2021（R3)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（文系）

数学（理系）　200点満点，150分

$\boxed{1}$　(40点)

次の各問に答よ．

問１　xyz 空間の３点 $A(1,0,0)$，$B(0,-1,0)$，$C(0,0,2)$ を通る平面 α に関して点 $P(1,1,1)$と対象な点 Q の座標を求めよ．ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである．

問２　赤玉，白玉，青玉，黄玉が１個ずつ入った袋がある．よくかきまぜた後に袋から玉を１個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す．この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて４種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ．
（補足：ただし n は４以上の整数とする．）

<解答>

問１

平面 α の式は $x-y+\dfrac{1}{2}z=1$

点 Q を $(Q_X,\ Q_Y,\ Q_Z)$ とする。PQ の中点 M は $\dfrac{1}{2}(1+Q_X, 1+Q_Y, 1+Q_Z)$

M は平面 α上の点だから，$1+Q_X-(1+Q_Y)+\dfrac{1}{2}(1+Q_Z)=2$，$\therefore\ 2Q_X-2Q_Y+Q_Z=3$　①

直線 PQ は平面 α に垂直だから，ベクトル$\overrightarrow{PQ}=(Q_X-1,\ Q_Y-1,\ Q_Z-1)$ は
ベクトル $\overrightarrow{AB}=(-1,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 2)$ と直交する。

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=-Q_X+1-Q_Y+1=0$，$\therefore\ Q_X+Q_Y=2$　②

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=-Q_X+1+2Q_Z-2=0$，$\therefore\ -Q_X+2Q_Z=1$　③

①，②，③ から $Q_X=\dfrac{13}{9}$，$Q_Y=\dfrac{5}{9}$，$Q_Z=\dfrac{11}{9}$，したがって点 Q の座標は $\left(\dfrac{13}{9},\dfrac{5}{9},\dfrac{11}{9}\right)$　（答）

問２

４色の玉から１色の玉を取り出す試行を $n-1$ 回行ったとき，玉の色は各回４通りだから，
色の組合せの場合の数は 4^{n-1} 通り

$n-1$ 回の試行で赤玉以外の色の玉を少なくも１回は取り出す場合の数を考える。

$n-1$ 回の試行で赤球以外の３色の玉のいずれかを取り出す場合は 3^{n-1} 通り。①

$n-1$ 回の試行で 2 色の玉のいずれかを 1 個は取り出す場合は ${}_3C_2\times(2^{n-1}-2)$ 通り。②

$n-1$ 回の試行で 1 色の玉のみを取り出す場合は ${}_3C_1\times1^{n-1}=3$ 通り。③

$n-1$ 回の試行で赤玉以外の色の玉を少なくも 1 回は取り出す場合の数は

①−②−③ $=3^{n-1}-3\times(2^{n-1}-2)-3\times1=3^{n-1}-3\times2^{n-1}+3$ 通り

したがって，その確率は $\dfrac{3^{n-1}-3\times2^{n-1}+3}{4^{n-1}}$

n 回目に赤球を取り出す確率は $\dfrac{1}{4}$ だから，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率は $\dfrac{3^{n-1}-3\times2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3^{n-1}-3\times2^{n-1}+3}{4^n}$ （答）

＜解説＞

問 1

まずは平面 α の方程式を求めよう。$ax+by+cz+d=0$として，これが 3 点 A$(1,0,0)$, B$(0,-1,0)$，C$(0,0,2)$ を通ることで，$x-y+\dfrac{1}{2}z=1$ を求める。直線 PQ が平面 α に垂直という条件は，平面 α 上のベクトルが直線 PQ と直交する条件と同値であることを利用する。

問 2

「n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる」という題意を再定義しよう。「$n-1$ 回目の試行まで，赤玉を取り出すことなく，他の 3 色の玉は少なくも 1 個は取り出す。その上で n 回目の試行は赤玉を取り出す」ということである。

$n-1$ 回の試行で赤玉以外の 3 色の玉の少なくも 1 個は取り出す場合の数

＝（ ① 赤玉以外の 3 色のいずれかを取り出す場合の数 ）

　－（ ② 赤玉以外の 2 色の玉のいずれかを少なくも1個は取り出す場合の数 ）

　－（ ③ 赤玉以外の 1 色の玉のみを取り出す場合の数 ）

①の場合の数は，各回の試行で赤玉以外の 3 色の玉のいずれかを取り出す場合だから，3^{n-1} 通り

②の場合の数は,

（ 赤玉以外の 3 色の玉のうち 2 色の玉のいずれかを取り出す場合は ${}_3C_2\times2^{n-1}$ 通り）から

（ 上記のうちで 1 色のみの玉を取り出す場合は ${}_3C_2\times1^{n-1}\times2={}_3C_2\times2$ 通り ）を差し引いた数

$\boxed{2}$ (30点)

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ.

