

入学試験問題

数学(理科)



(配点 120 点)

令和 2 年 2 月 25 日 14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されますが、青色刷りの第 1 解答用紙には、第 1 問～第 3 問について、茶色刷りの第 2 解答用紙には、第 4 問～第 6 問について解答しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面 2 箇所、裏面 1 箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。



明報增刊 (明報) 華英

中華民國二十九年

本報自創刊以來，承蒙各界人士愛護，不勝感荷。

本報宗旨

本報自創刊以來，承蒙各界人士愛護，不勝感荷。本報宗旨，在於報導事實，傳播知識，服務社會。本報每日出版，內容豐富，報導詳實。本報設有新聞、社論、專載、廣告等欄目。本報歡迎各界人士踴躍投稿，共同為社會進步而努力。

本報自創刊以來，承蒙各界人士愛護，不勝感荷。本報宗旨，在於報導事實，傳播知識，服務社會。本報每日出版，內容豐富，報導詳實。本報設有新聞、社論、專載、廣告等欄目。本報歡迎各界人士踴躍投稿，共同為社會進步而努力。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

$$0 < a + b + c < 1$$

$$0 < a + b + c < 1$$

$$0 < a + b + c < 1$$

ある正の数 a, b, c が $a + b + c = 1$ を満たすとき、 a, b, c の値を求めよ。

(1) a, b, c のうち最も大きいものを a とし、 $a > b > c$ とする。

(2) a, b, c のうち最も小さいものを a とし、 $a < b < c$ とする。

(3) a, b, c のうち最も大きいものを a とし、 $a > b > c$ とする。

第 1 問

a, b, c, p を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$bx^2 + cx + a > 0$$

$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と、 $x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

- (1) a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。
- (2) a, b, c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。
- (3) $p = 0$ であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

平面 P 上の点 A, B, C をとり、 P 上の点 X をとり、 $\triangle ABX$ と $\triangle ACX$ を考える。このとき、 $\triangle ABC$ の面積は $\triangle ABX$ と $\triangle ACX$ の面積の和である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\triangle ABX$ と $\triangle ACX$ の面積の差である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積は $\triangle ABX$ と $\triangle ACX$ の面積の和である。

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABX} + S_{\triangle ACX}$$

また、 $\triangle ABC$ の面積は $\triangle ABX$ と $\triangle ACX$ の面積の差である。

第 2 問

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

計算用紙

(切り離さないで用いよ。)

$$f(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$g(t) = (1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。曲面 S は (t, u) の範囲 $0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 1$ をなす。

(1) $-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。

(2) 曲面 S の面積を A とする。 $-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値 M と最小値 m を用いて A を求めよ。

解答の途中を求めよ。

(3) $0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。

解答の途中を求めよ。

解答の途中を求めよ。

第 3 問

$-1 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $P(x(t), y(t))$ を考える。

- (1) $-1 < t \leq 1$ における t の関数 $\frac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。
- (2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする。 $-1 \leq t \leq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ、最大値を求めよ。
- (3) t が $-1 \leq t \leq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし、 C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき、 D が通過する領域の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。) 式番を $n \geq 1 \geq 1$ とす。

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

よのこし状のアノマニヤの種類の数を a_n とする。よのこし状のアノマニヤの種類の数を a_n とする。よのこし状のアノマニヤの種類の数を a_n とする。

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 9, a_{10} = 10$$

(1) n 以上の数 n に対して a_n を求めよ。

(2) n 以上の数 n に対して a_n の値を求めよ。

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (n+1) \cdot n$$

よのこし状のアノマニヤの種類の数を a_n とする。よのこし状のアノマニヤの種類の数を a_n とする。

$$a_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \quad (2)$$

第 4 問

n, k を, $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。 n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。 k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n C_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し, $a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し, x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \dots + a_{n,n}x^n$$

を考える。 $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。

計算用紙

面積を求めよ。(切り離さないで用いよ。)

(1) 点 A(0, 1) と点 B(1, 0) を結ぶ線分 AB の長さ AB を求めよ。

(2) 点 P を線分 AB の中点とし、点 Q を線分 AB の垂直二等分線の交点とする。点 Q の座標を求めよ。

第 5 問

座標空間において、 xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし、点 $(0, 0, 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また、点 $A(1, 0, 2)$ を考える。

- (1) 点 P が S の底面を動くとき、線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z = 1$ による S の切り口および、平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。
- (2) 点 P が S を動くとき、線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

計算用紙

(切り離さないで用いよ。)

以下各二行間の1列

左端の0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

$$0 = (0+0) \times 10 - 0 \times 10$$

この式は、 $0 > 1$ となる。この式は、 $0 \geq 1$ の範囲にのみ成り立つ。この範囲は、 $0 > 1$ の範囲にのみ成り立つ。

右端の0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

(2) 左端の0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

この式は、 $1 < 1$ となる。この式は、 $1 > 1$ の範囲にのみ成り立つ。この範囲は、 $1 < 1$ の範囲にのみ成り立つ。

$$2 = 1 + 1$$

この式は、 $2 > 2$ となる。この式は、 $2 \geq 2$ の範囲にのみ成り立つ。この範囲は、 $2 > 2$ の範囲にのみ成り立つ。

この式は、 $1 < 1$ となる。この式は、 $1 > 1$ の範囲にのみ成り立つ。この範囲は、 $1 < 1$ の範囲にのみ成り立つ。

表中: C 下の0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

右端の0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

第 6 問

以下の問いに答えよ。

- (1) A, α を実数とする。 θ の方程式

$$A \sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$$

を考える。 $A > 1$ のとき、この方程式は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

- (2) 座標平面上の楕円

$$C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える。また、 $0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して、不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。 D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r ($0 < r < 1$) が存在することを示せ。また、そのような r の最大値を求めよ。

条件： C 上の点 Q で、 Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

