2020(R2) 年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

a，b，c，p を実数とする。不等式

$$ax^2+bx+c>0$$
$$bx^2+cx+a>0$$
$$cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1) a，b，c はすべて 0 以上であることを示せ。

(2) a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3) $p=0$ であることを示せ。

＜解答＞

(1)

仮に$a<0$とすれば，$x>p$ を満たす実数 x が十分大きくなると，$ax^2+bx+c<0$となり，与えられた不等式が成立しない。b，cでも同様である。したがって，a，b，c はすべて 0 以上である。

すなわち，a，b，c はすべて 0 以上でなければ，3 つの不等式をすべて満たす実数xの集合と$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致することはない。

(2)

仮に$a>0$，$b>0$，$c>0$とすれば，十分小さな負の実数 $x<q$ において，3つの不等式が成立する。実数の集合 $x<q$ は$x>p$ を満たす集合とは一致しない。したがって，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ではありえない。少なくとも1個は0でなければならない。

(3)

仮に$a=0$とすれば，

$$ax^2+bx+c=bx+c>0,\ \therefore\ x>-\frac{c}{b}$$

$$bx^2+cx+a=bx^2+cx=x(bx+c)>0,\ \therefore\ x>0,\ x<-\frac{c}{b}$$

$cx^2+ax+b=cx^2+b>0$，すべての実数xで成立

したがって，3つの不等式を成立させる実数xの集合は $x>0$ となる。

$b=0$，$c=0$のときも同様である。

$x>0$ となる実数の集合と$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致するのだから，$p=0$である。

＜解説＞

読み慣れない数学的な表現で戸惑うかも知れない。しかし，内実は当たり前問題に近いのだが，それを数学的にきちんと説明することが必要である。$|x|$が十分大きくなると，2次関数は，2次の項の係数が正の場合には$+\infty$に，負の場合には$-\infty$に近づくことに注意する。

第 2 問

平面上の点P，Q，Rが同一直線上にないとき，それらを3 頂点とする三角形の面積を△PQRで表す。また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，△PQR＝0とする。

A，B，C を平面上の 3 点とし，△ABC ＝ 1 とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，Xの動きうる範囲の面積を求めよ。

<解答>

図１のように，三角形 ABC の各辺を両方向に延長して，頂点からの距離が辺長と同じになる点を A_B，B_A，B_C，C_B，C_A，A_C とする。また辺長の$\frac{1}{2}$になる点をA_B'，B_A'，B_C'，C_B'，C_A'，A_C' とする。

X が $B_A'C_A'$ 上にあるとき，AXとBC の交点をDとすれば，△ABX＝△ABD＋△BDX

$\triangle BCX=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}$

△CAX＝△CAD＋△CDX

したがって，

$$\begin{aligned}\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX &= (\triangle ABD + \triangle BDX)+\frac{1}{2}+(\triangle CAD+\triangle CDX)\\ &=(\triangle ABD+\triangle CAD) + (\triangle BDX+\triangle CDX) +\frac{1}{2}\\ &=\triangle ABC + \triangle BCX +\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} +\frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

同様の考え方によって，X が六角形$C_A'C_B'A_B'A_C'B_C'B_A'$の辺上を動くとき，

△ABX ＋ △BCX ＋ △CAX ＝ 2

X が B_AC_A 上にあるとき，△BCX＝△ABCであり，AXとBC の交点をD とすれば，

$$\begin{aligned}\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX &= (\triangle ABD + \triangle BDX)+ \triangle ABC +(\triangle CAD+\triangle CDX)\\ &= (\triangle ABD+\triangle CAD) + (\triangle BDX+\triangle CDX) + 1\\ &= \triangle ABC + \triangle BCX + 1=1 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

同様の考え方によって，Xが六角形$C_AC_BA_BA_CB_CB_A$ の辺上を動くとき，

△ABX ＋ △BCX ＋ △CAX ＝ 3

X が六角形 $C_A'C_B'A_B'A_C'B_C'B_A'$ と六角形 $C_AC_BA_BA_CB_CB_A$ の間にあるとき，

$2 \leqq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leqq 3$となる。

点 X が三角形 ABC 内にあるとき，明らかに △ABX ＋ △BCX ＋ △CAX ＝ △ABC ＝ 1

点 X が三角形ABCと六角形 $C_A'C_B'A_B'A_C'B_C'B_A'$ の間にあるとき，

上の考察から明らかに，△ABX ＋ △BCX ＋ △CAX ＜ 2 △ABC

点 X が六角形 $C_AC_BA_BA_CB_CB_A$ の外側にあるとき，上の考察から明らかに，

△ABX ＋ △BCX ＋ △CAX＞3 △ABC

台形$B_A'B_AC_AC_A'$ の面積 ＝ $\triangle AB_AC_A - \triangle AB_A'C_A' = 4\triangle ABC - \left(\frac{3}{2}\right)^2\triangle ABC=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$

台形$C_A'C_AC_BC_B'$ の面積 $= \triangle CC_AC_B - \triangle CC_A'C_B' = \triangle ABC - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \triangle ABC = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

残る４つの台形についても同様の考え方によれば，明らかにその面積は $\dfrac{7}{4}$ と $\dfrac{3}{4}$

したがって，$2 \leqq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leqq 3$となる X が動きえる範囲の面積は

$\left(\dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{4}\right) \times 3 = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2}$　（答）

