令和3年度（2021年度）共通テスト　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ]　（いずれか選択　100点，60分）

数学Ⅱ・数学Ｂ

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］

⑴ ア３　イ２　ウ６　エ２　　⑵ オ２　カ１　キ９　ク１　ケ３　コ１　サ９　シ２　ス１

［２］

⑴ セ１　ソ０　タ０　チ１　ツ５　テ２　　⑵ ト０　ナ３　ニ１　ヌ２　ネ１

＜解説＞

［１］⑴

問題Ａについて考える。

問題Ａ　関数$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{ア}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{ア}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

であるから，三角関数の合成により

$$y=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{ア}\right)$$

と変形できる。よって，y は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{ウ}$で最大値 $\boxed{エ\ 2}$ をとる。

⑵

p を定数とし，次の問題Ｂについて考える。

問題Ｂ　関数$y=\sin\theta+p\cos\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

（ｉ）$p=0$のとき，$y=\sin\theta$，したがって，y は$\theta=\dfrac{\pi}{オ}=\dfrac{\pi}{2}$で最大値 $\boxed{カ\ 1}$ をとる。

（ii）$p>0$のときは，加法定理

$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right)$$

$=\sqrt{キ}(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=\sqrt{⑨}\cos(\theta-\alpha)$　と表すことができる。ただし，αは

$\sin\alpha=\dfrac{ク}{\sqrt{キ}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{①}{\sqrt{⑨}}$，$\cos\alpha=\dfrac{ケ}{\sqrt{キ}}=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{③}{\sqrt{⑨}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

を満たすものとする。$\cos(\theta-\alpha)=1$となるとき，すなわち $\theta=\alpha=コ=①$で，

yは最大値$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{サ}=\sqrt{⑨}$をとる。

(iii) $p<0$のとき，

$-1<\cos\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}<0$ だから，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$y=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$が最大値をとるのは，$|\theta-\alpha|=\alpha-\theta$が最小のとき，

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$だから，$\theta=\dfrac{\pi}{2}=シ=②$で$(\alpha-\theta)$が最小となり，

最大値 $\sqrt{1+p^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sqrt{1+p^2}\sin\alpha=\sqrt{1+p^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}=1=ス=①$　をとる。

コメント：

三角関数の合成の問題。基本的な問題だから，スムーズに解答したい。ただし，(iii)は$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$であることから，$(\alpha-\theta)$が最小となるとき，$y$が最大になることに注意する。

［2］

二つの関数$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$について考える。

(1)

$f(0)=\dfrac{2^0+2^0}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1=セ$，$g(0)=\dfrac{1-1}{2}=0=ソ$

相加平均と相乗平均の関係，$\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x2^{-x}}=1$から，$f(x)$は$x=0=タ$で最小値$1=チ$をとる。

$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$とすれば，$2^x-2^{-x}=-2^2$だから，$(2^x)^2+4\times2^x-1=0$，

$t=2^x$とおけば，$t^2+4t-1=0$，$\therefore\ t=2^x=-2\pm\sqrt{5}$，$2^x>0$だから，$2^x=-2+\sqrt{5}$

したがって，$g(x)=-2$となるxの値は，$x=\log_2(\sqrt{5}-2)=\log_2(\sqrt{ツ}-テ)$

(2)

次の①～④は，xにどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=f(x)=ト⓪$　①

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)=ナ③$　②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\dfrac{2^{2x}+2^{-2x}+2}{4}-\dfrac{2^{2x}+2^{-2x}-2}{4}=\dfrac{4}{4}=1=ニ$　③

$g(2x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=2\times\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\times\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=2f(x)g(x)=ヌf(x)g(x)$　④

(3)

花子さんと太郎さんは，$f(x)$と$g(x)$の性質について論じ，三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えた。このうちつねに成り立つ式はネである。

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ (A)
$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ (B)
$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ (C)
$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)-g(\alpha)g(\beta)$ (D)

(A)～(D)について，$\beta=0$を代入すると，$f(0)=1$，$g(0)=0$だから，
(A)：$f(\alpha)=f(\alpha)g(0)+g(\alpha)f(0)=g(\alpha)$　成立しない。
(B)：$f(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)$　成立する。
(C)：$g(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)$　成立しない。
(D)：$g(\alpha)=f(\alpha)f(0)-g(\alpha)g(0)=f(\alpha)$　成立しない。