＜解答＞

点 P の座標を$(p_X,\ p_Y)$とすれば，$p_Y=\dfrac{1}{2}({p_X}^2+1)$

$y' = x$，したがって点Pにおける接線は $y-p_Y = p_X(x-p_X)$，接線はx軸と交わるから $p_X \neq 0$

したがって，接線の方程式は $y = p_X x - {p_X}^2 + \dfrac{1}{2}({p_X}^2+1) = p_X x - \dfrac{1}{2}({p_X}^2-1)$

ここで$y=0$とおけば，$x = \dfrac{{p_X}^2-1}{2p_X}$，したがってQの座標は $(q_X,\ 0) = \left(\dfrac{{p_X}^2-1}{2p_X},\ 0\right)$

$$L^2 = (p_X-q_X)^2 + (p_Y-0)^2 = \left(\frac{1+{p_X}^2}{2p_X}\right)^2 + \frac{1}{4}(1+{p_X}^2)^2 = \frac{1}{4{p_X}^2}(1+{p_X}^2)^3$$

ここで，${p_X}^2 = t > 0$ とおくと，$L^2 = f(t) = \dfrac{1}{4t}(1+t)^3$

$$f'(t) = \frac{3(1+t)^2t-(1+t)^3}{4t^2} = \frac{(1+t)^2(2t-1)}{4t^2}$$

$L^2 = f(t)$ は t によって，図１のように変化するから，L^2 が取りうる最小値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{27}{16}$，

したがって L が取りうる最小値は $\sqrt{f\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ （答）

t	0		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

図１

＜解説＞

二次式による図形の問題。題意は簡明であり，計算も困難がないので，スムーズに解答したい。

$\boxed{3}$ (30点)

無限級数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ．

＜解答＞

$n=12k_1+k_2$，$k_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 0 \leqq k_2 \leqq 11$，とおく。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1+k_2}\cos\left(2k_1\pi+\frac{k_2}{6}\right)\pi\right) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1}\left(\sum_{k_2=0}^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_2}\cos\left(\frac{k_2}{6}\right)\pi\right)$$

$$\sum_{k_2=0}^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_2}\cos\left(\frac{k_2\pi}{6}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^7\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^8\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^9+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right\}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$= 1 + \dfrac{157}{2048} + \dfrac{945}{4096}\sqrt{3} = \dfrac{2205}{2048} + \dfrac{945}{4096}\sqrt{3}$

$\displaystyle\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1} = \sum_{n-0}^{\infty}\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{4096}{4095}$，ただし $r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

したがって，

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{6} = \frac{4096}{4095}\left(\frac{2205}{2048}+\frac{945}{4096}\sqrt{3}\right) = \frac{4410}{4095}+\frac{945}{4095}\sqrt{3} = \frac{14+3\sqrt{3}}{13}$　（答）

＜解説＞

解答方針を考える。無限級数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{6}$を見つめる。

$\cos\dfrac{n\pi}{6}$ は$n=12$を周期とすることに気づく。

そこで，$n=12k_1+k_2$，$k_1=0, 1, 2, 3, ...\infty$，$0\leqq k_2\leqq 11$，とおくと，

$\cos\dfrac{n\pi}{6} = \cos\dfrac{(12k_1+k_2)\pi}{6} = \cos\left(2k_1\pi+\dfrac{k_2\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{k_2\pi}{6}$ だから，$\cos\dfrac{n\pi}{6}$ は k_1 に関わらず，k_2 のみによって決まることがわかる。したがって，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1+k_2}\cos\frac{(12k_1+k_2)\pi}{6}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_2}\cos\frac{(12k_1+k_2)\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12k_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_2}\cos\frac{k_2\pi}{6}$$

k_1 の項とk_2 の項の積に分解できる。

なお，

$\cos\dfrac{0\pi}{6}=1$，$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{3\pi}{6}=0$，$\cos\dfrac{4\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{6\pi}{6}=-1$，$\cos\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{8\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{9\pi}{6}=0$，$\cos\dfrac{10\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{11\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

は容易にわかる。

次に別解を紹介しよう。

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおく。$\overline{\alpha}=\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}$ だから，$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$

ド・モアブルの定理により，

$$\alpha^n = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$\overline{\alpha}^n = \left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}$$

したがって，$\cos\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\alpha^n+\overline{\alpha}^n}{2}$ だから，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\alpha^n+\overline{\alpha}^n}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)^n\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)^n\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\alpha/2)^n}{1-(\alpha/2)} = \frac{2}{2-\alpha},\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\overline{\alpha}/2)^n}{1-(\overline{\alpha}/2)} = \frac{2}{2-\overline{\alpha}}$$

ただし，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right) = 0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)^n = 0$ とした。

したがって，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} = \frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\overline{\alpha}} = \frac{4-(\alpha+\overline{\alpha})}{(2-\alpha)(2-\overline{\alpha})} = \frac{4-(\alpha+\overline{\alpha})}{4+\alpha\overline{\alpha}-2(\alpha+\overline{\alpha})}$

$\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \overline{\alpha} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ を用いて，$\alpha+\overline{\alpha} = \sqrt{3}$，$\alpha\overline{\alpha} = 1$

$$\frac{4-(\alpha+\overline{\alpha})}{4+\alpha\overline{\alpha}-2(\alpha+\overline{\alpha})} = \frac{4-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} = \frac{(4-\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})} = \frac{14+3\sqrt{3}}{13}$$

この方法の方がすっきりと理解できそうだが，複素数の数列の和の取り扱いなど，厳密さを欠いている。出題者は，どのような解を想定し，30点満点が与えられる解はどのようなものか，興味のあるところである。

この別解を考えているうちに，出題者が想定した解法は別解ではないかと思うようになった。ド･モアブルの定理を活用し，与式が複素数とその共役複素数のべき乗の和による級数によって表現される。実にすっきりとした表式になる。読者にはこちらの解法を本流として理解してほしい。

$\boxed{4}$ (30点)

曲線 $y = \log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ.

