\omega\beta=\omega^2\alpha$ であるから， $\alpha+\beta+\gamma=\alpha(1+\omega+\omega^2)$

$1+\omega+\omega^2=1+\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i=0$

したがって， $\alpha+\beta+\gamma=0$，$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}=0$

したがって①，②から，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3R^2+3R^2=6R^2$ （答）

$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=|z-\alpha|^4+|z-\beta|^4+|z-\gamma|^4$

$|z-\alpha|^4=(|z-\alpha|^2)^2=\{(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}\}^2=\{z\overline{z}-(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)+\alpha\overline{\alpha}\}^2=\{|z|^2+|\alpha|^2-(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)\}^2$

$=\{2R^2-(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)\}^2=4R^4-4R^2(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)+(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)^2$

同様に，$|z-\beta|^4=4R^4-4R^2(z\overline{\beta}+\overline{z}\beta)+(z\overline{\beta}+\overline{z}\beta)^2$

同様に， $|z-\gamma|^4=4R^4-4R^2(z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma)+(z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma)^2$

$|z-\alpha|^4+|z-\beta|^4+|z-\gamma|^4$

$=12R^4-4R^2z(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})-4R^2\overline{z}(\alpha+\beta+\gamma)+(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)^2+(z\overline{\beta}+\overline{z}\beta)^2+(z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma)^2$

$=12R^4+(z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha)^2+(z\overline{\beta}+\overline{z}\beta)^2+(z\overline{\gamma}+\overline{z}\gamma)^2$

$=12R^4+z^2(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2)+\overline{z}^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2z\overline{z}(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\gamma\overline{\gamma})$

$= \ 12R^4+z^2(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2)+\overline{z}^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2R^2(R^2+R^2+R^2)$

$= \ 18R^4-2z^2(\overline{\alpha}\ \overline{\beta}+\overline{\beta}\ \overline{\gamma}+\overline{\gamma}\ \overline{\alpha})-2\overline{z}^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

ここで,

$(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\ )^2 = \overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2+2(\overline{\alpha}\ \overline{\beta}+\overline{\beta}\ \overline{\gamma}+\overline{\gamma}\ \overline{\alpha})=0,\ \therefore\ \overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2 = -2(\overline{\alpha}\ \overline{\beta}+\overline{\beta}\ \overline{\gamma}+\overline{\gamma}\ \overline{\alpha})$

$(\ \alpha+\beta+\gamma\ )^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0,\ \therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \alpha\omega\alpha+\omega\alpha\omega^2\alpha+\omega^2\alpha\alpha=\omega\alpha^2(1+\omega+\omega^2) = 0$

$\overline{\alpha}\ \overline{\beta}+\overline{\beta}\ \overline{\gamma}+\overline{\gamma}\ \overline{\alpha} = \overline{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} = 0$

$\therefore\ \mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4 = |z-\alpha|^4+|z-\beta|^4+|z-\gamma|^4 = 18R^4$ （答）

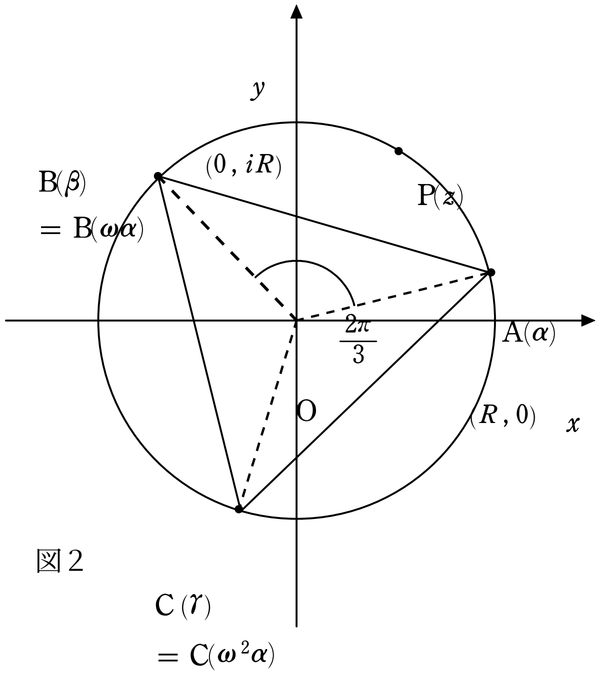

図２

<解説>

複素数空間で図形を複素数によって上手に表現する問題である。複素数とその共役複素数の積の√が絶対値であり，原点からの距離であることを式中で多用して計算を進める。

(1)