したがって，つねに成り立つ可能性のある式はネ①である。下記のように確かにつねに成立する。

$$f(\alpha+\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-(\alpha+\beta)}}{2}$$

$$f(\alpha)f(\beta)=\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}\times\frac{2^{\beta}+2^{-\beta}}{2},\quad g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}\times\frac{2^{\beta}-2^{-\beta}}{2}$$

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}+2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})$$

$$=\frac{1}{4}(2\times2^{\alpha+\beta}+2\times2^{-\alpha-\beta})=\frac{1}{2}(2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})=f(\alpha+\beta)$$

本問題では，確認することまで求められていないので，上記計算は不要である。

コメント：

三角関数に似た振る舞いをする指数関数に関する問題である。相加平均と相乗平均の大小関係，等号が成立するときの条件などは覚えていなければならない。(3)では，花子さんの「・・・，式(A)～(D)に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。」に着目する。

第２問（必答問題）（配点 30）

＜解答＞

(1) ア 3　イ 2　ウ 3　エ 4　オ c　カ b　キ c　クケ $-c$　コ b　サ 3　シ 3　ス 3　セ 0
(2) ソ 5　タ 3　チ 5　ツ d　テ c　ト d　ナ 2　ニヌ $-b$　ネ a　ノ 0　ハヒフ $-2b$　ヘホ $3a$

＜解説＞

(1)

座標平面上で，次の二つの2次関数のグラフについて考える。

$y=3x^2+2x+3$　①
$y=2x^2+2x+3$　②

①，②のグラフの共通点

・y 軸との交点の y 座標は，①，②において$x=0$とおいて，$y=\boxed{ア\ 3}$である。

・y 軸との交点における接線の方程式

①で$y'=6x+2$，したがって接線の方程式 $y=\boxed{イ\ 2}\,x+\boxed{ウ\ 3}$

②で$y'=4x+2$，したがって接線の方程式 $y=\boxed{イ\ 2}\,x+\boxed{ウ\ 3}$

次の⓪～⑤の2次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が
$y=\boxed{イ\ 2}\,x+\boxed{ウ\ 3}$ となるものは $\boxed{エ\ ④}$ である。

⓪ $y=3x^2-2x-3$，y 軸との交点のy 座標は-3だから，×

① $y=-3x^2+2x-3$，y 軸との交点のy 座標は-3だから，×

② $y=2x^2+2x-3$，y 軸との交点のy 座標は-3だから，×

③ $y=2x^2-2x+3$，$y'=4x-2$だから，×

④ $y=-x^2+2x-3$，y 軸との交点のy 座標は-3，$y'=-4x+2$だから，○

⑤ $y=-x^2-2x+3$，$y'=-4x-2$だから，×

a，b，cを0でない実数とする。
曲線 $y=ax^2+bx+c$上の点$(0, \boxed{オ\ c})$における接線をlとすると，$y'=2ax+b$だから，その方程式は
$y=\boxed{カ\ b}\,x+\boxed{キ\ c}$である。

接線 l とx 軸との交点の x 座標は，$y=bx+c$ で，$y=0$として，$\dfrac{クケ}{コ}=\dfrac{-c}{b}$である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 l および直線 $x=\dfrac{-c}{b}$で囲まれた図形の面積をSとすると，

$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}=\frac{ac^{サ}}{シ\ b^{ス}}=\frac{ac^3}{3b^3} \quad ③$$

③において，$a=1$とし，Sの値が一定となるように正の実数b，cの値を変化させる。

このとき，$S=\dfrac{c^3}{3b^3}=$一定だから，$b=\left(\dfrac{1}{3S}\right)^{\frac{1}{3}}c$となって，$b$と$c$は直線関係となり，
したがって，そのグラフの概形は$\boxed{セ\ ⓪}$

(2)