＜解答＞

曲線の微小長さ ds は，$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$，$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{1+\cos x}$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{2}{1+\cos x} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

したがって $ds = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx$，したがって $s = \int ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx$

不定積分 $\int\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx$ を求める。

$t = \frac{x}{2}$ として，$\int\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx = 2\int\frac{1}{\cos t}dt = 2\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = 2\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt$

$u=\sin t$ とおく。$\dfrac{du}{dt}=\cos t$，$dt=\dfrac{du}{\cos t}$ だから,

$$\therefore 2\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt=2\int\frac{1}{1-u^2}du=\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\log|1+u|-\log|1-u|$$

$x=0\to t=0\to u=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\to t=\dfrac{\pi}{4}\to u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}dx=\Big[\log|1+u|-\log|1-u|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\log\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}=\log(3+2\sqrt{2})\qquad\text{（答）}$$

＜解説＞

線長を求めるときの方法は理解しておきたい。

$$\varDelta s=s(x+\varDelta x)-s(x)=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\varDelta x\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}=\varDelta x\sqrt{1+\left(\frac{y(x+\varDelta x)-y(x)}{\varDelta x}\right)^2}$$

$\varDelta x\to 0$ において，$ds=dx\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ として

$$s=\int_q^{\frac{\pi}{2}}\{s(x+dx)-s(x)\}=\int_q^{\frac{\pi}{2}}ds(x)=\int_q^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$\boxed{5}$ （30点）

xy 平面において，2 点 B$(-\sqrt{3},-1)$，C$(\sqrt{3},-1)$に対し，点 A は次の条件 (*) を満たすとする。

(*)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ点A の y 座標は正.

次の各問に答えよ.

(1) △ABC の外心の座標を求めよ.

(2) 点 A が条件 (*) を満たしながら動くとき，△ABC の垂心の軌跡を求めよ.

＜解答＞

(1)

条件 (*) を満たす点 A の１つを y 軸上にとったとして，この点を P とする。

点 M を (0, −1) とすれば，直角三角形 PBM ≡ 直角三角形 PCM，$\angle\mathrm{BPM}=\angle\mathrm{CPM}=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，$\angle\mathrm{PBM}=\angle\mathrm{PCM}=\dfrac{\pi}{3}$，∴ △PBC は正三角形,

したがって PB = PC = BC $=2\sqrt{3}$，したがって △PBC の外心は 原点 O (0 , 0)

△PBC の外接円上の点で y 座標が正の点を Q とすれば，$\angle\mathrm{BQC}=\dfrac{\pi}{3}$ だから，条件 (*) を満たすので点 Q は点 A の一つである。

したがって，△ABC の外心の座標は原点 O (0 , 0)　（答）

(2)

△ABC の外接円の方程式は $x^2+y^2=4$，点 A の座標を $(a_x,\ a_y)$ とすれば,

$a_x{}^2+a_y{}^2=4$，$a_y>0$，$-2<a_x<2$

垂心 H の座標を $(h_x,\ h_y)=(a_x,\ h_y)$ とする。ただし，$h_x=a_x$である。

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3}-a_x,\ -1-a_y)$，$\overrightarrow{CH}=(a_x-\sqrt{3},\ h_y+1)$

$\overrightarrow{AB}$ と$\overrightarrow{CH}$ は直交するから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=(-\sqrt{3}-a_x)(a_x-\sqrt{3})+(-1-a_y)(h_y+1)=0$

$a_x{}^2-3+(1+a_y)h_y+(1+a_y)=0$，これを h_y について解くと,

$$h_y=\frac{3-a_x{}^2}{1+a_y}-1=\frac{3-a_x{}^2}{1+\sqrt{4-a_x{}^2}}-1=\frac{(3-a_x{}^2)\left(1-\sqrt{4-a_x{}^2}\right)}{\left(1+\sqrt{4-a_x{}^2}\right)\left(1-\sqrt{4-a_x{}^2}\right)}-1$$

$$=\sqrt{4-a_x{}^2}-2=\sqrt{4-h_x{}^2}-2,\quad \therefore h_x{}^2+(h_y+2)^2=4$$

$h_y+2=\sqrt{4-a_x{}^2}>0$，$\therefore h_y>-2$

すなわち点 A が条件 (*) を満たしながら動くとき，△ABC の垂心 $(h_x,\ h_y)$ の軌跡は，$(0,\ -2)$ を中心とする円 $x^2+(y+2)^2=2^2$ の $y>-2$ の部分となる（答）。

＜解説＞

(1)では図１のような図を描いて考える。$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ となるような点 A の１つとして，点 P$(0,2)$ を考えれば，△ABC の外接円の中心が原点 O$(0,0)$であることは容易にわかる。