△ABC が正三角形のとき，もっともらしい表式， $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ をどのように導くか。着眼，着想が必要である。図１のような図をメモ書きして考える。そして図１から図１’のような頂点Aを原点に平行移動した△A’B’C’について考えると着想しやすい。

△A’B’C’の頂点B’は頂点C’を$\frac{\pi}{3}$あるいは$-\frac{\pi}{3}$だけ原点の周りに回転した点であることに気づく。すると，複素数$(\beta-\alpha)$と$(\gamma-\alpha)$の関係式を求めることができるので，これを変形することを考える。

別解を示す。図３において考える。

△ABC が正三角形 $\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} \Leftrightarrow -(\alpha-\beta)^2 =(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

$\Leftrightarrow\ \gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2=0\ \Leftrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

この解法は非常にすきっりしたものであり，回転角$\pm\dfrac{\pi}{3}$を使わなくてよい。しかし，このような表式を着想するのは容易ではないような気がする。類似問題の経験があれば別だが。辺 AC をAを中心に時計回りに$\dfrac{\pi}{3}$回転したものが辺AB，辺 BA をBを中心に時計回りに$\dfrac{\pi}{3}$回転したものが辺 BC として，複素数 α，β，γ の関係を表式できることに気づく必要がある。

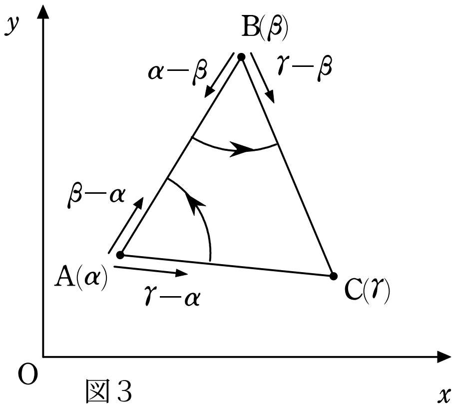

図３

(2)

まずは，賢明なる読者は△ABCと外接円の中心を座標の原点にして考えるであろう。図２とは異なり，わかり易いように点Aを x 軸上にとり，点 B，Cも扱いやすい座標点にする工夫があってもよい。

その上で，与式の計算を冷静に進めていく。

ここでのポイントは α，β，γ が原点を中心とする同一円周上の点であり，$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とすれば，$\beta=\omega\alpha$，$\gamma=\omega\beta=\omega^2\alpha$ と関係づけられることである。

$\boxed{3}$ （60点）

座標空間に5点

O (0 , 0 , 0)，A (3 , 0 , 0)，B (0 , 3 , 0)，C (0 , 0 , 4)，P (0 , 0 , −2)

をとる．さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2点 Q (a , 0 , 0) と R (0 , b , 0) を考える．

(1)　点 P，Q，R を通る平面をHとする．平面 Hと線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ．

(2)　点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 (a , b) の範囲を座標平面上に図示せよ．

＜解答＞

(1)

平面Hの式は，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{-2}=1$　①

線分AC を含む直線の式は，$y=0$ の平面において，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=1$　②

①，②から$x=\dfrac{9a}{3+2a}$，$z=\dfrac{12-4a}{3+2a}$，したがって $\mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{3+2a},0,\dfrac{12-4a}{3+2a}\right)$　（答）

線分BC を含む直線の式は，$x=0$ の平面において，$\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$　③

①，③から$y=\dfrac{9b}{3+2b}$，$z=\dfrac{12-4b}{3+2b}$，したがって $\mathrm{S}\left(0,\dfrac{9b}{3+2b},\dfrac{12-4b}{3+2b}\right)$　（答）

(2)

題意から点 P，Q，R，S，T は同一平面 H 上にある。PQ は平面 H と xz 平面との交線だから，点T は直線 PQ 上にある。また PR は平面Hとyz 平面との交線だから，点 S は直線 PR 上にある。

4点Q，R，S，T が同一円周上にある $\Leftrightarrow$ PQ・PT = PR・PS

$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PT}=\sqrt{\left(\dfrac{9a}{3+2a}\right)^2+\left(\dfrac{12-4a}{3+2a}+2\right)^2}=\dfrac{9}{3+2a}\sqrt{a^2+4}$

$\mathrm{PR}=\sqrt{b^2+4}$，$\mathrm{PS}=\sqrt{\left(\dfrac{9b}{3+2b}\right)^2+\left(\dfrac{12-4b}{3+2b}+2\right)^2}=\dfrac{9}{3+2b}\sqrt{b^2+4}$

$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\dfrac{9}{3+2a}(a^2+4)$，$\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}=\dfrac{9}{3+2b}(b^2+4)$