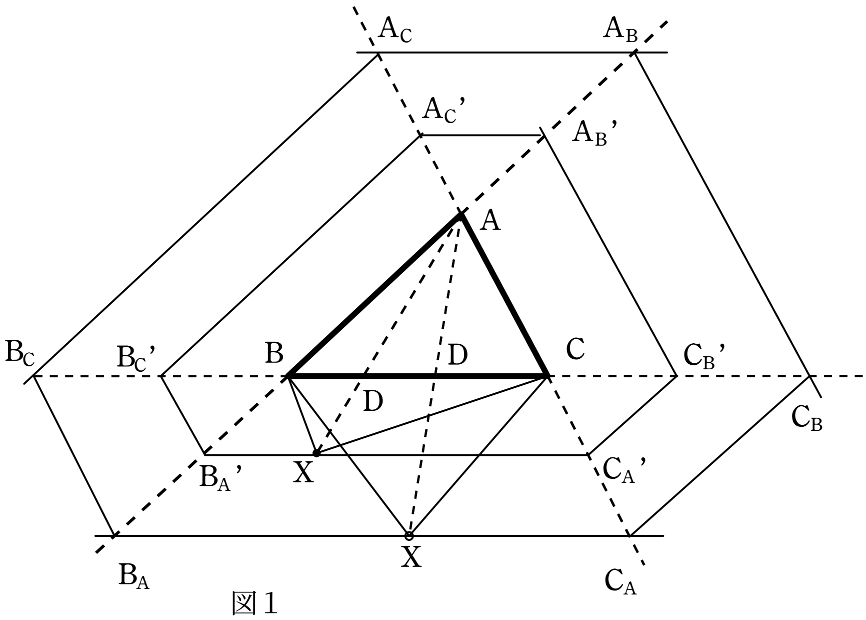

図１

<解説>

Xが三角形ABC内にあれば，$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC$だから，題意を満たさない。したがって，Xは三角形 ABC 外でなければならない。Xが三角形 ABC の外であれば，当然に

$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX > \triangle ABC$

それでは $\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = 2\triangle ABC$となるには，点Xはどこにあれば良いか。

$\triangle BCX = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$となるような 三角形ABCの外の$X$であれば良い，ということに気づくであろう。

次に，$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = 3\triangle ABC$となるには，点Xはどこにあれば良いか。

$\triangle BCX = \triangle ABC$となるような 三角形ABCの外の$X$であれば良い，ということに気づくであろう。

このようにして，図１のような二つの六角形に囲まれた領域を見出すことができよう。

第　３　問

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$

$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点$P(x(t),\ y(t))$を考える。

(1) $-1<t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2) 原点とPの距離を $f(t)$とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸とで囲まれた領域をD とする。
原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 3\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

$-1<t \leqq 1$において，$\dfrac{1}{1+t}$は単調に減少するので，$\dfrac{y(t)}{x(t)}$は単調に減少する。

(2)

$$f(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{(1+t)^3+9(1+t)^2(1-t)}=(1+t)\sqrt{1+t+9(1-t)}=(1+t)\sqrt{10-8t}$$

$$f'(t)=\sqrt{10-8t}-4(10-8t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)=(10-8t)^{-\frac{1}{2}}\{10-8t-4(1+t)\}=6(10-8t)^{-\frac{1}{2}}(1-2t)$$

したがって，$f(t)$は図１のように増減する。最大値は$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　　（答）

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$	$3\sqrt{2}$	$+$	0	$-$	$-3\sqrt{2}$
$f(t)$	0	↗		↘	$2\sqrt{2}$

図１

(3)

$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$，$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$から，$y=3x^{\frac{2}{3}}\sqrt{2-x^{\frac{2}{3}}}$　　①

$$y'=\frac{dy}{dx}=3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}(2-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}=2x^{-\frac{1}{3}}(2-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}\left(2-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$y=3x^{\frac{2}{3}}\sqrt{2-x^{\frac{2}{3}}}$ は図２のような変化をする。

x	0		$\frac{8\sqrt{3}}{9}$		$2\sqrt{2}$
y'	∞	$+$		$-$	$-\infty$
y	0	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	↘	0

図２

$x(-1)=0$，$y(-1)=0$；　$x(0)=1$，$y(0)=3$；　$x(1)=2\sqrt{2}$，$y(1)=0$,

$x\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$，$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$，$\therefore \left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)_{t=\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

以上に加え(1)，(2)の結果から，①で示す点Pの軌跡 C は図３に示すようなものになる。

図３から，C と x 軸とで囲まれた領域 D を $90°$ 時計回りに回転したとき D が通過する領域は，D の面積 S_1 と $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ を半径とする円の面積の $\frac{1}{4}$（S_2 とする）との和に等しいことがわかる。

$$S_1=\int_0^{2\sqrt{2}} y(x)dx=\int_{-1}^{1} y(t)\frac{dx}{dt}dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\int_{-1}^{1}(1+t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt+\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt$$

第１項は半径１の円の上半分の面積だから $\frac{\pi}{2}$，第２項は被積分関数が奇関数だから 0

したがって，$S_1=\frac{9}{4}\pi$

$$S_2=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{27}{8}\pi$$

$$S=S_1+S_2=\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{8}\pi=\frac{45}{8}\pi \qquad （答）$$

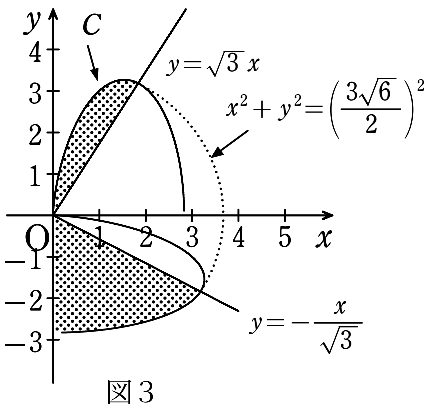

図３

＜解説＞

(1)

定性的に説明したが，下記のように $\frac{y(t)}{x(t)}$ の導関数も負であることを容易に示すことができる。

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}}=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}},\quad g(t)=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$$

$$g'(t)=-\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}<0 \qquad (-1<t<1)$$

(3)

点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の軌跡，すなわち曲線 C がどのようなものか，(1)，(2)の結果と図２から図３のような図を大雑把に描いてみる。すなわち，$t=-1$ のとき原点から出発して，傾きが ∞ から $-\infty$ まで単調に減少する。したがって，傾き 0 の点があり，そこで極大値（最大値）をとる。