(2)では，垂心の x 座標は点 A の x 座標に同じであることに注意する。AB ⊥ CHのような条件を考えれば，容易に垂心 $(h_x,\ h_y)$ の軌跡（図２の太線）を求めることができる。

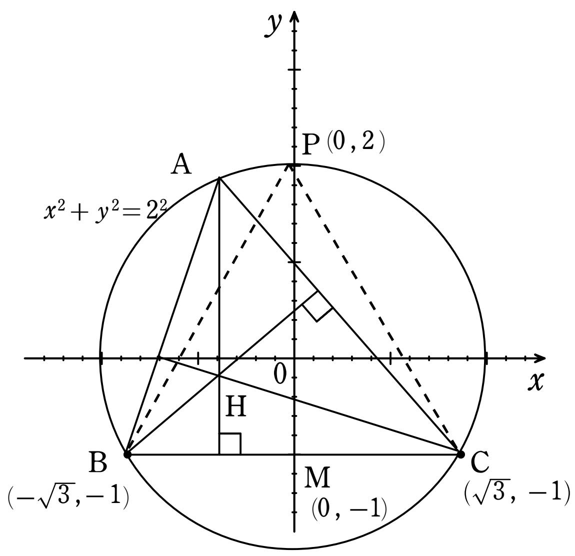

図１

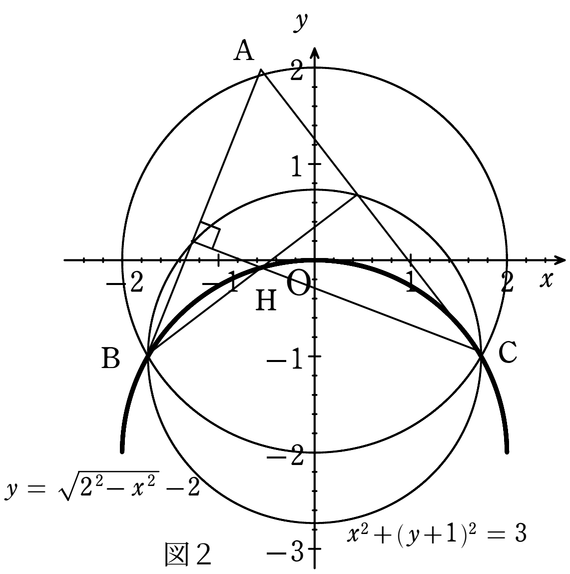

図２

$\boxed{6}$ (40点)

次の各問に答えよ.

問1 n を 2 以上の整数とする. 3^n-2^n が素数ならば n も素数であることを示せ.

問2 a を 1 より大きい定数とする. 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a)=af(1)$ を満たすとき, 曲線 $y=f(x)$ の接線で原点 $(0,0)$ を通るものが存在することを示せ.

<解答>

問1

a, b を $a>b\geqq 2$ なる整数とする。a^n-b^n は

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+a^{n-k}b^{k-1}+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ のように因数分解される。

3^n-2^n において, n が素数ではないとする。

すると, $n=pq$ のように n は 2 個以上の整数の積によって表される。p, q は 2 以上の整数である。

$3^n-2^n=3^{pq}-2^{pq}$, ここで $A=3^p$, $B=2^p$ とおけば,

$3^n-2^n=3^{pq}-2^{pq}=A^q-B^q=(A-B)(A^{q-1}+A^{q-2}B+\cdots+A^{q-k}B^{k-1}+\cdots+AB^{q-2}+B^{q-1})$

ここで, $A-B=3^p-2^p>1$, $A^{q-1}=3^{p(q-1)}\geqq 9$ だから, 3^n-2^n は整数の積によって表される。

すなわち 3^n-2^n は素数ではない。

n が素数でないと仮定すると, 3^n-2^n は素数ではないとする矛盾する結論に至るから, n は素数である。

問2

$x=b$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は $y-f(b)=f'(b)(x-b)$, すなわち $y=f'(b)(x-b)+f(b)$

この接線が原点 $(0,0)$ を通るとすれば, $0=-b\,f'(b)+f(b)$, $\therefore\ f(b)=b\,f'(b)$

したがって, $f'(b)=\dfrac{f(b)}{b} \Longleftrightarrow$ 接線の方程式 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$ は原点を通る

$$\frac{f(b)}{b}-f'(b)=\frac{f(b)}{b}-\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(b+h)-f(b)}{h}\right\}$$

$$\frac{f(b)}{b}-\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=\frac{hf(b)-bf(b+h)+bf(b)}{bh}=\frac{(b+h)}{h}\left\{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(b+h)}{b+h}\right\}$$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(b+h)}{b+h}\right\}=-\{g'(x)\}_{x=b}=-g'(b)$

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$, $\therefore\ g'(b)=\dfrac{f'(b)b-f(b)}{b^2}$ ①

$g(1)=\dfrac{f(1)}{1}$, $g(a)=\dfrac{f(a)}{a}$ だから, 平均値の定理により $1<b<a$ において,

$g'(b)=\dfrac{g(a)-g(1)}{a-1}=0$ となるような b が存在する。① の b をそのような b とすれば,

$g'(b)=\dfrac{f'(b)b-f(b)}{b^2}=0$, $\therefore\ f'(b)b-f(b)=0$, $\therefore\ f'(b)=\dfrac{f(b)}{b}$ となるので,

