令和3年度（2021年度）共通テスト　数学Ⅰ・数学A　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A]　（いずれか選択　100点，70分）

数学Ⅰ・数学A

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

[１]

(1) ア２　イ５　ウ２　(2) エ５　オカ65　キ４　ク５　ケコ65　サ２　シ６　(3) ス３

[２]

(1) セ４　ソ５　タチ12　ツテ12　(2) ト２　ナ０　ニ１　(3) ヌ３　(4) ネ２　ノ２　ハ０　ヒ３

＜解説＞

[１]

cを正の整数とする。xの2次方程式

$$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0 \quad ①$$

について考える。

(1)

$c=1$のとき，①の左辺を因数分解すると

$2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)=$（アx＋イ)(x−ウ)

であるから，①の解は

$x=-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{イ}{ア}$，$2=$ウ

(2)

$c=2$のとき，①は$2x^2+5x-5=0$，したがって解は

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-5)}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}=\frac{-エ\pm\sqrt{オカ}}{キ}$$

大きい方の解をαとすると

$$\frac{5}{\alpha}=\frac{5}{(-5+\sqrt{65})/4}=\frac{20}{\sqrt{65}-5}=\frac{20(\sqrt{65}+5)}{(\sqrt{65}-5)(\sqrt{65}+5)}=\frac{5+\sqrt{65}}{2}=\frac{ク+\sqrt{ケコ}}{サ}$$

また，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$を満たす整数mは，$m<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}=\dfrac{5+8.0**}{2}=6.5**<m+1$だから，

mは$6=$シ

(3)

①の解が異なる二つの有理数であるような正の整数cの個数を考える。

２次方程式の解の公式の根号の中に注目する。

根号の中の式は$(4c-3)^2-4\times2\times(2c^2-c-11)=16c^2-24c+9-16c^2+8c+88=-16c+97>0$

$\therefore 0<c<\dfrac{97}{16}\fallingdotseq 6.1$，したがって，$c=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$-16c+97=81,\ 65,\ 49,\ 33,\ 17,\ 1$

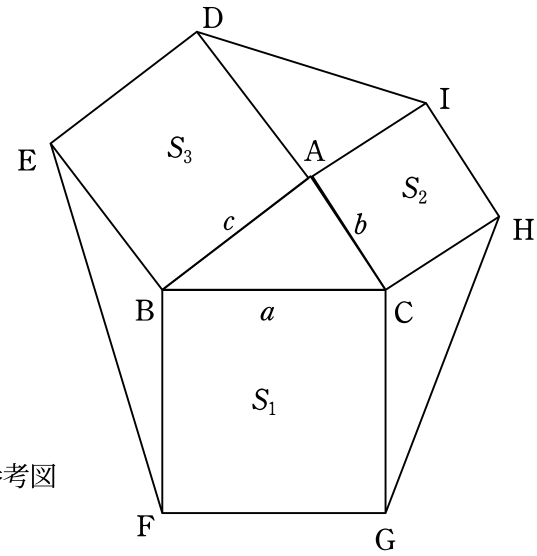
$\sqrt{-16c+97}=9,\ \sqrt{65},\ 7,\ \sqrt{33},\ \sqrt{17},\ 1$　となって無理数にならないcは1，3，6 の 3＝ス個

コメント：

(3)では，解の公式の根号の中がpを正の実数として，$\sqrt{p^2}=p$となれば，解は異なる二つの有理数となる。

［2］

参考図のように，△ABCの外側に辺AB，BC，CAをそれぞれ１辺とする正方形ADEB，BFGC，CHIAをかき，２点EとF，GとH，IとDをそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{CAB}=A$，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$とする。



参考図

(1)

$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$のとき，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$

△ABCの面積は$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=\dfrac{1}{2}cb\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\dfrac{4}{5}=12=$タチ

△AIDの面積は$\dfrac{1}{2}cb\sin(\pi-A)=\dfrac{1}{2}cb\sin A=12=$ツテ

(2)