原点からの距離が最大になる点があり，原点と結ぶ直線の傾きは $\sqrt{3}$ である。曲線 C と x 軸が囲む領域 D を時計回りに $90°$ 回転すると，曲線 C は直線 $y=\sqrt{3}\,x$ との交点の軌跡（半径 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ の円周）の外へ出ることはないから，求める面積は $S=S_1+S_2$ であることが容易にわかる。

積分 $S_1=\int_0^{2\sqrt{2}} y(x)dx$ において，$\int_{-1}^{1} y(t)\frac{dx}{dt}dt$ なる置換積分を用いることが必要である。

第　４　問

n，k を，$1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_nC_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3}=2^0\cdot 2^1\cdot 2^2+2^0\cdot 2^1\cdot 2^3+2^0\cdot 2^2\cdot 2^3+2^1\cdot 2^2\cdot 2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ。

＜解答＞

(1)

$$a_{n,2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)^2-\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{4^n-1}{4-1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(2^n-1)^2-\frac{4^n-1}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2^n-1)^2-\frac{4^n-1}{3}\right\}=\frac{1}{2}\left\{4^n-2\cdot 2^n+1-\frac{4^n-1}{3}\right\}=\frac{4^n}{3}-2^n+\frac{2}{3}\quad（答）$$

(2)

$f_n(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$　とおくことができる。

$f_{n+1}(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)$

したがって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx$　（答）

$f_n(2x)=(1+2^0\cdot 2x)(1+2^1\cdot 2x)(1+2^2\cdot 2x)\cdots(1+2^{n-1}\cdot 2x)$

$\quad=(1+2^1x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)$

したがって，$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x$　（答）

(3)

$f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k$　①，ただし $a_{n,0}=1$

$f_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}a_{n+1,k}x^k$　②，ただし $a_{n+1,0}=1$

(2)と①から，$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k+2^n\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\left(a_{n,k}+2^na_{n,k-1}\right)x^k$　③

②と③の x^{k+1} の係数を比較して，$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$　④

同様に，$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(2x)^k+x\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(2x)^k=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}2^kx^k+\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}2^kx^{k+1}$

$\quad=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^ka_{n,k}+2^{k-1}a_{n,k-1})x^k$　⑤

②と⑤の x^{k+1} の係数を比較して，$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}$　⑥

④，⑥から $a_{n,k+1}$ を 消去して，$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$

$\therefore \dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\dfrac{2^{n+k+1}-2^k}{2^{k+1}-1}$　（答）

＜解説＞

(1)

n 個の整数 $2^0,\ 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ から異なる 2 個の積をとることにより得られる整数の和$a_{n,2}$ の表式を含む表式として $(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})$ に気づけば，本解答を容易に記述できる。

$a_{n,2}$ の表式に応じて，いろいろな解法が考えられるだろう。

$$a_{n,2}=2^0(2^1+2^2+\ldots+2^{n-1})+2^1(2^2+2^3+\ldots+2^{n-1})+\ldots+2^j(2^{j+1}+2^{j+2}+\ldots+2^{n-1})$$
$$+\ldots+2^{n-2}2^{n-1}=\sum_{j=0}^{n-2}2^j(2^{j+1}+2^{j+2}+\ldots+2^{n-1})$$

ここで，$(2^{j+1}+2^{j+2}+\ldots+2^{n-1})$は初項$2^{j+1}$，公比2，項数$(n-j-1)$の等比数列の和

$$2^{j+1}+2^{j+2}+\ldots+2^{n-1}=\frac{2^{j+1}(2^{n-j-1}-1)}{2-1}=2^{j+1}(2^{n-j-1}-1)=2^n-2^{j+1}$$

$$a_{n,2}=\sum_{j=0}^{n-2}2^j(2^n-2^{j+1})=2^n\sum_{j=0}^{n-2}2^j-\sum_{j=0}^{n-2}2^{2j+1}=2^n(2^{n-1}-1)-\frac{2}{3}(2^{2n-2}-1)=\frac{4^n}{3}-2^n+\frac{2}{3}$$

(2)

$f_n(x)=(1+2^0x)(1+2^1x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$を着想することがポイントである。

「k 個の整数の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_nC_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$」という表現と$(1+p)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(1)^{n-k}p^k$という表式から，このような着想ができると良い。

(3)

(2)の結果を利用して考察する。

第　5　問

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 (0, 0, 2) を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点A (1, 0, 2) を考える。

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

＜解答＞

(1)

S は平面$z=0$の原点を中心とする半径 1の円を底面とし，(0, 0, 2) を頂点とする円錐だから，平面 $z=1$による切り口は，原点 (0, 0)を中心とする半径 0.5の円である。

T は平面 $z=0$の原点を中心とする半径 1の円を底面とし，(1, 0, 2) を頂点とする円錐だから，

平面 $z=1$による切り口は，点 $(0.5, 0)$ を中心とする半径 0.5の円である。
したがって，図１のようになる。

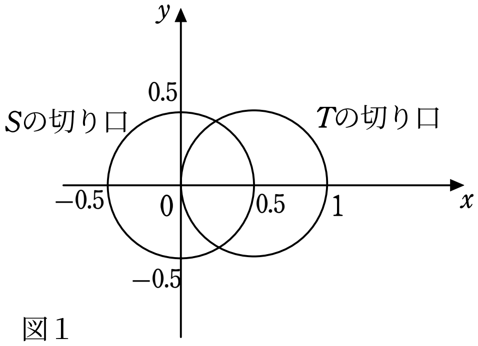

図１

(2)

点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分をT_Tとする。T_T を$z=h$の平面で切った断面Hの面積を$B(h)$とすれば，求める体積は $V=\int_0^2 B(h)dh$。

断面Hは $z=t\leqq h$ におけるS の断面となる円 $C(t)$: $x^2+y^2=\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2$ 内の点 P と点 A を結ぶ直線が $z=h$ の平面を通る点の領域である。

円 $C(t)$ 内の点 P と点 A $(1, 0, 2)$ を結ぶ直線が$z=h$ の平面につくる図形は,
図２から，半径が$\dfrac{2-h}{2-t}\left(1-\dfrac{t}{2}\right)$，中心が$\left(\dfrac{h-t}{2-t}, 0\right)$の円$D(t, h)$となる。