$x=b$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は原点を通る。

＜解説＞

問１

整数の問題であるが，解答方針の着想が必要である。整数問題で整数 n に関して一般的に成立する表式を証明する場合，数学的帰納法あるいは背理法があるということは読者は良く知っているだろう。ここでは，n が素数か否かの問題で，n が順次的に変化するわけではないので，帰納法ではなく背理法を着想したい。そして，n が素数でないとして矛盾が発生することを示したい。

「n が素数ではないとすれば，3^n-2^n は素数ではない」という命題が真であるから，
この命題の対偶「3^n-2^n が素数であればn は素数である」は真となることを示したことになる。

問２

問題文を一読して，$f(x)$ の接線の方程式を書き出しても，解答の筋道が見えない。与えられた条件には $f(x)$ の微分に関する条件がないにも関わらず，接線の条件を議論しなければならないからだ。

しかし，関数値と微分係数とを結び付ける関係式として数学IIIの教科書に記載の平均値の定理があることを，直ぐに気づきたいところだ。与条件 $f(a)=af(1)$ を変形して，$\dfrac{f(a)}{a}=f(1)=\dfrac{f(1)}{1}$から，$1<b<a$ なる b における接線が原点を通ることになるであろうことを予見することもできよう。

鋭敏なる読者は，このことから $\dfrac{f(x)}{x}$ なる関数を考え，与条件 $f(a)=af(1)$ に接線の傾きとなる微分係数 $f'(b)$ を繰り込んで，以下のように接線が原点を通ることを証明するであろう。

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$とする。$f(a)=af(1)$ より，$\dfrac{f(a)}{a}=f(1)=\dfrac{f(1)}{1}$，すなわち$g(a)=g(1)$

平均値の定理により，$1<b<a$ なる b において$g'(b)=\dfrac{g(a)-g(1)}{a-1}=0$となる b が存在する。

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，$g'(b)=\dfrac{f'(b)b-f(b)}{b^2}=0$，$\therefore f'(b)=\dfrac{f(b)}{b}$

したがって，$f'(b)=\dfrac{f(b)}{b} \Leftrightarrow y-f(b)=f'(b)(x-b)$は原点を通る

筆者は与条件の下で接線が原点を通ることを証明するために，$f'(b)=\dfrac{f(b)}{b}$を証明しようとして，$\dfrac{f(b)}{b}-f'(b)$ を無理やり変形して扱った。

＜理系総評＞

本年度の問題は，扱いが容易なものと難しいものとに二分されたように思える。当然ながら，６問全部にざっと目通して，容易そうな問題，得意な分野の問題から手をつけたい。

筆者の場合，$\boxed{1}$ 問１，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{3}$，$\boxed{1}$ 問２，$\boxed{6}$といった順序であろうか。

$\boxed{1}$

問１は数学Ｂの範囲の空間座標とベクトルに関する問題。ベクトルの合成や直交条件を上手に活用したい。問２は場合の数と確率に関する問題。いずれも難易度はＢ。

$\boxed{2}$

二次式が表す図形（放物線）の接線に関する問題。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$

三角関数の級数の問題。ド･モアブルの定理により，複素数の級数問題に持ち込むことができれば，意外に容易に扱うことができる。実数部分が複素数とその共役複素数の和であることなど，複素数演算を上手に利用したい。解答方針のための着想が必要なことから，やや難しい問題で難易度はＡ－。

難癖をつけるわけではないが，問題文が「級数の和を求めよ」となっているのは，「級数は数列の和」なのだから，ややおかしい。

$\boxed{4}$

まず曲線の線長を求める表式を考える。その表式は三角関数と対数関数を含む関数の積分となるので，上手に変数変換などを施して，定積分を行う。定積分の過程にやや難しさがあるので，難易度はＡ－。

$\boxed{5}$

平面図形に関する問題。数学 A の図形の性質，数学 B のベクトルに関わる平面図形に関する問題。題意を上手に座標平面上の図形として表示して考察したい。難易度はＢ。

$\boxed{6}$

問１は論証と整式表現が関わる整数の問題。解答方針の着眼着想が必要であり，やや難しいので，難易度はA。

問２は数学Ⅱ，Ⅲに含まれる微分の問題で，数学らしい思考過程に着想が必要なので，やや難しい。難易度はA。

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$ (30点)

次の各問に答えよ.

問１　10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ．また，この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ.