正方形BFGC，CHIA，ADEBの面積をそれぞれS_1，S_2，S_3とする。

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$から，$S_1-S_2-S_3=-2bc\cos A$だから

$S_1-S_2-S_3$は，

- $0°<A<90°$のとき，ト② 負の値である。
- $A=90°$のとき，ナ⓪ 0である。
- $90°<A<180°$のとき，ニ① 正の値である

(3)

△AID，△BEF，△CGHの面積をそれぞれT_1，T_2，T_3とする。

△AIDの面積は$T_1=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-A)=\frac{1}{2}bc\sin A$となり，△ABCの面積に等しい。同様に

$T_2=\frac{1}{2}ca\sin(\pi-B)=\frac{1}{2}ca\sin B$となり，△ABCの面積に等しい。

$T_2=\frac{1}{2}ab\sin(\pi-C)=\frac{1}{2}ab\sin C$となり，△ABCの面積に等しい。

したがって，ヌ ③ a，b，c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3$

(4)

△ABC，△AID，△BEF，△CGHのうち，外接円の半径が最も小さいものを求める。

正弦定理から，△ABCの外接円の半径 $\times 2=\frac{BC}{\sin A}$，

$$\triangle \mathrm{AID}\text{の外接円の半径 } \times 2=\frac{ID}{\sin(\pi-A)}=\frac{ID}{\sin A}$$

$0°<A<90°$のとき，$180°-A>A$だから，ID > BCであるから，

（△AIDの外接円の半径） >（△ABCの外接円の半径）

したがって，外接円の半径が最も小さい三角形は

- $0°<A<B<C<90°$ のとき，△ABCの外接円の半径 ⓪＝ハ
  なぜなら，ID > BC，EF>AC，GH>ABだから，△ABCの外接円の半径が最小
- $0°<A<B<90°<C$ のとき，△CGHの外接円の半径 ③＝ヒ
  なぜなら，GH<ABだから，（△CGHの外接円の半径） <（△ABCの外接円の半径）

コメント：

参考図を見て、問題文を読んだとき，余弦定理，正弦定理を活用する問題，ということに気づきたい。(1)で（△AIDの面積）＝（△ABCの面積）から，△BEF，△CGHの面積もまた△ABCの面積に等しいことに気づきたい。

第２問（必答問題 ）（配点 30）

<解答>

[１]

(1) ア 2　(2) イウ −2　エオ 44　カ 2　キク 00　ケ 2　コサ 20　シ 4　スセ 40　ソ 3

[２]

(1) タ 1　チ 3　（解答の順序は問わない）　(2) ツ 1　テ 4　(3) ト 5　(4) ナ 2

<解説>

[１](1)

ストライドをx，ピッチをzとおく。ストライドは１歩あたりの進む距離（m／歩），ピッチは１秒あたりの歩数（歩／秒）なので，１秒あたりの進む距離すなわち平均速度は，xとzを用いて②xz＝ア (m／秒)と表される。

これより，タイムと，ストライド，ピッチとの関係は

$$\text{タイム}=\frac{100}{xz}=\frac{100}{\text{ア}} \quad ①$$

と表されるので，xzが最大になるときタイムが最もよくなる。ただし，タイムがよくなるとは，タイムの値が小さくなることである。

(2)

男子短距離走の選手である太郎さんは，①に着目してタイムが最もよくなるストライドとピッチを考えることにした。

次の表は，太郎さんが練習で100 mを３回走ったときのストライドとピッチのデータである。

	1回目	2回目	3回目
ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50

また，ストライドとピッチにはそれぞれ限界がある。太郎さんの場合，ストライドの最大値は2.40，ピッチの最大値は4.80である。

太郎さんは，上の表から，ストライドが0.05大きくなるとピッチが0.1小さくなるという関係があると考えて，ピッチがストライドの１次関数として表されると仮定した。このとき，ピッチzはストライドxを用いて$z=ax+\frac{b}{5}$とおけば，上記の表から

$x=2.05$のとき$z=4.70$だから，$4.70=2.05a+\frac{b}{5}$　(*)