$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}\Leftrightarrow\dfrac{9}{3+2a}(a^2+4)=\dfrac{9}{3+2b}(b^2+4)\Leftrightarrow 3(a^2-b^2)+2ab(a-b)-8(a-b)=0$

$\Leftrightarrow b=a$ または $b=\dfrac{8-3a}{3+2a}$　$(0<a,b<3)$

これを図示すると図１の通り（○ は含まない）。

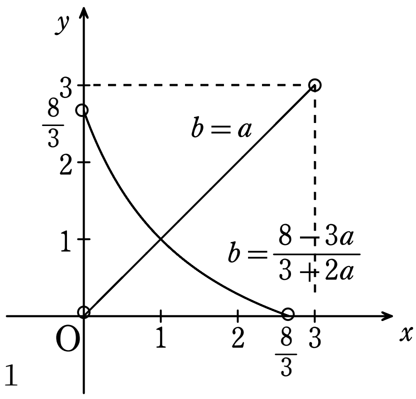

図１

＜解説＞

空間座標における直線と平面に関する問題。

(1)

空間座標に関する問題は数学 Bでベクトルとの関連で扱われる。まず平面 H，直線 AC，直線 BC を表す式を求める必要がある。図２のような図を大雑把に描いて考えよう。

$\overrightarrow{PQ}=(a,0,2)$，$\overrightarrow{PR}=(0,b,2)$，平面 H 上の点を F$(x,y,z)$として，$\overrightarrow{PF}=(x,y,z+2)$，

$\overrightarrow{PF}=j\overrightarrow{PQ}+k\overrightarrow{PR}$ と表される。ただしj，k は実数

したがって，$(x,y,z+2)=j(a,0,2)+k(0,b,2)$

ベクトルの成分を比較して，$x=ja$，$y=kb$，$z+2=2j+2k$，

j，kを消去して $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{-2}=1$　が平面 H の式である。

点A の座標は (3 , 0 , 0)，点Cの座標は (0 , 0 , 4)だから，線分ACを含む直線は$y=0$ の平面にある。

点B の座標は (0 , 3 , 0) だから，同様に，線分 BC を含む直線は $x=0$ の平面にある。

(2)

点 P，Q，R，S，T は同一平面 H 上にあることを確認しておこう。そして，点P，Q，T，および点P，R，T がそれぞれ一直線上にあることも確認しておこう。すると，図３のように平面 H 上の点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を求める問題となる。

数学 A の教科書によれば，方べきの定理の成立が 4 点 Q，R，S，T が同一円周上にあることの必要十分条件である。

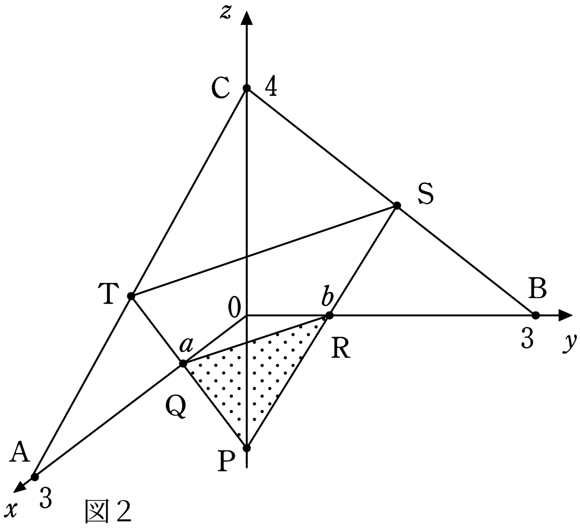

図２

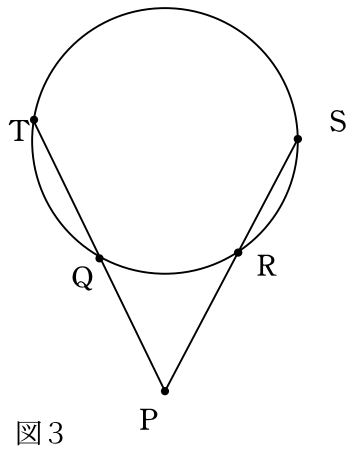

図３

$\boxed{4}$ (60点)

n を正の奇数とする．曲線 $y=\sin x$ $\left((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi\right)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を l とおき，l の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x, \sin x)$ を P とおく．また P から l に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を l の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

＜解答＞

(1)

直線 PQ は l に垂直だから，その傾きは1，したがって直線 PQ の式は $Y-\sin x=(X-x)$

$Y=0$ とおくと，$X=x-\sin x$，∴ 点Qの座標は $(x-\sin x, 0)$

直線 PQと l の交点を Q’とすれば，点Q’の座標は $\left(\dfrac{x-\sin x}{2}, \dfrac{\sin x-x}{2}\right)$