問２　$\triangle$OAB においてOA=3，OB = 2，$\angle$AOB = 60°とする．$\triangle$OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

<解答>

問１

$$\begin{array}{l} 2\,\underline{)\,6\quad} \\ 2\,\underline{)\,3\quad}\ \cdots\ 0 \\ \quad\ 1\quad\ \cdots\ 1 \end{array}$$

により，整数部分 $6_{(2)} = 110$，

$0.75\times 2 = 1 + 0.5$

$0.5\ \times 2 = 1 + 0$

により，$0.75_{(2)} = 0.11$

したがって，$6.75_{(10)} = 110.11_{(2)}$　（答）

次に，$110.11_{(2)}\times 101.0101_{(2)} = 100011.110111_{(2)}$　（答）

$100011_{(2)} = 1\times 2^5+1\times 2^1+1\times 2^0 = 1\times 2\times 2^4+3\times 4^0 = 2\times 4^2+3\times 4^0 = 203_{(4)}$

$.110111_{(2)} = 1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^4}+1\times\frac{1}{2^5}+1\times\frac{1}{2^6} = 3\times\frac{1}{2^2}+1\times\frac{1}{2^4}+3\times\frac{1}{2^6}$

$$= 3\times\frac{1}{4^1}+1\times\frac{1}{4^2}+3\times\frac{1}{4^3} = .313_{(4)}$$

したがって，$110.11_{(2)}\times101.0101_{(2)} = 100011.110111_{(2)} = 203.313_{(4)}$　（答）

＜解説＞

問１

10 進法以外の各記数法による演算については，数学 A の教科書に2進法での扱いを中心に記載されている。しかし，あまり習熟する機会がないかも知れないので，応用できるように基本的なことはしっかり抑えておこう。

$110.11_{(2)}\times101.0101_{(2)}$ であるが，10進法の計算同様に，縦に並べて行うと良い。

$$\begin{array}{r} 101.0101 \\ \times\quad 110.11 \\ \hline 1.010101 \\ 10.10101 \\ 1010.101 \\ 10101.01 \\ \hline 100011.110111 \end{array}$$

10 進法で積演算を行い，結果を2 進法，4 進法にする方法もあるが，時間がかかりそうだ。

$101.0101_{(2)} = 1\times2^2+ 1\times2^0+1\times2^{-2}+1\times2^{-4} = 4+1+0.25+0.0625 = 5.3125_{(10)}$

$6.75_{(10)}\times 5.3125_{(10)} = 35.859375_{(10)}$

2) 35	より，$35_{(10)} = 100011_{(2)}$	$0.859375\times2 = 1 + 0.71875$	より，$0.859375_{(10)} = 0.110111_{(2)}$
2) 17 … 1		$0.71875\ \times2 = 1 + 0.4375$	
2) 8 … 1		$0.4375\ \times2 = 0 + 0.875$	
2) 4 … 0		$0.875\ \times2 = 1 + 0.75$	
2) 2 … 0		$0.75\ \times2 = 1 + 0.5$	
1 … 0		$0.5\ \times2 = 1 +0$	

$35.859375_{(10)} = 100011.110111_{(2)}$

問２

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は独立なベクトルだから，α，β を実数として，$\overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ と表される。

与えられた条件から，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = 3^2$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} = 2^2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\cdot2\cos60^\circ = 3$ である。

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} = (\alpha-1)\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OA}+(\beta-1)\overrightarrow{OB}$

H は垂心だから，AHとOB は直交する。したがって $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

すなわち，$\{(\alpha-1)\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\}\cdot\overrightarrow{OB} = (\alpha-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} = 3(\alpha-1)+4\beta = 0$　①

同様に，BH とOA は直交する。したがって $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

すなわち，$\{\alpha\overrightarrow{OA}+(\beta-1)\overrightarrow{OB}\}\cdot\overrightarrow{OA}=9\alpha+3(\beta-1)=0$　②

①，② から $\alpha=\dfrac{1}{9}$，$\beta=\dfrac{2}{3}$

以上によって，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$　（答）

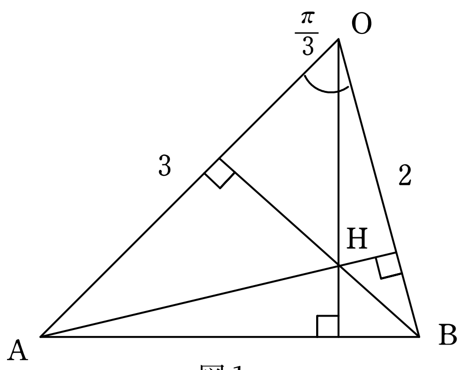

図１

＜解説＞

図１のような図を描いて考察する。図形の線分をベクトルによって表現し，内積演算によって，ベクトルの直交性を計算する。

$\boxed{2}$　（30点）

定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ を求めよ.

＜解答＞

$x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$だから,

$$\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad\left(-1\leqq x\leqq-\frac{1}{2}\right)$$

$$-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)$$

$$\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right\}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{-\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{7}{48}-\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{9}{16}=\frac{19}{24}$$

＜解説＞

まずは，被積分関数の絶対値記号を外して，定積分の計算を行う。

ここでは，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}\Big[(x-\alpha)(x-\beta)^2\Big]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\alpha}^{\beta}$

$$=-\frac{1}{6}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$

を用いたが，よく覚えていなければ，下記のように単純に計算すれば良い。

$$\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right\}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{19}{24}$$

$\boxed{3}$ (30点)

n を 2 以上の整数とする．1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている．このとき操作 (*) を $k=1,\cdots,\ n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(*) 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる．

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる．このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ．

＜解答＞

番号 n の箱から取り出した球を番号 1 の箱に戻す。

したがって，番号 n の箱から取り出した玉の色が番号 1 の箱から取り出した玉と同色であれば，番号 1 の箱に異色の玉，すなわち赤玉と白玉が 1 個ずつ入ることになる。