$x=2.15$のとき$z=4.50$だから，$4.50=2.15a+\frac{b}{5}$　(**)

(*)，(**) から $a=-2$，$b=44$，したがって $z=-2x+\frac{44}{5}=$イウ$x+\frac{\text{エオ}}{5}$　②

②が太郎さんのストライドの最大値2.40とピッチの最大値4.80まで成り立つと仮定すると，xの値の範囲は次のようになる。

$z\leqq 4.80$のとき，②は $-2x+\frac{44}{5}\leqq 4.80$ だから，$2.00\leqq x$

したがって，カ．キク＝ $2.00\leqq x\leqq 2.40$

$y=xz$に②を代入すると，$y=-2x^2+\frac{44}{5}x$となり，yをxの関数として表すことができる。

太郎さんのタイムが最もよくなるストライドとピッチを求めるためには，$2.00\leqq x\leqq 2.40$の範囲でyの値を最大にするxの値を見つければよい。

$y=-2x^2+\frac{44}{5}x=-2\left(x-\frac{11}{5}\right)^2+2\times\left(\frac{11}{5}\right)^2$

したがって，$x=\frac{11}{5}=2.20=$ケ．コサのときyの値が最大になる。

このときピッチは②から，$z=-2x+\frac{44}{5}=-2\times 2.20+\frac{44}{5}=4.40=$シ．スセ

また，このときの太郎さんのタイムは①により$\frac{100}{xz}=\frac{100}{2.2\times 4.4}=10.33=$③ソ

コメント：

陸上競技の100m走でのタイムについてストライドx（歩幅，１歩あたりの進む距離）とピッチz（１秒あたりの歩数）の関数として考察させ，最もタイムのよくなる（最もタイムの値が小さくなる）ストライドとピッチを求める問題である。

ストライドx × ピッチz は１秒当たりの進む距離y になるので，$y=xz$が最大になるときタイムが最もよくなる。ピッチzはストライドxの１次関数として表されるとすると，１秒当たりの進む距離yはxの２次関数となり，２次関数の最大値問題に帰着する。

数学的には容易な問題だから，長文を読み解き，最もタイムがよくなることを，ストライドとピッチの関係として，迅速に把握したい。

[２] (1)

次の⓪～⑤のうち，図１から読み取れることとして正しくないものは タ①とチ③である。

⓪　第１次産業の就業者数割合の四分位範囲は，2000年度までは，後の時点になるにしたがって減少している。→　正しい（箱の幅が小さくなっている）。

①　第１次産業の就業者数割合について，左側のひげの長さと右側のひげの長さを比較すると，どの時点においても左側の方が長い。→　正しくない（2000年度以降は右側の方が長い）。

②　第２次産業の就業者数割合の中央値は，1990年度以降，後の時点になるにしたがって減少している。→　正しい。

③　第２次産業の就業者数割合の第１四分位数は，後の時点になるにしたがって減少している。
→　正しくない（1975から1980年度では増加している）。

④　第３次産業の就業者数割合の第３四分位数は，後の時点になるにしたがって増加している。
→　正しい。

⑤　第３次産業の就業者数割合の最小値は，後の時点になるにしたがって増加している。
→　正しい。

(2)

(1)で取り上げた８時点の中から５時点を取り出して考える。各時点における都道府県別の，第１次産業と第３次産業の就業者割合を一つのグラフにまとめてかいたものが，次ページの五つのグラフである。

・1985年度におけるグラフはツ①である。

理由：1985年度の箱ひげ図から，第１次産業は0～26％まで，第３次産業は45～69％までの割合にわたる。これを満たすのは①

・1995年度におけるグラフはテ④である。

理由：1995年度の箱ひげ図から，第１次産業は0～17％まで，第３次産業は51～74％までの割合にわたる。これを満たすのは②，④であるが，60％までに半数以上入るのは④。

(3)