線分 PQ を l の周りに 1 回転させてできる図形は，PQ’を半径とする円からQQ’を半径とする円を除いた図形である。

$$\pi(\mathrm{PQ'})^2=\pi\left\{\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi(x+\sin x)^2}{2}$$

$$\pi(\mathrm{QQ'})^2=\pi\left\{\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi(x-\sin x)^2}{2}$$

したがって，線分 PQ を l の周りに 1 回転させてできる図形の面積は

$$S=\pi(\mathrm{PQ'})^2-\pi(\mathrm{QQ'})^2=\frac{\pi(x+\sin x)^2}{2}-\frac{\pi(x-\sin x)^2}{2}=2\pi x\sin x$$ （答）

(2)

原点Oから直線 l に沿った距離を t とする。

回転体 V_n の体積 = (線分 PQ を l の周りに 1 回転させてできる図形の面積をlの方向に積算）

点Q'の座標が $\left(\frac{x-\sin x}{2}, \frac{\sin x-x}{2}\right)$であることから,

原点Oと点Q'の距離は $t=\sqrt{2}\times\frac{x-\sin x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sin x)$

$x=(n-1)\pi$ のとき $t=t_l=\frac{\sqrt{2}}{2}(n-1)\pi$，$x=n\pi$ のとき $t=t_u=\frac{\sqrt{2}}{2}n\pi$

x は t の関数だから $x=x(t)$とおき，S はx の関数だから $S(x)=2\pi x\sin x=S(x(t))$ として

$$回転体V_n の体積 =\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}S(x(t_l+m\Delta t))\Delta t=2\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(n-1)\pi}^{\frac{\sqrt{2}}{2}n\pi}S(x(t))\,dt\ ,$$

ただし$\Delta t=\frac{t_u-t_l}{M}=\frac{\sqrt{2}}{2M}\pi$，$M$は正の整数

$\frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)$だから，$dt=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)dx$

$$\int S(x(t))dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int S(x)(1-\cos x)dx=\sqrt{2}\pi\int x\sin x(1-\cos x)dx$$

$$したがって，回転体V_n の体積 =2\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}(n-1)\pi}^{\frac{\sqrt{2}}{2}n\pi}S(x(t))\,dt=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx$$

$\int x\sin x(1-\cos x)dx=\int x\sin x\,dx-\int x\sin x\cos x\,dx$について，部分積分法を利用すると,

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x$$

$$\int x\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx=\frac{1}{8}(-2x\cos 2x+\sin 2x)$$

これらを利用して,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=-n\pi\cos n\pi+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi=\pi(2n-1) \quad ①$$

n は正の奇数だから，$n=2k-1$　($k=1, 2, ...$) とすれば,

$\cos n\pi=\cos(2k-1)\pi=-1$，$\cos(n-1)\pi=\cos(2k-2)\pi=1$

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{8}\Big[-2x\cos 2x+\sin 2x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}=\frac{1}{8}\{-2n\pi+2(n-1)\pi\}=-\frac{\pi}{4} \quad ②$$

$$回転体V_n の体積 =\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx=\sqrt{2}\pi\,(①-②)=\sqrt{2}\pi^2\left(2n-\frac{3}{4}\right)$$ （答）

＜解説＞

図形を回転させてできる立体の体積を求める問題。

(1)

問題文から図１のような図を描いて考察することは容易だろう。長さPQ’，QQ’を求めれば円環状の図形の面積計算は難しくない。

(2)

円環状の図形の面積と微小な厚みの積を加算して体積を求めることは容易に思考できる。

ここで安直に，回転体V_n の体積 $= 2\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\sin x\, dx$　としてはならない。

（円環の面積×微小な厚み）の積算として，体積を求めるのだが，厚みの方向が X 軸方向ではないことに注意する。円環は直線 l に垂直な面内にあるので，その厚みの方向は直線 l の方向となる。

ここで，X 軸と直線 l の関係から，安直に $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ としてはならない。

点Qの座標は $(x-\sin x, 0)$であり，点Pの座標が $(x, \sin x)$であるからだ。

不定積分　$\int x\sin x(1-\cos x)dx = \int x\sin x\,dx - \int x\sin x\cos x\,dx$　は以下のように求まる。

部分積分法　$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$を使って，

$$\int x\sin x\,dx = x\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int 2x\sin 2x\,dx,\ \ u=2x\text{とおくと，}\ dx = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{4}\int 2x\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int u\sin u\,du = \frac{1}{8}(-u\cos u + \sin u) = =\frac{1}{8}(-2x\cos 2x + \sin 2x)$$