円$D(t, h)$は $\left(x-\dfrac{h-t}{2-t}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{2-h}{2-t}\right)^2\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2=\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^2$となり，半径は t に依存しない。

断面Hは円 $D(t, h)$において，$t=0$から$t=h$まで変化してできる図形，すなわち図３に示すように直径 $2\left(1-\dfrac{h}{2}\right)$の円が，中心$\left(\dfrac{h}{2}, 0\right)$から$(0 , 0)$まで移動した図形となる。

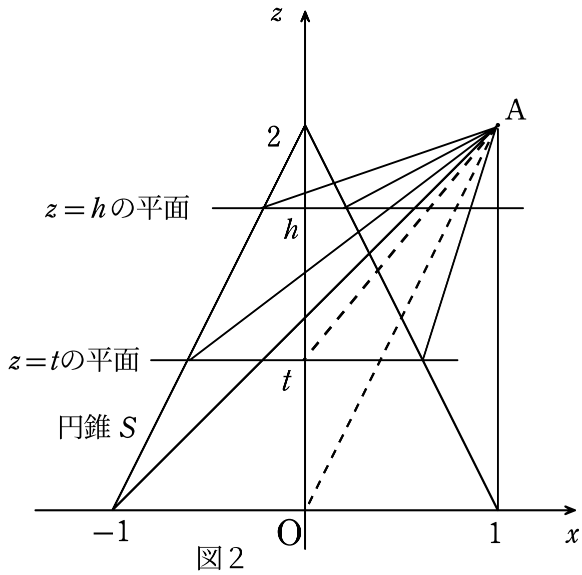

図２

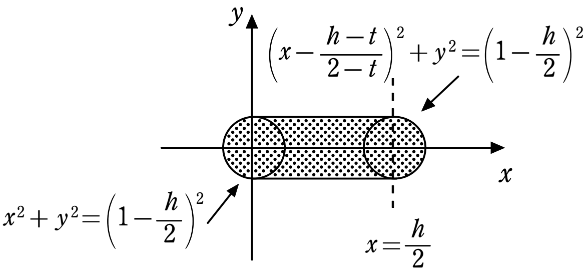

図３

したがって，$B(h)=\pi\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^2+\dfrac{h}{2}\times 2\left(1-\dfrac{h}{2}\right)=\pi\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^2+h\left(1-\dfrac{h}{2}\right)$

$$V=\int_o^2 B(h)dh=\pi\int_o^2\left(1-\frac{h}{2}\right)^2dh+\int_o^2 h\left(1-\frac{h}{2}\right)dh=\pi\left[h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{12}\right]_0^2+\left[\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}\right]_0^2$$

$=\dfrac{2}{3}(\pi+1)$　（答）

＜解説＞

(1)

Sは軸が底面に垂直な円錐，Tは底面に対して軸が傾いている円錐である。いずれも，底面が円であり，円に平行な面による断面は円を形成する。

(2)

点Pが円錐S内を動くとき，線分APが通過する部分とはどのようなものか，と脳内で描こうとすると，なかなかややこしい。ここは，(1)の設問をヒントにこの部分T_Tを$z=$一定の面で切断したときの断面を考え，その面積を求めて，これをz方向に積算すれば良い，と考えよう。

そこで，図２のような図を描いて考える。三次元的な図を描くことができれば良いのだが，筆者は苦手である。すると，$z=h$の平面におけるT_Tの断面は，円錐Sの平面$z=t$による断面の円の投影となることがわかる。図２から，tが0からhまで変化しても円$C(t)$が$z=h$の平面に投影される円の大きさは変化しないことに気づくと良い。

第　6　問

以下の問いに答えよ。

(1) A，αを実数とする。θの方程式

$$A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$$

を考える。$A>1$のとき，この方程式は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくも4個の解を持つことを示せ。

(2) 座標平面上の楕円

$$C:\quad \frac{x^2}{2}+y^2=1$$

を考える。また，$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 $r\,(0 < r < 1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点Qで，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも4個ある。

<解答>

(1)

$f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha)$ とおく。

$f(0) = -\sin\alpha$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) > 0$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + \alpha\right) < 0$

$f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + \alpha\right) > 0$，$f\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + \alpha\right) < 0$，$f(2\pi) = -\sin\alpha$

$f(\theta)$ は連続関数だから，$\sin\alpha \geqq 0$ のときは図１から解るように，中間値の定理により，

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{7\pi}{4}$ において少なくも1回は x 軸と交わる。

$\sin\alpha < 0$ のときは図２から解るように，中間値の定理により

$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{7\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$ において少なくも1回は x 軸と交わる。

したがって，$f(\theta)$ は x 軸と少なくも4点で交わる。

以上により，θ の方程式 $A\sin 2\theta - \sin(\theta + \alpha) = 0$ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくも4個の解を持つ。

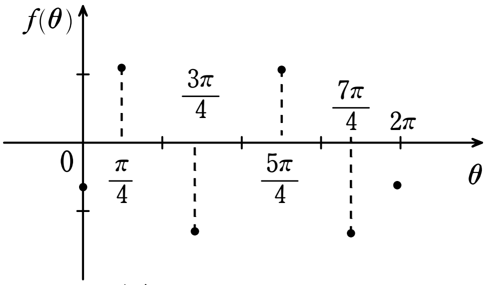

図１

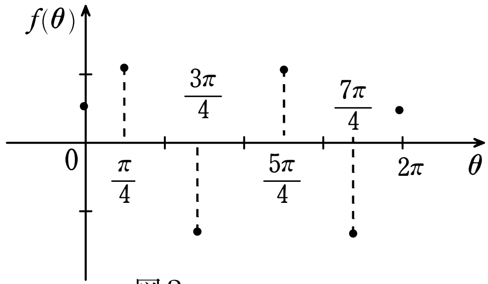

図２

(2)

C 上の点 をQ (x, y) とする。$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ①

$x = \sqrt{2}\cos\theta$，$y = \sin\theta$ とすれば，①を満たすから，Q $(x, y) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ とおける。