三つの産業から二つずつを組み合わせて都道府県別の就業者数割合の散布図を作成した。
図２の散布図群は，左から順に1975年度における第１次産業（横軸）と第２次産業（縦軸），第２次産業（横軸）と第３次産業（縦軸），第３次産業（横軸）と第１次産業（縦軸）の散布図である。
図３は同様にして作成した2015年度の散布図である。

下の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は，1975年度を基準としたときの，2015年度の変化を記述したものである。ただし，ここで「相関が強くなった」とは，相関係数の絶対値が大きくなったことを意味する。

(Ⅰ) 都道府県別の第１次産業の就業者数割合と第２次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。

→ 誤り（1975年度には負の相関が見られたのに，2015年度にはほとんど見られない）

(Ⅱ) 都道府県別の第２次産業の就業者数割合と第３次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。

→ 正しい（相関がほとんど見られなかったが，負の相関が見られるようになった）

(Ⅲ) 都道府県別の第３次産業の就業者数割合と第１次産業の就業者数割合の間の相関は強くなった。

→ 誤り（負の相関が弱まった）

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組み合わせとして正しいものはト⑤である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

(4)

図４は，2015年度における都道府県別の，第１次産業の就業者割合（横軸）と，男性の就業者割合（縦軸）の散布図である。

男性の就業者数と女性の就業者数を合計すると就業者数の全体になることに注意すると，第１次産業の就業者割合（横軸）と，女性の就業者割合（縦軸）の散布図はナ②である。

理由：あるべき散布図は横軸は同じで，縦軸は $100-y$ である。ちょうど図４を縦方向に逆さまにしたもの。さらに，左端に2点，右端に1点データが存在しなければならない。これらの特徴を満たすのは②のみである。

コメント：

データ分析の問題では，箱ひげ図，ヒストグラム，散布図などのグラフの特徴を把握して，適切な解答を準備する。例年と違い，統計数式の処理に関わる出題はなかったので，速やかに解答したい。

(2)テは誤り易い。ヒストグラム②と④の違いが微妙である。(3)の散布図で，負の相関が強まるとは，相関係数は負であるが，絶対値は大きくなる（すなわち相関が強まる）ことに注意したい。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1) ア 3　イ 8　ウ 4　エ 9　オカ 27　キク 59　ケコ 32　サシ 59　　(2) ス 3

(3) セソタ 216　チツテ 715　　(4) ト 8

＜解説＞

中にくじが入っている箱が複数あり，各箱の外見は同じであるが，当たりくじを引く確率は異なっている。くじ引きの結果から，どの箱からくじを引いた可能性が高いかを，条件付き確率を用いて考えよう。

(1)

当たりくじを引く確率が$\frac{1}{2}$である箱Aと，当たりくじを引く確率が$\frac{1}{3}$である箱Bの二つの箱の場合を考える。

(ｉ) 各箱で，くじを１本引いてはもとに戻す試行を３回繰り返したとき

箱Aにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は

各回でのみ当たりくじを引く確率は$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$，これが３回あるので $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3=\frac{3}{8}=\frac{ア}{イ}$　①

箱Bにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は

各回でのみ当たりくじを引く確率は$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$，これが３回あるので $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 3=\frac{4}{9}=\frac{ウ}{エ}$　②

(ⅱ) まず，AとBのどちらか一方の箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを１本引いてはもとに戻す試行を３回繰り返したところ，３回中ちょうど１回当たった。このとき，箱Aが選ばれる事象をA，箱Bが選ばれる事象をB，３回中ちょうど１回当たる事象をWとすると

$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{ア}{イ}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$，$P(B\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{ウ}{エ}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{3}{16}+\frac{2}{9}=\frac{59}{144}$

３回中ちょうど１回当たったとき，選んだ箱がAである条件付き確率$P_W(A)$は

$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{3}{16}\div\frac{59}{144}=\frac{27}{59}=\frac{オカ}{キク}$

また，選んだ箱がBである条件付き確率$P_W(B)$は，同様に

$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\frac{2}{9}\div\frac{59}{144}=\frac{32}{59}=\frac{ケコ}{サシ}$