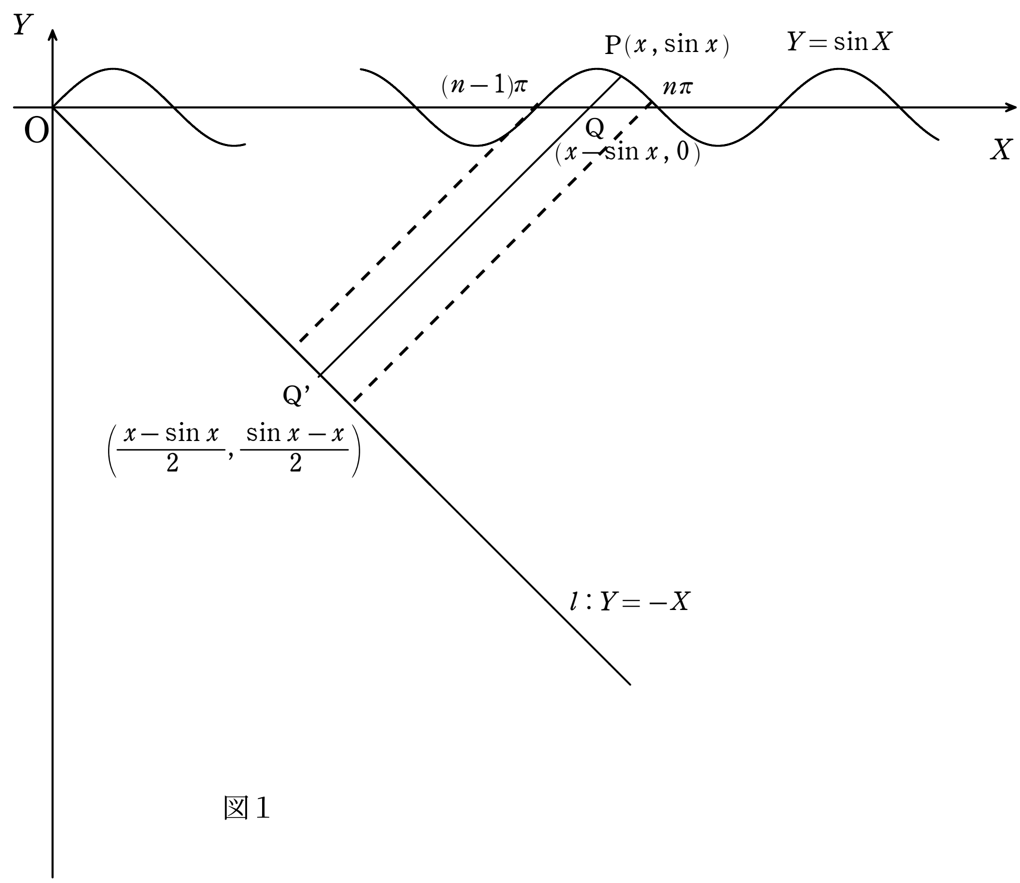

図１

$\boxed{5}$ (60点)

k を整数とし，$a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく.

(1)　a_{k+2} を a_k とk を用いて表せ.

(2)　k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ ka_k \}$の極限値 A を求めよ.

(3)　(2) の極限値に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$\{ k^m a_k - k^n A\}$

が 0ではない値に収束する整数 m，n　$(m > n \geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値B を求めよ.

(4)　(2) と(3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$\{ k^p a_k - k^q A - k^r B\}$

が 0 ではない値に収束する整数 p，q，r　$(p > q > r \geqq 1)$ を求めよ.

またそのときの極限値を求めよ.

＜解答＞

(1)

$$a_{k+2} = \int_0^1 x^{k+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 x^{k+1} \left\{\left(\frac{-2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$= \left[x^{k+1} \int \left\{\left(\frac{-2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx\right]_0^1 - (k+1)\int_0^1 x^k \left\{\left(\frac{-2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\} dx$$

$$= \left[x^{k+1} \left(\frac{-2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - (k+1)\left(\frac{-2}{\pi}\right)\int_0^1 x^k \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

$$= (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 x^k \left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$= (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)\left[x^k\left(\frac{2}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 kx^{k-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

$$= (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - k(k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1 - ka_k) \quad \text{(答)}$$

(2)

$0 \leqq x \leqq 1$において，$0 \leqq x^{k+1} \leqq 1$，$0 \leqq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leqq 1$だから，　$0 \leqq a_{k+2} \leqq 1$