座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y=4x^3+2x^2+3x+5$ ④

$y=-2x^3+7x^2+3x+5$ ⑤

$y=5x^3-x^2+3x+5$ ⑥

④，⑤，⑥のグラフの共通点

・y 軸との交点のy 座標は，④，⑤，⑥において$x=0$として，$\boxed{ソ\ 5}$

・y 軸との交点における接線の方程式 $y=\boxed{タ\ 3}\,x+\boxed{チ\ 5}$

④で$y'=12x^2+4x+3$，⑤で$y'=-8x^2+14x+3$，⑥で$y'=15x^2-2x+3$だから，y 軸との交点$(0, 5)$における接線の傾きは，すべて 3

a，b，c，dを0でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0, \boxed{\text{ツ}\ d})$ における接線の方程式は，$y'=3ax^2+2bx+c$ だから，
$y=\boxed{\text{テ}\ c}\,x+\boxed{\text{ト}\ d}$ である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ とし，$f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$ について考える。
$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2=x^2(ax+b)$ とおく。a，b，c，d が正の実数であるとき，$h(x)=0$ は
解 $\dfrac{-b}{a}<0$ と重解 $x=0$ をもつから，$y=h(x)$ の概形は，$\boxed{\text{ナ ②}}$ である。

したがって，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は
$\dfrac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}=\dfrac{-b}{a}$ と $\boxed{\text{ノ}\ 0}$ である。

また，x が $\dfrac{-b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|=|ax^3+bx^2|=ax^3+bx^2=h(x)$ の値が最大と
なるのは，$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+b)=0$ だから，$h(x)$ が極大値をとる $x=\dfrac{\text{ハヒフ}}{\text{ヘホ}}=\dfrac{-2b}{3a}$
のときである。

コメント：

2次関数のグラフと接線に関する問題。$y=ax^2+bx+c$ のグラフ上の点 $(0, c)$ における接線が
$y=bx+c$ となるのがポイントである。図１のような図を大雑把に描いて考える。

(2)では，x が $\dfrac{-b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$h(x)=f(x)-g(x)\geqq 0$ であることに注意する。

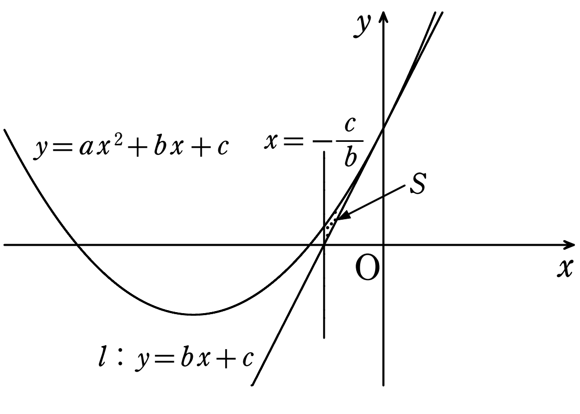

図１

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1) ア 3　イウ50　エ 5　　(2) オ 1　カ 2　　(3) キクケ 408　コサ 58　シ 8　ス 3

(4) セ 3　　(5) ソ 2　タ 4　（解答の順序は問わない）

＜解説＞

(1)

100人の生徒のうち，読書するかしない，いずれかの生徒の数を表す確率変数を X とするのだから，
X は標本数（無作為標本の数）100，読書する確率 0.5 の二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従う（$\boxed{\text{ア ③}}$）。

Xの平均（期待値）は$E(X)=np=100\times 0.5=50=$イウ,

標準偏差は$\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{25}=5=$エ

ここで，nは標本数，pは事象（生徒が読書する）の確率である。

(2)

全く読書をしなかった生徒の数Xは，平均$m=100\times 0.5=50$，標準偏差$\sigma=\sqrt{100\times 0.5\times 0.5}$ $=5$の正規分布に近似的に従う。$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$により確率変数Zを使うと，Zは平均0，標準偏差1の標準正規分布$p(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$に従う。

$X=\sigma Z+m$だから，$0\leqq X\leqq 36$のとき，$0\leqq 5Z+50\leqq 36$，$\therefore -10\leqq Z\leqq -2.8$

数学Ｂの教科書に記載のように，

$P(0\leqq X\leqq 36)=P(-10\leqq Z\leqq -2.8)=P(2.8\leqq Z\leqq 10)\fallingdotseq P(2.8\leqq Z)$

$\qquad=P(0\leqq Z)-P(Z\leqq 2.8)=0.5-0.4974=0.0026\fallingdotseq 0.003$

ここで，$P(10\leqq Z)\fallingdotseq 0$，添付の正規分布表の$z_0=2.80$の値0.4974を用いた。

したがって，全く読書をしなかった生徒の母比率を0.5とするとき，全く読書をしなかった生徒が36人以下となる確率p_5は近似的に$0.003=$ $\boxed{\text{オ ①}}$