番号 n の箱から番号 1 の箱から取り出した球と同色の玉を取り出す確率を p_n とする。

この事象は下の２つの排反事象のいずれかである。

番号 $n-1$ の箱から同色の玉を取り出し，n の箱から確率 $\frac{2}{3}$ で同色の玉を取り出す事象

確率は $p_{n-1}\times\frac{2}{3}$

番号 $n-1$ の箱から異色の玉を取り出し，n の箱から確率 $\frac{1}{3}$ で同色の玉を取り出す事象

確率は $(1-p_{n-1})\times\frac{1}{3}$

したがって，$p_n=p_{n-1}\times\frac{2}{3}+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1+p_{n-1})$

この確率漸化式を変形して，$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，$\therefore\ p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(p_2-\frac{1}{2}\right)$

$p_2=\frac{2}{3}$ だから，$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ （答）

＜解説＞

(*) の操作による n 個の箱の中の赤玉，白玉の状態の場合の数を求めようとしても，なかなか難しい。ここは解答方針に着想が必要だ。(*) の操作で，最後に玉が番号 1 の箱に戻ったとき，赤玉と白玉が 1 個ずつ入っているということは，箱 n（ n 番目の箱） から出て箱 1 に入った玉の色が箱 1 を出た玉の

色と同じだということに気づきたい。

この問題は，箱 n から取り出す玉の色が箱 1 から取り出す玉の色と同色になる確率を求める問題に置き換えられる。箱 n の玉は赤玉白玉1個ずつに箱 $n-1$ からの玉が加わって 3 個になっている。つまり，玉を取り出す前の箱 n の玉の状態は箱 $n-1$ から赤玉か白玉かを取り出す事象にのみ依存している。すると，箱 n から同色の玉を取り出す確率は箱 $n-1$ から同色の玉を取り出す確率によって表現できそうと気づく。

箱 $n-1$ から箱 1 から取り出した球と同色の玉を取り出す事象と異色の玉を取り出す事象は余事象だから，前者の確率を p_{n-1} とすれば後者の確率は $1-p_{n-1}$ である。

箱 1 から箱 2 に白玉が移れば，箱 2 には赤玉 1 個，白玉 2 個存在するから，箱 2 から同色（すなわち白玉）を取り出す確率は $\dfrac{2}{3}$ である。ゆえに $p_2=\dfrac{2}{3}$ であることは容易にわかる。

$\boxed{4}$ (30点)

空間の 8 点

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(1,2,0)$，$\mathrm{C}(0,2,0)$，

$\mathrm{D}(0,0,3)$，$\mathrm{E}(1,0,3)$，$\mathrm{F}(1,2,3)$，$\mathrm{G}(0,2,3)$

を頂点とする直方体 OABC−DEFG を考える．点 O，点 F，辺 AE 上の点 P，および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする．このとき，四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および Q の座標を求めよ．また，そのときの S の値を求めよ．

<解答>

$\mathrm{P}(1,0,p)$，$\mathrm{Q}(0,2,q)$とする。p，q は $0\leqq p,\ q\leqq 3$ なる実数である。

$\overrightarrow{OP}=(1,0,p)$，$\overrightarrow{OQ}=(0,2,q)$，$\overrightarrow{OF}=(1,2,3)$

O， F， P，Qは同一平面上にあるから，$\overrightarrow{OF}=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OQ}$，すなわち

$(1,2,3)=(\alpha,0,\alpha p)+(0,2\beta,\beta q)$，$\therefore\ \alpha=\beta=1$，$p+q=3$

$\overrightarrow{PF}=(0,2,3-p)=(0,2,q)=\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{QF}=(1,0,3-q)=(1,0,p)=\overrightarrow{OP}$

したがって，四角形 OPFQ は平行四辺形

$S=2\times\triangle\mathrm{OPF}$ の面積 $=\mathrm{OP{\cdot}OF}\sin\angle POF=\mathrm{OP{\cdot}OF}\sqrt{1-(\cos\angle POF)^2}$

$$=\mathrm{OP{\cdot}OF}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{OP\cdot OF}\right)^2}=\sqrt{14(1+p^2)}\sqrt{1-\frac{(1+3p)^2}{14(1+p^2)}}=\sqrt{5p^2-6p+13}$$

$$=\sqrt{5\left(p-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{56}{5}}\geqq\frac{2\sqrt{70}}{5}$$

ただし，$\mathrm{OP}=\sqrt{1+p^2}$，$\mathrm{OF}=\sqrt{14}$，$\overrightarrow{OP}{\cdot}\overrightarrow{OF}=1+3p$

S は $p=\dfrac{3}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{2\sqrt{70}}{5}$ （答）

このとき点 P の座標は $\left(1,0,\dfrac{3}{5}\right)$，点 Q の座標は $(0,2,q)=\left(0,2,\dfrac{12}{5}\right)$ （答）