(1)の結果から，$1 - ka_k = \frac{a_{k+2}}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$，$0 \leqq \frac{a_{k+2}}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$だから，

$$0 \leqq \lim_{k\to\infty}(1 - ka_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+2}}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$$

したがって，$\lim_{k\to\infty}(1 - ka_k) = 1 - \lim_{k\to\infty} ka_k = 0$，$\therefore A = \lim_{k\to\infty} ka_k = 1$　（答）

(3)

$$\{ k^m a_k - k^n A\} = \{ k^m a_k - k^n\} = k^n \{ k^{m-n} a_k - 1\} = k^n \{ k^{m-n-1} ka_k - 1\} \quad ①$$

$m - n - 1 \geqq 0$であるが，$m - n - 1 \geqq 1$とすれば，$k^n \{ k^{m-n-1} ka_k - 1\} \geqq k^n \{k^2 a_k - 1\}$

$\lim_{k\to\infty}(k^2 a_k - 1) = \lim_{k\to\infty} k\left(ka_k - \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} kA = \infty$ となるから，$m - n - 1 \geqq 1$ではない。

したがって，① が 0 ではない値に収束するためには，$m-n-1=0$，すなわち $m=n+1$

$\{k^m a_k - k^n A\} = \{k^{n+1} a_k - k^n\} = k^n\{ka_k - 1\}$

$$ka_k - 1 = -\frac{a_{k+2}}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{1}{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$0 \leqq x \leqq 1$において，$x \leqq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leqq 1$ だから，

$$\int_0^1 x^{k+1}\,x\,dx \leqq \int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \leqq \int_0^1 x^{k+1}\,dx$$

$\int_0^1 x^{k+1}\,x\,dx = \frac{1}{k+3}\left[x^{k+3}\right]_0^1 = \frac{1}{k+3}$，$\int_0^1 x^{k+1}\,dx = \frac{1}{k+2}\left[x^{k+2}\right]_0^1 = \frac{1}{k+2}$ だから，

$$-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq ka_k - 1 \leqq -\frac{1}{(k+1)(k+3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

したがって，$-\frac{k^n}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq k^n\{ka_k - 1\} \leqq -\frac{k^n}{(k+1)(k+3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$　②

$n=1$のとき ② の左辺，右辺は 0 に収束し，$n \geqq 3$ のとき ② の左辺，右辺は $k\to\infty$ で$-\infty$となる。

したがって，$k^n\{ka_k - 1\}$ が 0 ではない値に収束するためには，$n=2$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} \leqq \lim_{k\to\infty}k^2(ka_k - 1) \leqq \lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{k^2}{(k+1)(k+3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$

$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq \lim_{k\to\infty}k^2(ka_k - 1) \leqq -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$，したがって$B = \lim_{k\to\infty}k^2(ka_k - 1) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

以上によって，$m=3$，$n=2$，$B=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$　（答）

(4)

(1)から，$a_{k+2} = (k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1-ka_k)$，$a_k = \frac{1}{k}\left(1-\frac{\beta}{k+1}a_{k+2}\right)$　①，ただし$\beta = -B = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

したがって，$a_{k+2} = \frac{1}{k+2}\left(1-\frac{\beta}{k+3}a_{k+4}\right)$　②

② を① に代入して，

$$a_k = \frac{1}{k}\left\{1-\frac{\beta}{k+1}\frac{1}{k+2}\left(1-\frac{\beta}{k+3}a_{k+4}\right)\right\} = \frac{1}{k} - \frac{\beta}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\beta^2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}a_{k+4}$$　③

$a_{k+4} = \int_0^1 x^{k+3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ に対して，(3)で述べたと同じ理由により

$$\int_0^1 x^{k+3}\,x\,dx \leqq \int_0^1 x^{k+3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \leqq \int_0^1 x^{k+3}\,dx$$

$\int_0^1 x^{k+3}\,x\,dx = \frac{1}{k+5}\left[x^{k+5}\right]_0^1 = \frac{1}{k+5}$，$\int_0^1 x^{k+3}\,dx = \frac{1}{k+4}\left[x^{k+4}\right]_0^1 = \frac{1}{k+4}$

したがって，$\frac{1}{k+5} \leqq a_{k+4} \leqq \frac{1}{k+4}$，これを③ に適用すると，

$$\frac{1}{k} - \frac{\beta}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\beta^2}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+5)} \leqq a_k$$　④

$$a_k \leqq \frac{1}{k} - \frac{\beta}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\beta^2}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$　⑤

④ の左辺は

$k^{-1}-\beta k^{-1}(k^{-2}-3k^{-3}+7k^{-4}-15k^{-5}...)+\beta^2 k^{-1}(k^{-4}-11k^{-5}...)$