ただし θ は反時計回りにみた x 軸と直線OQとのなす角で，$0 \leqq \theta < 2\pi$ 。

D 内の点P (x_P, y_P) とすれば，$2{x_P}^2 + {y_P}^2 < r^2$ ②

$x_P = \dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\beta$，$y_P = l\sin\beta$ とおくと，$0 < l < r$ であれば②を満たすから

P $(x_P, y_P) = \left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\beta,\ l\sin\beta\right)$ とおける。ただし l は楕円 $2{x_P}^2 + {y_P}^2 = l^2$ の長半径で，β は反時計回りにみた x 軸と直線 OP とのなす角で，$0 \leqq \beta < 2\pi$。

①から$xdx+2ydy=0$，したがって点Qにおける接線の傾きは$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{2y}==\dfrac{-\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}$

接線と直交する直線の傾きは$\dfrac{2y}{x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{\cos\theta}$

ここで，$\sin\theta=0$，$\cos\theta=0$となる$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$ は除く。

直線 PQ の傾きは，$\dfrac{y_P-y}{x_P-x}=\dfrac{2y}{x}$，$\therefore x(y_P-y)=2y(x_P-x)$　③

$\theta=0$，π のとき，$\beta=0$ またはπとすれば $y=y_P=0$で③は成立

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ とすれば $x=x_P=0$で③は成立

③を極座標表示すれば，

$\cos\theta(l\sin\beta-\sin\theta)=\sin\theta(l\cos\beta-2\cos\theta)$，$\therefore \dfrac{1}{2l}\sin2\theta-\sin(\theta-\beta)=0$　④

(1)において$A=\dfrac{1}{2l}>1$，実数α を $-\beta$ とすれば，④を満たす少なくも4個のθが存在する。

すなわち，D 内の点 $\mathrm{P}(x_P,\ y_P)=\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\beta,\ l\sin\beta\right)$ に対して，PQ がC の接線と直交する C 上の

点 $\mathrm{Q}(x,\ y)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ が少なくも4 個存在する。

以上によって，条件を満たす実数 $l<r$ が存在するのだから，

条件を満たすような実数 $r(0<r<1)$ が存在する。

(1)において，$0<A\leqq1$のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$ のいずれかが0となる可能性が

あり，そのとき方程式$A\sin2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$は3個の解しかもたない。

したがって4個の解をもつためには，$\dfrac{1}{2l}=A>1$，$\therefore l<\dfrac{1}{2}$　⑤

$l<r$ なる l に対して⑤が成立するためには，$r\leqq\dfrac{1}{2}$，すなわち r の最大値は $\dfrac{1}{2}$

＜解説＞

(1) は導関数から関数の変化を考察するなどの方法では，困難に遭遇する。ここは単純にθの代表値での関数値の正負によって，解の存在を検討しよう。$A>1$といった条件から，このような考え方に気づきたい。図１のような図を描いて説明すると解り易い。

(2) は題意を読み取るに苦労する問題文である。したがって，どのように考察を進めるべきか，方針をまとめるのに5分以上の時間を必要としそうだ。「条件を満足する実数 r の存在を証明せよ」という存在の証明だから，オタオタしそうである。「･･･少なくとも4 個ある」という命題の証明なら，数学の問題として慣れているだろう。

(1)を前提としての問題であることを想定できるから，曲線C上の点Qの座標や領域D内の点Pの座標を極座標表示する着想がポイントだ。このとき，曲線Cや領域Dが楕円なので，楕円の長半径によって表現する。

図３のような図を描いて考える。PQ がQ における接線と直交する条件を満たす表式から点P に対

して4 個の点Q が得られることを示せば良いことになる。点Qの極方程式として，意外に容易に(1)と同様の表式が得られる。

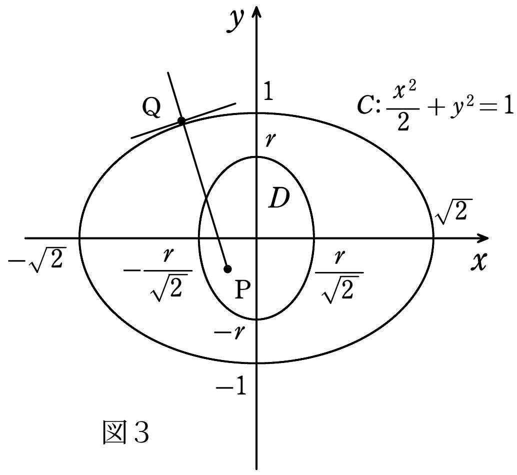

図３

<総評>

東大理科の数学の問題は手強い問題が揃っている。今年度は特にその感を強くした。高校数学の教科書には見られない数学的表現が多く，題意の把握が困難なところがあった。加えて解答方針に鋭い着眼，着想が必要であるように思う。

例年に比べ，成績はどのようであったろうか興味深い。

第１問

題意を的確にとらえることがやや難しい。「・・・すべて満たす実数の集合と，$x>p$を満たす実数の集合とが一致している」という，高校数学では読むことのないような「数学的表現」に戸惑いを覚える受験生も少なくないのではないか。東大入試の数学問題では，このような数学的表現がときおり記載され，高校数学の教科書に慣れ親しんできた者には，違和感を覚えるだろう。

「$x>p$であれば，3つの不等式が成立する実数pが存在する」と理解すれば，設問に対する解答方針を立てやすいであろう。2つの実数の集合が一致するとは，いかなる数学的意味なのか，などと考えて，時間を無駄にしたくないものだ。難易度はＢ。

第２問

直感的に解る問題だから，領域を容易に描くことができよう。説明のプロセスがやや長くなるので難易度はＢとする。

第３問

(1)，(2)が(3)の誘導となっていることに注意する。領域D の面積が曲線C とx 軸の囲む面積S_1 と点 P と原点の距離の最大値を半径とする円の面積の$\frac{1}{4}$（ S_2 ）の和であることに気づく必要がある。これには，曲線 C と領域の図を描いて凝視することが必要であろう。このような気づきが必要なこと，積分に置換積分が必要なことなどから，難易度はＢ＋。