また，全く読書をしなかった生徒の母比率を0.4とするとき，Xは平均$m=100\times 0.4=40$，標準偏差$\sigma=\sqrt{100\times 0.4\times(1-0.4)}=\sqrt{24}$の正規分布に近似的に従う。36人は平均50人より40人に近いから，全く読書をしなかった生徒が36人以下となる確率p_4はp_5より大きい（$\boxed{\text{カ = ②}}$）。

参考までにp_4を計算してみよう。$0\leqq X\leqq 36$のとき，$0\leqq\sqrt{24}Z+40\leqq 36$だから，

$-\dfrac{40}{\sqrt{24}}=-\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\leqq Z\leqq -\dfrac{4}{\sqrt{24}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\qquad \dfrac{\sqrt{6}}{3}\fallingdotseq 0.82$，$\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\fallingdotseq 8.2$だから，

$p_4\fallingdotseq P(0\leqq X\leqq 36)=P(-8.2\leqq Z\leqq -0.82)=P(0.82\leqq Z\leqq 8.2)\fallingdotseq P(0.82\leqq Z)$

$\qquad=P(0\leqq Z)-P(Z\leqq 0.82)=0.5-0.2939=0.2061$

確かに$p_4>p_5$である。

(3)

1週間の読書時間の平均値$\overline{T}$は平均m，標準偏差$\sigma=\dfrac{150}{\sqrt{100}}=15$の正規分布$N(m,15^2)$に近似的に従う。$Z=\dfrac{\overline{T}-m}{\sigma}$により，$Z$は標準正規分布$N(0,1)$に従う。

$P(|Z|\leqq z_0)=0.95$とすれば，$P\left(\left|\dfrac{\overline{T}-m}{\sigma}\right|\leqq z_0\right)=P(\overline{T}-\sigma z_0\leqq m\leqq \overline{T}+\sigma z_0)=0.95$

$P(|Z|\leqq z_0)=2P(0\leqq Z\leqq z_0)$，$P(0\leqq Z\leqq z_0)=0.475$だから，添付の正規分布表から$z_0=1.96$

したがって，母平均mに対する信頼度95%の信頼区間を$C_1\leqq m\leqq C_2$とすれば，

$C_1+C_2=(\overline{T}-\sigma z_0)+(\overline{T}+\sigma z_0)=2\overline{T}=2\times 204=408=$キクケ,

$C_2-C_1=2\sigma z_0=2\times 15\times 1.96=58.8=$コサ．シ

また母平均mとC_1，C_2については，

$C_1\leqq m$も$m\leqq C_2$も必ず成り立つとは限らない（$\boxed{\text{ス = ③}}$）。

なぜなら，$C_1\leqq m\leqq C_2$は95%の信頼度の区間だから，必ず成り立つとはいえないのである。

(4)

図書委員長も校長と同じ調査を行った。その調査における全く読書をしなかった生徒の数nと校長の調査結果の36人との大小はわからない（$\boxed{セ\ ③}$）。両者は独立の確率的試行だから，大小関係も確率的で，確定的なことはいえない。

(5)

$C_1 = \overline{T} - \sigma z_0$，$C_2 = \overline{T} + \sigma z_0$において，$\overline{T}$は試行の標本抽出のたびに異なる。

したがって，⓪，①のようにC_1，C_2，D_1，D_2の大小関係を確定的に表現できない。

②のように，$D_2 < C_1$または$C_2 < D_1$となる場合もある（$\boxed{ソ\ ②}$）。

$D_1 = \overline{T}' - \sigma z_0$，$D_2 = \overline{T}' + \sigma z_0$だから，$C_2 - C_1 = D_2 - D_1 = 2\sigma z_0$だから，

$C_2 - C_1 = D_2 - D_1$が必ず成り立つ（$\boxed{タ\ ④}$）。

ここで，$\overline{T}'$は図書委員長の調査における1週間の読書時間の平均値である。

コメント：

数学Ｂで扱う確率・統計分野の基本的な問題である。ここでは，数学Ｂの教科書にそって，ていねいに記載したが，当然ながら，題意を速やかに把握して，正しい論理に沿った大雑把な計算によって，速やかに解答したい。(2)では，二項分布と正規分布の関係性の理解が欠かせない。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1) ア３　イ３　ウ２　エ３　オ２　カ６　キ６　ク３