(2) (1)の$P_W(A)$と$P_W(B)$について，次の事実（＊）が成り立つ。

事実（＊）：$P_W(A)$と$P_W(B)$のスは，①の確率と②の確率のスに等しい。ス＝③比

なぜなら，$P_W(A)／P_W(B)=P(A\cap W)／P(B\cap W)=$①／②

スの解答群

⓪ 和　① ２乗の和　② 3乗の和　③ 比　④ 積

(3)

上記の箱A，箱B，当たりくじを引く確率が$\frac{1}{4}$である箱Cの三つの箱の場合を考える。まず，A，B，Cのうちどれか一つの箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを１本引いてはもとに戻す試行を３回繰り返したところ，３回中ちょうど１回当たった。

このとき選んだ箱がAである条件付き確率を求める。

箱Cにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は，$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\times 3=\frac{27}{64}$

したがって，$P(C\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{27}{64}=\frac{9}{64}$

また，$P(A\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$，$P(B\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$

したがって，$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)=\frac{1}{8}+\frac{4}{27}+\frac{9}{64}=\frac{715}{1728}$

したがって，選んだ箱がAである条件付き確率は $P(A\cap W)／P(W)=\frac{1}{8}\div\frac{715}{1728}=\frac{216}{715}=\frac{セソタ}{チツテ}$

(4)

箱が三つの場合でも，条件付き確率の比は各箱で３回中ちょうど１回当たりくじを引く確率の比になる。上記の箱A，B，Cに，当たりくじを引く確率が$\frac{1}{5}$の箱Dを加えた四つの箱の場合を考える。

まず，A，B，C，Dのうちどれか一つの箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを１本引いてはもとに戻す試行を３回繰り返したところ，３回中ちょうど１回当たった。このとき，条件付き確率を用いて，どの箱からくじを引いた可能性が高いかを考える。

箱Dにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は，$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^2\times3=\frac{48}{125}$

各箱において，３回中ちょうど１回当たる確率は

箱A：$\frac{3}{8}=0.375$，　箱B：$\frac{4}{9}=0.444$，　箱C：$\frac{27}{64}=0.422$，　箱D：$\frac{48}{125}=0.384$

(2)，(3)の考察において，選んだ箱の条件付き確率の比は各箱の３回中ちょうど１回当たる確率の比に等しいから，その選んだ可能性の高い順に並べると，ト⑧　B，C，D，A

コメント：

センター試験でも選択問題として，「場合の数と確率」から出題されてきた。今回は，確率の問題としては，難しいものではないが，太郎さんと花子さんの会話の中から，次の設問で踏まえるべき事実を読み解くことが必要となる。また条件付き確率は頻出だから，的確に理解しておこう。

$\boxed{\text{第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。}}$

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア２　イ３　(2) ウ３　エ５　オ４　カ４　キ８　(3) ク１　ケ４　コ５　(4) サ３　シ６

＜解説＞

円周上に15個の点P_0，P_1，・・・，P_{14} が反時計回りに順に並んでいる。最初，点P_0に石がある。さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに５個先の点に移動させ，奇数の目が出たら石を時計回りに３個先の点に移動させる。この操作を繰り返す。例えば，石が点P_5にあるとき，さいころを投げて6の目が出たら石を点P_{10}に移動させる。次に，5の目が出たら点P_{10}にある石を点P_7に移動させる。

(1)

さいころを５回投げて，偶数の目が2＝ア回，奇数の目が3＝イ回出れば，点P_0にある石を点P_1に移動させることができる。このとき，$x=2$，$y=3$ は，不定方程式 $5x-3y=1$ の整数解になっている。

(2)