第４問

ある規則によって形成される整数とそれを係数とする多次元関数の性質に関する問題であるが，解答方針に着眼，着想が必要であり，難問である。難易度Ａ。

第５問

空間図形の問題で，解答の方針に着想が必要である。設問(1)から，(2)では円錐S内の点Pと点Aを結ぶ部分T_Tの$z=$一定の平面による断面を考察することだと着想できると良い。その断面が円錐Sの断面円の投影であることに気づけるかどうかがポイントである。難易度A。

第６問

(1)は(2)への誘導問題となっている。(2)は問題文から題意を的確に把握することが，やや難しい。P，Qなどの座標表示を極座標で行うことが解答のためには必要だ。難易度はA－。

210510

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

$a>0$，$b>0$とする。座標平面上の曲線

$$C：y=x^3-3ax^2+b$$

が，以下の２条件を満たすとする。

条件１：Cはx軸に接する。

条件２：x軸とCで囲まれた領域（境界は含まない）に，x座標とy座標がともに整数である点がちょうど１個ある。

bをaで表し，aのとりうる値の範囲を求めよ。

<解答>

(1)

$y=f(x)=x^3-3ax^2+b$とする。

$f'(x)=3x^2-6ax=0$とすれば，$x=0$，$2a$

$y=f(x)$は図１のように変化し，図２のようなグラフとなる。

Cがx軸と接するためには，$f(2a)=-4a^3+b=0$，$\therefore\ b=4a^3$

したがって，$f(x)=x^3-3ax^2+b=x^3-3ax^2+4a^3=(x+a)(x-2a)^2$

x軸とCで囲まれた領域は図２の打点部で，Cは$x=0$で最大値bをとる。

したがって整数が１個だけとすれば，それは$(0,1)$だから

$$1<f(0)=b\leqq 2,\ \therefore\ 1<4a^3\leqq 2,\ \therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<a\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\quad ①$$

整数値 の組$(-1,1)$が領域に含まれない条件を検討する。

①から，$a<1$だから，$x=-1<-a$はこの領域には含まれない。

したがって，整数値の組$(-1,1)$がこの領域に含まれることはない。

整数値の組$(1,1)$が領域に含まれない条件を検討する。

①から$2a>1$だから，$f(1)=1-3a+b=4a^3-3a+1\leqq 1$，$\therefore\ 4a^3-3a=a(4a^2-3)\leqq 0$，

$$\therefore\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ②$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\frac{\sqrt{3}}{2}$だから①は②を満たすので，(1, 1)は領域に含まれない。

以上によって，$b=4a^3$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<a\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　（答）

x		0		$2a$	
$y'=f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↗	b	↘	$b-4a^3$	↗

図1

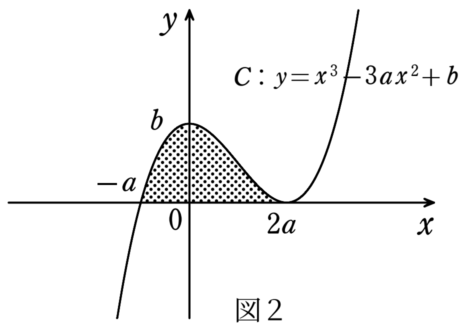

図2

＜解説＞

曲線Cの式の導関数から，式の変化を調べ，図２のようなグラフを描いて考察する。Cがx軸と接するためには，極値をとる$x=0$，$2a$において，$f(0)=b>0$だから，$f(2a)=0$である。

曲線Cとx軸が囲む領域において，Cの最大値は$x=0$における$y=b$だから，境界以外に整数値の組が１個存在するとすれば，それは整数値の組(0, 1)で，$1<f(0)=b\leqq 2$でなければならない。

このとき，整数値の組が１個のみであることを確認する必要がある。次に整数値の組として存在する可能性があるのは，(−1, 1)，(1, 1)であり，これらが領域に含まれなければ，領域に存在する整数値の組は(0, 1)のみとなる。

第　2　問

座標平面上に 8 本の直線

$x=a$　($a=1, 2, 3, 4$)，　　$y=b$ ($b=1, 2, 3, 4$)

がある。以下，16個の点

(a, b)　($a=1, 2, 3, 4,$　$b=1, 2, 3, 4$)

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

＜解答＞

(1)

選んだ点を1 個も含まない直線 2 本の組み合わせには以下の場合がある。

a) x 軸またはy 軸に平行な直線 2 本（図１(a)）

2 本の直線の組み合わせの数は ${}_4C_2\times 2$ 通り

選択できる点は 8 個のうちから 5 個だから，${}_8C_5$ 通り

しかし選択によっては 4 本の直線のうち 1 本が選んだ点を含まなくなる。

4 本の直線の中の 1 本が点を含まない場合の点の選び方は $4\times{}_6C_5$ 通り

4 本の直線が少なくも 1 個の点を含む場合は，その余事象だから，${}_8C_5-4\times{}_6C_5$ 通り

したがって，ちょうど 2 本の直線上にはない 5 個の点の選び方は，${}_4C_2\times2\times({}_8C_5-4\times{}_6C_5)$ 通り

b) x 軸および y 軸に平行な直線それぞれ 1 本ずつ（図１ (b)）

2 本の直線の組み合わせの数 4×4 通り，残り6 本は 5 個の点のうち少なくも 1 個を含む。

選択できる点は 9 個のうちから 5 個だから，${}_9C_5$ 通り。

しかし，選択によってはさらに1 本の直線が選んだ点を含まなくなる。

6 本の直線の中の 1 本が点を含まない場合の点の選び方は $6\times{}_6C_5$

6 本の直線が少なくも 1 個の点を含む場合は，その余事象だから，${}_9C_5-6\times{}_6C_5$

したがって，ちょうど2 本の直線上にはない 5 個の点の選び方は，$4\times4\times({}_9C_5-6\times{}_6C_5)$ 通り

以上によって，a)，b) の場合を合算して，

${}_4C_2\times2\times({}_8C_5-4\times{}_6C_5)+4\times4\times({}_9C_5-6\times{}_6C_5)=384+1440=1824$ 通り　（答）