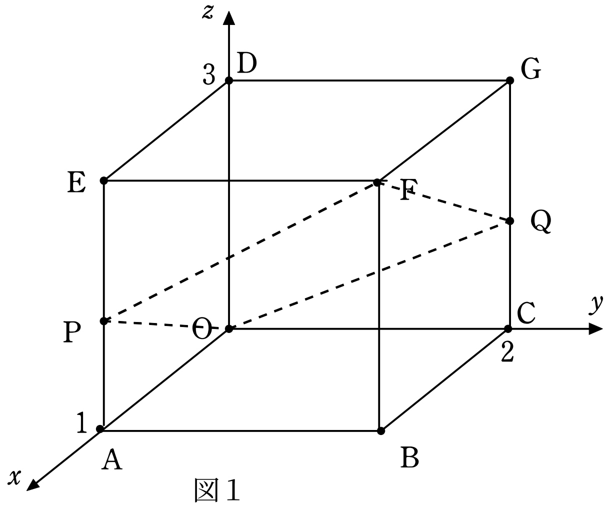

図１

＜解説＞

図１のような図を描いて考察する。同一平面上にあるということを数学的に表現するために，ベクトルの合成を用いることを直ぐに気づきたい。四角形 OPFQ が平行四辺形になることを確認すれば，四角形の面積を迅速に求めることにつながる。

$\boxed{5}$ (30点)

p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ.

＜解答＞

p は $3m-1$，$3m$，$3m+1$のいずれかである。ただし $m=1, 2, 3, \cdots$

$p=3m$ のとき，p が素数となるのは$p=3$ のみ。

$p^4+14=95=19\times 5$ となって素数ではない。

$p=3m-1$ のとき，p は２，５のように素数になる場合がある。

$p^4+14=(3m-1)^4+14=\{(3m)^4-4(3m)^3+4(3m)^2-4\cdot 3m+1\}+14=3(n+5)$，$n$ は自然数

したがって，p^4+14 は素数ではない。

$p=3m+1$ のとき，p は7，13 のように素数になる場合がある。

$p^4+14=(3m+1)^4+14=\{(3m)^4+4(3m)^3+4(3m)^2+4\cdot 3m+1\}+14=3(n+5)$，$n$ は自然数

したがって，p^4+14 は素数ではない。

以上によって，p が素数であれば，p^4+14 は素数ではない。

＜解説＞

素数ではないことを示すためには，p^4+14 を自然数の積で表現できればよい。しかし，なかなかうまくいかない。p として，具体的な表式を考えて，p^4+14 が素数かどうか評価してみよう。

$p=2$，３，５，７などの素数では確かに p^4+14 は非素数である。ところが $p=4$，６などの非素数でも非素数である。$p=9$ ならどうか。やはり非素数である。

ここで，オヤッと思う。p が素数でも非素数でも p^4+14 は非素数である。題意からして，p が素数なら p^4+14 は非素数，p が非素数なら p^4+14 は素数と無意識のうちに考えていたことに気づく。

ここで，解答方針を再考することになる。p が素数か非素数かで，p^4+14 が素数か非素数かを評価するのではうまくいかない。そこで，p を別の観点から分類したとき，特定の分類に含まれる p が素数かつ p^4+14 が非素数になるのではないかと考えるのである。

数学 A の教科書に「**整数についての事柄を証明するとき，整数をある正の整数で割った余りで分類して考えるとよいことがある。**」と記載がある。

自然数 p を分類する方法として最も単純なものは 2 で割ったとき余りが 0（偶数）か 1（奇数）かである。2 を除いて，素数は全て奇数である。そこで，p が 2 あるいは奇数であれば，p^4+14 は非素数であることを証明できれば，解答にいたる。

$p=2$ のとき，$p^4+14=16+14=30$，非素数

$p=2m+1$，$m=1,2,\cdots$ とする。

$p^4+14=(2m+1)^4+14=\{(2m)^4+4(2m)^3+6(2m)^2+4(2m)+1\}+14=2n+15$

素数か非素数か判断困難，ということで p を偶数か奇数かで分類してもうまくいかない。

次に単純な分類法は 3 で割ったときの余りが 0，1，2 の場合である。ということで，上記の解答にいたる。ここでは，$p=3m\pm1$ のとき，p^4+14 が素数か否かを判断するために 具体的に計算を行い 3 の倍数になることを確かめた。しかし合同式の考え方を利用すれば容易である。

$p=3m\pm1\equiv\pm1 \pmod 3$，すると $p^4=(3m\pm1)^4\equiv1 \pmod 3$，$14\equiv2 \pmod 3$ だから，$p^4+14\equiv1+2\equiv0 \pmod 3$ となって，p^4+14 は 3 の倍数であり，非素数である。

文系受験者は合同式に習熟していないと思い，解答では記載しなかった。

＜文系総評＞

例年通り，文系といえども手強い問題が揃っている。

$\boxed{1}$

整数の 10 進法，2 進法，4 進法の表現と計算の問題。習熟が十分でなくとも，難しい問題ではないので，確実に得点したい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

絶対値記号に入った2次関数の定積分の問題。難しい問題ではないので，確実に得点したい。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$

確率の問題。確率漸化式に至る着想が重要で，容易ではない。計算は容易である。難易度はＡ－。

$\boxed{4}$

空間図形とベクトルの問題。難易度は標準レベルでＢ。

$\boxed{5}$

数学Aの教科書に記載の整数の分類について的確に学習していれば，解答の方針を着想できるだろう。しかし文系の問題としては，難しいと感じる。難易度はＡ。

230825