不定方程式

$5x-3y=8$ ① のすべての整数解 x, y を求める。上の検討から

$5\times2-3\times3=1$ だから，両辺を８倍して$5\times2\times8-3\times3\times8=1\times8$ ②

①−②より，$5(x-2\times8)-3(y-3\times8)=0$，5と3 は互いに素

したがって，kを整数として，$(x-2\times8)=3k$，$(y-3\times8)=5k$

したがって，①のすべての整数解 x, y は

$x=2\times8+3k=16+$ウk，$y=3\times8+5k=24+$エk

①の整数解x, y の中で，$0\leqq y<5$ を満たすものは，$0\leqq24+5k<5$,

$\therefore -\dfrac{24}{5}\leqq k<-\dfrac{19}{5}$，したがって$k=-4$, $x=4=$オ，$y=4=$カ

したがって，さいころを4+4=8＝キ回投げて，偶数の目が4 回，奇数の目が4 回出れば，点P_0 にある石を点P_8 に移動させることができる。

(3)

(2)において，さいころを8 回より少ない回数だけ投げて，点P_0 にある石を点P_8 に移動させることはできないだろうか。

（＊）石を反時計回りまたは時計回りに15個先の点に移動させると元の点に戻る。

（＊）に注意すると，$x=4$ということは4×5=20個先の点に移動させているので，元の点に戻って，20−15=5個先の点に移動させていることである。すなわち$x=1$と同じ。

すると，偶数の目が1＝ク回，奇数の目が4＝ケ回出れば，さいころを投げる回数が1+4=5＝コ回で，点P_0 にある石を点P_8 に移動させることができる。このとき，コ＝5<8＝キである。

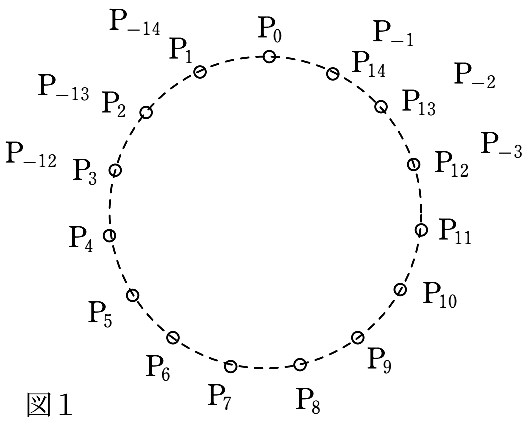


図１

(4)

点 P_1，P_2，･･･，P_{14} のうちから点を一つ選び，点P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる。そのために必要となる，さいころを投げる最小回数を考える。例えば，さいころを１回投げて点P_0 にある石を点P_2 に移動させることはできないが，さいころを２回投げて偶数の目と奇数の目が１回ずつ出れば，点P_0 にある石を点P_2 へ移動させることができる。したがって，点P_2 を選んだ場合には，この最小回数は２回である。

点P_1，P_2，･･･，P_{14}のうち，この最小回数が最も大きいのは点サ＝③P_{13} であり，その最小回数はシ＝6回である。

サの解答群

⓪ P_{10}　① P_{11}　② P_{12}　③ P_{13}　④ P_{14}

点P_0にある石をn個先の点P_nに移動させるために必要な偶数の目の回数x，奇数の目の回数yは上記と同様の考察によって，不定方程式　$5x-3y=n$　③　の整数解である。