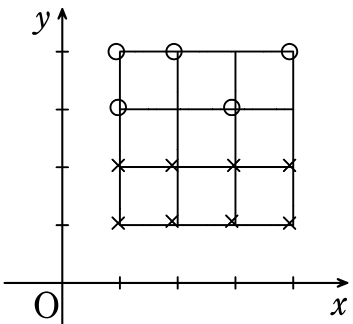

図１ (a)

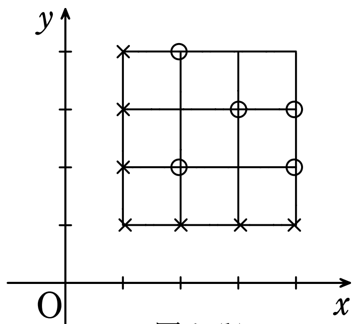

図１ (b)

(2)

4 本の直線 $x=1$，2，3，4 上の選んだ 5 個の点の個数の組合せは｛1個，1個，1個，2個｝である。どの直線が 2 個含むかで 4 通り，その 2 個がどの位置かで ${}_4C_2$ 通りの選び方がある。

このような 2 個の点の選び方によって，残る 3 個の点を選ぶ場合に差異はないから，その 2 個の点に (1 , 1)，(1 , 2) を選んだとして考える。残る 3 個の点の選び方の数が N ならば，求める選び方の数は $4\times{}_4C_2\times N$ である。

3 本の直線 $x=2$，3，4 上の点の選び方を考える。

(ⅰ) (2 , 1) または (2 , 2) を選ぶ場合

残る 2 点は (3 , 3)，(4 , 4) または (3 , 4)，(4 , 3)の 2 通り，したがって選び方の数は 2×2 通り

(ⅱ) (2 , 3) を選ぶ場合

残る2点のうち，

$x=3$ 上の点を (3 , 4) とすれば $x=4$ 上の点は $y=1$，2，3，4 いずれでも良いので1×4 通り

$x=3$ 上の点を (3 , 4) 以外の3点のいずれかとすれば，$x=4$ 上の点は (4 , 4) なので 3×1 通り

したがって，場合の数は $1\times4+3\times1=7$ 通り

(ⅲ) (2 , 4) を選ぶ場合：(ⅱ)と同様で，7 通り

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より，$N=2\times2+7\times2=18$ 通り

したがって，求める選び方の数は $4\times {}_4C_2 \times N = 4\times 6\times 18 = 432$ 通り（答）

＜解説＞

一見容易そうな場合の数の計算であるが，点の選び方を緻密に行う必要がある。特定の事象の発生確率を求める問題では，特定の事象が発生する場合の数を事象全体の場合の数で除することによって求める。この場合，個々の事象の発生する確からしさは同じであることを前提とする。

だから，確率の問題では事象が発生する場合の数（この問題では，5個の点の選び方の数）を求めることが必須である。(1)では直交する4 本と4本の直線の16 個の交点から 5 個を選ぶとき，ちょうど 2 本の直線上に選んだ点が 1 個もない選び方の数を求める。ここでは，2 本の直線の選び方，次に選んだ点が残る 6 本の直線上に存在するような 5 点の選び方，というように場合の数を数えていく。

(2)でも同様に場合の数を数える。(1)から類推すると，以下のような別解が考えられる。

「8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む」事象は，以下の (イ)，(ロ)，(ハ)，(ニ)の事象の和の余事象である。

(イ) 選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 1 本ある。

(ロ) 選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 2 本ある。（ (1) から，1824通り）

(ハ) 選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 3 本ある。

(ニ) 選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 4 本以上ある。（この場合は0通り）

(イ)「選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 1 本ある」場合の数

1本の直線を選ぶ場合の数は 8 通り。

直線 $x = 1$ 上に選んだ点が存在しないとする。3 本の直線 $x = 2,\ 3,\ 4$ 上に選ぶ点の個数の組み合わせは｛2 個 , 2 個 , 1 個｝または ｛3 個 , 1 個 , 1 個｝でそれぞれ 3 通り。

｛2 個 , 2 個 , 1 個｝の場合を考える

$x = 2$ 上の点が2 個の場合は ${}_4C_2$ 通り。(2 , 1)，(2 , 2) を選んだとする。

$x = 3$ 上の点が (3 , 1) または (3 , 2) と (3 , 3) または (3 , 4) の組合わせは $2\times 2 = 4$ 通り

$x = 4$ 上の点は (4 , 3) または (4 , 4) の 2 通り

したがって，｛2 個 , 2 個 , 1 個｝の場合の数は ${}_3C_1\times {}_4C_2\times 4\times 2 = 144$ 通り

｛3 個 , 1 個 , 1 個｝の場合を考える。

$x = 2$ 上の点が 3 個の場合は ${}_4C_3$ 通り。(2 , 1)，(2 , 2)，(2 , 3) を選んだとする。

$x = 3$ 上の点 (3 , 4) を選べば$x = 4$ 上の点は任意で 4 通り，他の 3 点を選べば (4 , 4) となり3通り。

したがって，｛3 個 , 1 個 , 1 個｝の場合の数は ${}_3C_1\times {}_4C_3\times 7 = 84$ 通り。

以上によって，「選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 1 本ある」場合の数は

$8\times (144+84) = 1824$通り

(ハ)「選んだ点を 1 個も含まない直線がちょうど 3 本ある」場合の数

3 本は x 軸（またはy 軸）に平行な直線 2 本と y 軸（またはx 軸）に平行な直線 1 本の組合せで，$({}_4C_2\times 4)\times 2 = 48$ 通り。残る 2 本と 3 本の直線の 6 個の交点から 5 点の選び方は ${}_6C_5 = 6$ 通り。