⑤ の右辺は

$k^{-1}-\beta k^{-1}(k^{-2}-3k^{-3}+7k^{-4}-15k^{-5}...)+\beta^2 k^{-1}(k^{-4}-10k^{-5}...)$

したがって，

$k^{p-1}-\beta k^{p-1}(k^{-2}-3k^{-3}+7k^{-4}-15k^{-5}...)+\beta^2 k^{p-1}(k^{-4}-11k^{-5}...)-k^q+k^r\beta$

$\leqq \{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}$　⑥

$\{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}$

$\leqq k^{p-1}-\beta k^{p-1}(k^{-2}-3k^{-3}+7k^{-4}-15k^{-5}...)+\beta^2 k^{p-1}(k^{-4}-10k^{-5}...)-k^q+k^r\beta$　⑦

⑥を整理すると，

$k^{p-1}-\beta k^{p-3}+3\beta k^{p-4}-k^q+\beta k^r-7\beta k^{p-5}+\beta^2 k^{p-5}+15\beta k^{p-6}-11\beta^2 k^{p-6}...\leqq\{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}$

$p-1=q$，$p-3=r$，$p-4=0$とすれば，

$3\beta-7\beta k^{-1}+\beta^2 k^{-1}+(15\beta-11\beta^2)k^{-2}...\leqq\{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}$　⑧

⑦を整理すると，

$\{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}$

$\leqq k^{p-1}-\beta k^{p-3}+3\beta k^{p-4}-k^q+\beta k^r-7\beta k^{p-5}+\beta^2 k^{p-5}+15\beta k^{p-6}-10\beta^2 k^{p-6}...$

同様に，$p-1=q$，$p-3=r$，$p-4=0$とすれば，

$\{k^p a_k-k^q+k^r\beta\}\leqq 3\beta-7\beta k^{-1}+\beta^2 k^{-1}+(15\beta-10\beta^2)k^{-2}...$　⑨

k を十分大きくすると，⑧ の左辺，⑨ の右辺は 3β に収束するから，

$$\lim_{k\to\infty}\{k^p a_k-k^q-k^r B\}=3\beta=-3B=\frac{3}{4}\pi^2$$

以上によって，$p=4$，$q=3$，$r=1$ のとき，極限値は $\frac{3}{4}\pi^2$（答）

＜解説＞

(1)

$a_{k+2}=\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$となったとき，部分積分法を適用する，と着想したい。

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\int\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}'dx=\frac{\pi}{2}\int\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx,$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\int\left\{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}'dx=-\frac{\pi}{2}\int\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

部分積分法 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$ において，

$f(x)=x^{k+1}$，$g'(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$とすれば，

$$\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{2}{\pi}\left[x^{k+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-(k+1)\left(\frac{-2}{\pi}\right)\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=(k+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

右辺にさらに部分積分を適用すれば，a_kの表式が現われることが予想される。

(2)

当然ながら，(1)の結果を利用したい。

(3)

$A=1$ であるから，$\{k^m a_k - k^n A\} = \{k^m a_k - k^n\}$ とした上で， 先ずは 0 でない値に収束するための m と n の条件を明らかにしたい。ここでは，ka_k の収束値が解っているので，① 式のように式を変形して，$(m-n-1)$ に対する条件を求めたい。

次のポイントは$0 \leqq x \leqq 1$で，$x \leqq \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \leqq 1$を利用して，$\displaystyle\int_0^1 x^{k+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ に対して

$\displaystyle\int_0^1 x^{k+1}\, x\, dx \leqq \int_0^1 x^{k+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \leqq \int_0^1 x^{k+1}\, dx$ のように，上限，下限の表式を得ることの着想である。

(4)

(3)でa_kの下限，上限の表式をk の（ーべき乗）の級数によって表されることがわかったので，これを利用することを考える。

$\dfrac{1}{k+1} \leqq a_k \leqq \dfrac{1}{k}$，$\dfrac{1}{k+3} \leqq a_{k+2} \leqq \dfrac{1}{k+2}$，$\dfrac{1}{k+5} \leqq a_{k+4} \leqq \dfrac{1}{k+4}$

$\dfrac{1}{k} = k^{-1}$，$\dfrac{1}{k+1} = k^{-1} - k^{-2} + k^{-3} - k^{-4} \ldots$，$\dfrac{1}{k+2} = k^{-1} - 2k^{-2} + 2^2 k^{-3} - 2^3 k^{-4} \ldots$，