その一つの解は　$5\times 2n-3\times 3n=n$　④

③－④から，$5(x-2n)-3(y-3n)=0$，したがってkを整数として，

③のすべての整数解x，yは $x=2n+3k$，$y=3n+5k$　⑤

$n=10$～14に対して，⑤を適用し，yが最も小さくなるように考えると，xも最小になる。

P_{10}：$x=20+3k$，$y=30+5k$，$k=-6$で$x=2$，$y=0$

P_{11}：$x=22+3k$，$y=33+5k$，$k=-6$で$x=4$，$y=3$，しかるに$x=3$でP_0に戻るから，$x=1$，$y=3$

P_{12}：$x=24+3k$，$y=36+5k$，$k=-7$で$x=3$，$y=1$，しかるに$x=3$でP_0に戻るから，$x=0$，$y=1$

P_{13}：$x=26+3k$，$y=39+5k$，$k=-7$で$x=5$，$y=4$，しかるに$x=3$でP_0に戻るから，$x=2$，$y=4$

P_{14}：$x=28+3k$，$y=42+5k$，$k=-8$で$x=4$，$y=2$，しかるに$x=3$でP_0に戻るから，$x=1$，$y=2$

したがって，サの解答群の中でさいころ投げの最小回数が最も大きい点は ③P_{13}で，その最小回数は$2+4=6$回＝シである。

反時計回りにP_0，P_1，P_2，･･･，P_{14}の15個の点が円環状に配置されているが，時計回りに，P_0，P_{-1}，P_{-2}，･･･，P_{-14}と配置され，$P_n=P_{n-15}$として扱うと容易になる。

P_{10}：$10=5\times 2$，したがって，$x=2$，合計２回投げ

P_{11}：P_{-4}と同一点，$-4=5\times 1-3\times 3$，したがって，$x=1$，$y=3$，合計４回投げ

P_{12}：P_{-3}と同一点，$-3=-3\times 1$，したがって，$y=1$，合計１回投げ

P_{13}：P_{-2}と同一点，$-2=5\times 2-3\times 4$，したがって，$x=2$，$y=4$，合計６回投げ

P_{14}：P_{-1}と同一点，$-1=5\times 1-3\times 2$，したがって，$x=1$，$y=2$，合計３回投げ

コメント：

不定方程式とその応用に関する問題。応用対象が身の回りにある事象ではなく，モデル事象であるが，不定方程式を考える上では良い事例になっていると思う。

(1)，(2)はこの事例における不定方程式の通常の問題である。(2)，(3)はこの事例における応用問題である。さいころの目の偶奇によって石の移動数を決め，円環状に配置された点P_0，P_1，P_2，･･･，P_{14}を決定する問題を不定方程式によって解くわけである。

$\boxed{\text{第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。}}$

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

ア３　イ２　ウ３　エ５　オ２　カ２　キ５　ク５　ケ５　コ５　サ４　シ１　ス５　セ５　ソ２　タ１

<解説>

問題文を読みつつ，図１のような図を描いて考える。

△ABCは，AB=3，BC=4，AC=5だから，$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$となり直角三角形である。

∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとすると，DはBCをAB：ACに内分する点だから，

$$BD=\frac{3}{3+5}\times 4=\frac{3}{2}=\frac{ア}{イ},\ AD=\sqrt{(AB)^2+(BD)^2}=\sqrt{9+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$$

また，∠BACの二等分線と△ABCの外接円Oとの交点で点Aとは異なる点をEとする。

△AECに着目すると，ACは外接円の直径だから△AECは直角三角形で，△AEC ∽ △ABD

$$\therefore AE=AB\times\frac{AC}{AD}=3\times\frac{5}{3\sqrt{5}/2}=2\sqrt{5}=カ\sqrt{キ}$$

△ABCの２辺AB，ACの両方に接し，外接円Oに内接する円の中心をPとする。円Pの半径をrとする。さらに円Pと外接円Oとの接点をFとし，直線PFと外接円Oとの交点で点Fとは異なる点をGとする。円PとABの接点をHとすれば，このとき

△APH∽△ABDだからAP：AD=HP：BD，$AP=\frac{AD}{BD}\times HP=\sqrt{5}r=\sqrt{ク}\,r$

また，$PG=FG-PF=5-r=ケ-r$,

方べきの定理により，AP･PE=FP･PG，$\sqrt{5}r\times(2\sqrt{5}-\sqrt{5}r)=r(5-r)$，$\therefore r=\frac{5}{4}=\frac{コ}{サ}$

△ABCの内心をQとする。

内接円の半径は，$\frac{\text{三角形の面積}}{\text{辺長の和}}\times 2=\frac{\triangle ABC\text{の面積}}{AB+BC+AC}\times 2=\frac{6}{12}\times 2=1=シ$