したがって，$48\times 6 = 288$ 通り。

$4\times 4 = 16$個 の交点から 5 点を選ぶ場合の数は ${}_{16}C_5 = 4368$ 通り。

以上によって，求める場合の数は，$4368 - (1824+1824+288) = 432$ 通り。

結果的に，この別解よりも解答のように直接求める方が容易であることがわかった。

第　3　問

Oを原点とする座標平面において，放物線

$$y=x^2-2x+4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$l: \quad y=ax$$

を考える。次の条件を満たすaの範囲を求めよ。

C 上の点 A とl 上の点Bで，３点O，A，Bが正三角形の３頂点となるものがある。

<解答>

(1)

$$y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3 \quad ①$$

C と接する原点Oを通る直線を$y=kx$　②

①，② を連立させた方程式 $x^2-2x+4=kx$ は正の重解をもつから，

$x^2-(2+k)x+4=(x-2)^2=0$，$\therefore\ 2+k=4$，$k=2$

半直線 OP が通過する領域はy 軸と直線 $y=2x$ に囲まれた $x>0$ の領域（図１の打点部）

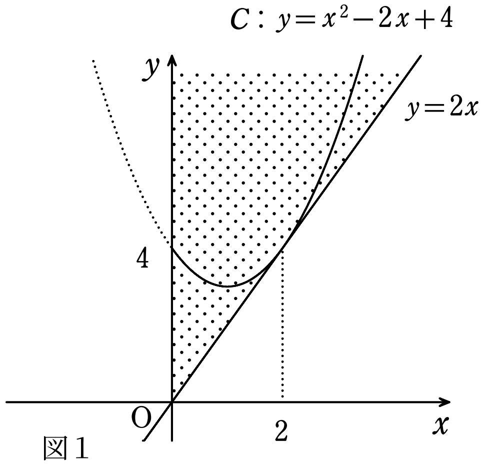

図１

(2)

C 上の点A のx 座標をx_A，直線OA がx 軸となす角をθ_Aとすれば，$x_A=0$ から∞ に変化すると，

θ_Aは $\dfrac{1}{2}\pi$ から $\tan^{-1}2$ まで連続的に変化する。

直線 OB は直線 OA と$\dfrac{1}{3}\pi$ の角度をなすから，直線 OB がx 軸となす角 $\theta_B=\theta_A \pm \dfrac{1}{3}\pi$

$$a=\tan\theta_B=\tan\left(\theta_A \pm \frac{1}{3}\pi\right)=\frac{\sin(\theta_A \pm \pi/3)}{\cos(\theta_A \pm \pi/3)}=\frac{\tan\theta_A-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\tan\theta_A+1}$$

ⅰ) $\theta_B=\theta_A-\dfrac{1}{3}\pi$のとき，$a=\dfrac{\tan\theta_A-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\tan\theta_A+1}$

$\theta_A=\dfrac{1}{2}\pi$ のとき $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta_A=\tan^{-1}2$ すなわち $\tan\theta_A=2$ のとき $a=\dfrac{5\sqrt{3}-8}{11}$

したがって，$\dfrac{5\sqrt{3}-8}{11}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ⅱ) $\theta_B=\theta_A+\dfrac{1}{3}\pi$のとき，$a=\dfrac{\tan\theta_A+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\tan\theta_A+1}$

$\theta_A=\dfrac{1}{2}\pi$ のとき $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta_A=\tan^{-1}2$ すなわち $\tan\theta_A=2$ のとき $a=-\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}$

したがって，$-\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

以上から，$\dfrac{5\sqrt{3}-8}{11}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　または　$-\dfrac{8+5\sqrt{3}}{11}\leqq a\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（答）

<解説>

図１のような図を描いて考察する。OPがCの接線となるときまでが，半直線OPの通過する範囲であることに気づく。直線 OP を $y=kx$ とすれば，$k=2$のとき接線となるから，$2\leqq k$。

(2)では(1)を踏まえて，直線 $y=kx$ と$\dfrac{\pi}{3}$ の角をなす直線$y=ax$ 上に点B があることに着眼する。

このとき，図２に示すように，$\theta_A\pm\dfrac{\pi}{3}$となる２つの直線上に点Bが存在し得ることに注意する。

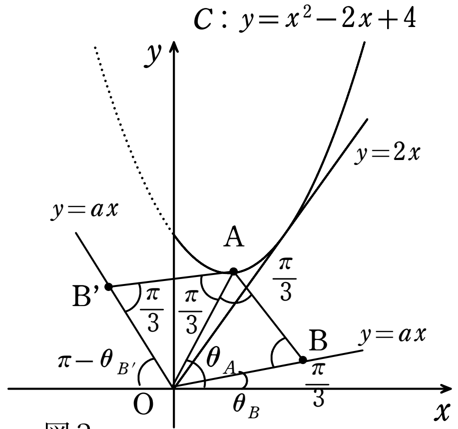

図２

第４問

n，kを，$1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m\quad(m=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのような積をとることにより得られる ${}_nC_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3}=2^0\cdot2^1\cdot2^2+2^0\cdot2^1\cdot2^3+2^0\cdot2^2\cdot2^3+2^1\cdot2^2\cdot2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots\cdots+a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ。

＜解答＞，＜解説＞

理系の第４問に同じなので，そちらを参照する。

＜総評＞

今年は第４問のみ理科の問題と同じであった。文科系にしては，手強い問題が揃っている。

第１問

3次関数のグラフを描いて，題意を的確に把握したい。難易度はB。

第２問

場合の数を求める問題。条件を満たす選び方の数を計数するのだが，解答方針には個別性が強いので，方向を誤ると迷路にはまり込んでしまう。ここでは選び方の場合分けと場合の数の数え方を緻密に行う必要があるので，文系の問題としては手強いと思う。難易度A。

第３問

図形と関数の問題で，直線の傾きを三角関数で扱うことが必要となる。難易度はB。

第４問

理科系の数学の問題として難しいのだから，文科系にとっても十分に難しい。こうした問題に迅速に対応できる文科系の学生はどの程度いるであろうか。また受験生に何を期待してこのような問題を出すのであろうか？　難易度A。

210517