$\dfrac{1}{k+3} = k^{-1} - 3k^{-2} + 3^2 k^{-3} - 3^3 k^{-4} \ldots$，$\dfrac{1}{k+4} = k^{-1} - 4k^{-2} + 4^2 k^{-3} - 4^3 k^{-4} \ldots$，

$a_k = \dfrac{1}{k}\left(1 - \dfrac{\beta}{k+1} a_{k+2}\right)$とすれば，　$\dfrac{1}{k} - \dfrac{\beta}{k(k+1)(k+2)} \leqq a_k \leqq \dfrac{1}{k} - \dfrac{\beta}{k(k+1)(k+3)}$　⑩

のように，上限，下限をk の（ーべき乗）の級数によって表すことができる。

ところが,

$$\frac{1}{k} - \frac{\beta}{k(k+1)(k+2)} = k^{-1} - \beta k^{-1}(k^{-2} - 3k^{-3} + 7k^{-4} \ldots) = k^{-1} - \beta k^{-3} + 3\beta k^{-4} - 7\beta k^{-5} \ldots$$

$$\frac{1}{k} - \frac{\beta}{k(k+1)(k+3)} = k^{-1} - \beta k^{-1}(k^{-2} - 4k^{-3} + 13k^{-4} \ldots) = k^{-1} - \beta k^{-3} + 4\beta k^{-4} - 13\beta k^{-5} \ldots$$

を利用すると,

$k^p(k^{-1} - \beta k^{-3} + 3\beta k^{-4} - 7\beta k^{-5} \ldots) - k^q + k^r\beta \leqq \left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\}$　⑪

$\left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\} \leqq k^p(k^{-1} - \beta k^{-3} + 4\beta k^{-4} - 13\beta k^{-5} \ldots) - k^q + k^r\beta$　⑫

⑪を整理すると，$k^{p-1} - \beta k^{p-3} + 3\beta k^{p-4} - k^q + k^r\beta - 7\beta k^{p-5} \ldots \leqq \left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\}$

$p-1=q$，$p-3=r$，$p-4=0$とすれば，$3\beta - 7\beta k^{-1} \ldots \leqq \left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\}$　⑬

⑫を整理して，$\left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\} \leqq k^{p-1} - \beta k^{p-3} + 4\beta k^{p-4} - k^q + k^r\beta - 13\beta k^{p-5} \ldots$

同様に，$p-1=q$，$p-3=r$，$p-4=0$とすれば，$\left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\} \leqq 4\beta - 13\beta k^{-1} \ldots$　⑭

⑬，⑭ より，$3\beta - 7\beta k^{-5} \ldots \leqq \left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\} \leqq 4\beta - 13\beta k^{-5} \ldots$

$k \to \infty$ により $3\beta \leqq \left\{k^p a_k - k^q + k^r \beta\right\} \leqq 4\beta$ となって，収束値を特定することができない。

これは⑩の上限，下限の範囲が広すぎることが原因である。

そこで，解答のように,

$$a_k=\frac{1}{k}\left\{1-\frac{\beta}{k+1}\frac{1}{k+2}\left(1-\frac{\beta}{k+3}a_{k+4}\right)\right\}=\frac{1}{k}-\frac{\beta}{k(k+1)(k+2)}+\frac{\beta^2}{k(k+1)(k+2)(k+3)}a_{k+4} \quad ③$$

として，$\frac{1}{k+5}\leqq a_{k+4}\leqq\frac{1}{k+4}$ の表式まで利用する必要がある。

＜総評＞

例年のように，受験生に高い数学的能力を期待する東工大のこだわりが感じられる骨の折れる問題が揃っている。

$\boxed{1}$

数学Aで発展として扱われている整数の合同を活用する整数問題。一見難しそうだが，具体的な整数を定めて考察すると，解答方針が見えてくる。少々の着想が必要であり，難易度はB＋。

$\boxed{2}$

複素数平面における図形に関する問題。解答方針に着眼，着想が必要であり，複素数の計算にも習熟している必要がある。難易度はA－。

$\boxed{3}$

空間図形に関する問題。昨年のこの分野の問題は超難問であったと記憶する。今年は，標準レベルの問題である。難易度はB。

$\boxed{4}$

平面図形の回転による立体図形の求積の問題。題意の把握や解答方針の構想は難しくはないだろう。求積にあたって，いくつかの気づきが必要になる。求積計算では置換積分法や部分積分法を使うことが必要になる。難易度はA－。

$\boxed{5}$

積分によって表現される数列の極限に関する問題。積分の実行では$\sin\theta$，$\cos\theta$の微分，積分関係を部分積分法において活用する。(3)，(4)では$k\to\infty$において級数が0以外の値に収束するための解答方針の着想が必要である。難易度はA。

220926