$AQ=\sqrt{5}\times\text{内接円の半径}=\sqrt{5}=\sqrt{ス}$

また，$AH=\sqrt{(AP)^2-(PH)^2}=\sqrt{(\sqrt{5}r)^2-r^2}=2r=\frac{5}{2}=\frac{セ}{ソ}$

以上から，点H に関する次の(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものはタ①である

(a) 点Hは３点B，D，Qを通る円の周上にある。：正しい

$AH\cdot AB=\frac{5}{2}\times 3$，$AQ\cdot AD=\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}$，∴ AH･AB=AQ･AD，方べきの定理が成立する。

(b) 点Hは３点B，E，Qを通る円の周上にある。：誤り

$AQ\cdot AE=\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=10$，∴ AH･AB≒AQ･AE，方べきの定理が成立しない。

タの解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

コメント：

まず「△ABCにおいて，AB=3，BC=4，AC=5」という記述から，△ABCは直角三角形ということに気づきたい。

図形の問題では，題意を的確に把握するためには，図を描くことが欠かせない。本問では，外接円，内接円に加えて，外接円と２辺に内接する円の３つを扱う必要がある。そのため，図がやや複雑になるので，注意が必要である。

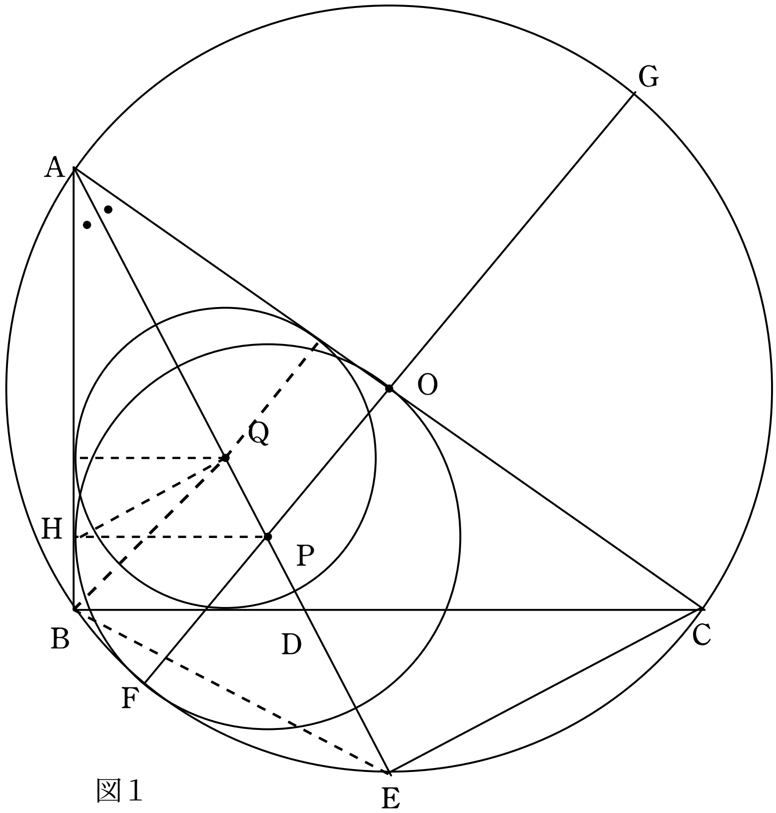


図１

＜総評＞

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった初年度である。知識，技能の修得に加え，思考力，判断力，表現力を高める高校教育をめざすということで，共通テストもそのような学力を問うものへと変わろうとしている。具体的には，どのような変化があるのかは，２度行われた試行テストによって概ね想定ができた。

実際に初めての共通テスト数学Ⅰ･数学Aでは数学的な問題解決の過程を重視すること，日常の事象の中の数学的課題を扱うこと，数式，図表，グラフなどの理解や活用を深めること，などを指向した問題へと変化が見られたように思う。特に第２問［１］，第３問，第４問にその傾向が表れている。

そのため，数学問題として扱うに至るまでの過程が長くなり，問題理解に至る思考と時間をより多く必要とするようになったと思われる。解答時間が60分から70分へと10分長くなったことも肯ける。

210125