(2) ケ３　コ２　サ１　シ３　ス１　　(3) セ４　ソ３　タ２　　(4) チ２　ツ２　テ０

<解説>

初項3，公差pの等差数列を$\{a_n\}$とし，初項3，公比rの等比数列を$\{b_n\}$とする。ただし，$p \fallingdotseq 0$，$r \fallingdotseq 0$とする。さらに，これらの数列が次を満たすとする。

$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0$　($n=1, 2, 3, \cdots$)　①

(1)

pとrの値を求めよう。自然数nについて，a_n，a_{n+1}，b_nはそれぞれ

$a_n =$ア$+(n-1)p = 3 + (n-1)p$　②

$a_{n+1} =$ア$+np = 3 + np$　③

$b_n =$イ$r^{n-1} = 3r^{n-1}$

と表される。$r \fallingdotseq 0$により，すべての自然数nについて，$b_n \fallingdotseq 0$となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$であることから，①の両辺をb_nで割ることにより，$ra_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$

したがって，ウ$a_{n+1} = 2a_{n+1} = r(a_n +$エ$) = r(a_n + 3)$　④

④に②と③を代入すると　$2(3 + np) = r\{3 + (n-1)p + 3\} = r\{6 + (n-1)p\}$,

したがって，$(r-オ)pn=(r-2)pn=r(p-カ)+キ=r(p-6)+6$　⑤

⑤がすべてのnで成り立つことおよび$p\fallingdotseq 0$により，⑤のnの係数$(r-2)=0$から，$r=オ=2$

⑤右辺$=0$から，$r(p-6)+6=2(p-6)+6=0$，$\therefore\ p=ク=3$

以上から，すべての自然数nについて，a_nとb_nが正であることもわかる。

(2)

$p=3$，$r=2$であることから，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の初項から第n項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{3+3(k-1)\}=3\sum_{k=1}^{n}k=\frac{3}{2}n(n+1)=\frac{ケ}{コ}n(n+サ)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}3\cdot 2^{k-1}=3\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=3(2^n-1)=シ(オ^n-ス$$

(3)

数列$\{a_n\}$に対して，初項3の数列$\{c_n\}$が次を満たすとする。

$$a_nc_{n+1}-4a_{n+1}c_n+3c_{n+1}=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad ⑥$$

a_nが正であるから，⑥を変形して，$c_{n+1}=\dfrac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n=\dfrac{セa_{n+1}}{a_n+ソ}c_n$

$a_n=3n$，$a_{n+1}=3(n+1)$を代入して，$c_{n+1}=\dfrac{12(n+1)}{3n+3}c_n=4c_n$

したがって，数列$\{c_n\}$は，$\boxed{\text{タ ② 公比が1より大きい等比数列である}}$

(4)

q，uは定数で，$q\fallingdotseq 0$とする。数列$\{b_n\}$に対して，初項3の数列$\{d_n\}$が次を満たすとする。

$$d_nb_{n+1}-qd_{n+1}b_n+ub_{n+1}=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad ⑦$$

⑦の左辺をb_nで割って，$d_nr-qd_{n+1}+ur=0$，$r=2$だから，

⑦を変形して，$d_{n+1}=\dfrac{2}{q}(d_n+u)$

したがって，数列$\{d_n\}$が，公比が0より大きく1より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$0<\dfrac{2}{q}<1$から，$q>2=ツ$　かつ$u=0=テ$

コメント：

漸化式によって関係づけられる等差数列$\{a_n\}$と等比数列を$\{b_n\}$の公差，公比などを求めようという問題である。一見，複雑そうに見えるが，思考の流れは記載されているので，落ち着いて取り組めば，難しいものではない。①の取り扱いにおいて，「①の両辺をb_nで割ることにより，」と記載されていることがポイントである。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) アイ 36　ウ a　エ a　オ 1

(2) カ 3　キ 5　ク 2　ケ 1　コ 5　サ 4　シ 9　ス 0　セ 0

＜解説＞

１辺の長さが1の正五角形の対角線の長さをaとする。

(1)

１辺の長さが1の正五角形$OA_1B_1C_1A_2$ を考える。

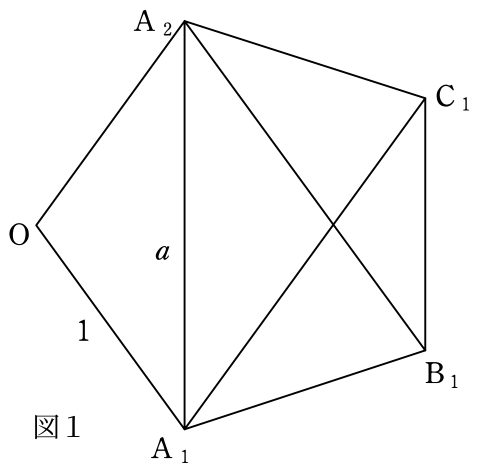

図１

$OA_2 = OA_1 = A_1B_1$ だから，$\angle A_2C_1O = \angle OC_1A_1 = \angle A_1C_1B_1$

したがって $\angle A_1C_1B_1 = \dfrac{1}{3}\angle A_2C_1B_1 = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}(180°\times5-360°) = 36° =$ アイ°

正五角形の外接円において，各辺の弧上の円周角はすべて36°だから，$\angle C_1A_1A_2 = 36°$

したがって $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$，ゆえに $\overrightarrow{A_1A_2} = a\overrightarrow{B_1C_1} =$ ウ$\overrightarrow{B_1C_1}$

したがって $\overrightarrow{B_1C_1} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2} = \dfrac{1}{a}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$　①

また，$\overrightarrow{OA_1} \parallel \overrightarrow{A_2B_1}$，さらに，$\overrightarrow{OA_2} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$ であることから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$
$$= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2}$$
$$= (a-1)(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) = (\text{エ}-\text{オ})(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})\quad ②$$

①，②から $\dfrac{1}{a} = a-1$ が成り立つ。$a>0$に注意してこれを解くと，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2)

１辺の長さが1の正十二面体を考える。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。

面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。

$\overrightarrow{OA_1} \parallel \overrightarrow{A_2B_1}$から，$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1}$

また $\left|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 = a^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\text{カ}+\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$

に注意すると

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = -\frac{1}{2}\left\{(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})^2 - \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2\right\} = -\frac{1}{2}\{a^2-2\} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{\text{ケ}-\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$$

次に，面$OA_2B_2C_2A_3$に着目すると，$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}$

さらに$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$は長さが等しく，互いになす角も等しいので，

$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

ゆえに，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_1}(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2})=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\boxed{シ\ 9}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}&=(\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1})(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2})\\&=\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+a+\frac{1-\sqrt{5}}{4}a-\frac{1-\sqrt{5}}{4}a^2\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}(2+\sqrt{5})==\frac{3+\sqrt{5}}{4}-\frac{3+\sqrt{5}}{4}=0=\boxed{ス\ 0}\end{aligned}$$

面$A_2C_1DEB_2$に着目する。

$\overrightarrow{B_2D}=a\overrightarrow{A_2C_1}=ウ\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$であることに注意すると，4点O，$B_1$，D，$B_2$は同一平面上にある。四角形$OB_1DB_2$において，$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{B_2D}\cdot\overrightarrow{OB_2}=0$，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=|\overrightarrow{B_2D}|$だから，四角形$OB_1DB_2$ $\boxed{セ\ 0}$（正方形である）ことがわかる。

コメント：

ベクトルを平面図形，立体図形に適用して，辺の長さや方向を求める。ベクトルの適用により，図形の理解が非常に容易になることがわかる。正五角形の内角や対角線の長さを求めることから，正十二面体へと対象が広がるが，決して難しくはない。問題文を的確に理解して，出題者の思考の論理に即して計算を進めよう。

＜総評＞

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった初年度である。知識，技能の修得に加え，思考力，判断力，表現力を高める高校教育をめざすということで，共通テストもそのような学力を問うものへと変わろうとしている。

こうした考慮をもって出題していることが随所で見られる。第１問で花子さんと太郎さんの会話の中から，解答のヒントを見つけ，解答方針を決め，解答することがある。第５問ではサッカーボールを思い出させるような正12面体の辺や対角線の関係をベクトルによって求める点で，ベクトルが三次元の構造体の表現や解析に有用であることを知らせている。

今年は初年度であり，新型コロナウイルス感染症の拡大という困難な教育環境にあったので，大きな出題変化があったとはいえない。しかし年度を重ねるにしたがい，さらに所期の方向へ進んでいくであろう。

210225