2021（R3）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理，医，歯，工学部＞

（全５問で120分，４問の場合90分）

$\boxed{1}$　正四面体 OABC において三角形ABC の重心をD，線分AB を2：1に内分する点を E，線分 AC を 5：2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答よ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OE}$ および $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{OA}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{OG}$ および $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) (3)で求めた $\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OH}$ に対して，$\dfrac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2}$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\quad ①$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}\quad ②$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+\vec{c}\quad ③$$

① に ②，③ を代入して，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$　（答）

(2)

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\quad ④$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{b}+\vec{a}\quad ⑤$$

④ に ⑤ を代入して，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$　（答）

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\quad ⑥$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+\vec{c}\quad ⑦$$

⑦ を ⑥ に代入して，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{a}+5\vec{c})$　（答）

(3)

s，t を実数とする。EG ∥ $\overrightarrow{OA}$，FH ∥ $\overrightarrow{OB}$ だから，

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})+s\vec{a}$　⑧ とおける。

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OF}+t\,\overrightarrow{FH}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{a}+5\vec{c})+t\vec{b}$　⑨ とおける。

3 点D，G，H が一直線上ある $\Leftrightarrow$ k を実数とすれば $\overrightarrow{GH} = k\,\overrightarrow{GD}$ ⑩

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = -(s+1)\vec{a} + \left(t - \frac{2}{3}\right)\vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}) - s\vec{a} = -s\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にはないから，⑩ の両辺の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数は等しい。

$s+1 = ks$，$t - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}k$，$\frac{5}{3} = \frac{1}{3}k$，$\therefore k = 5$，$s = \frac{1}{4}$，$t = -1$ ⑪

⑪ を ⑧ に代入して，$\overrightarrow{OG} = \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$，⑨ に代入して，$\overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$ （答）

(4)

正四面体 OABC の 1 辺の長さを l として，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l$，$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = l^2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ = |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 60^\circ = |\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}l^2$

$|\overrightarrow{OG}|^2 = \left(\frac{7}{12}\right)^2 l^2 + 2\left(\frac{7}{12} \times \frac{2}{3}\right)|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ + \left(\frac{2}{3}\right)^2 l^2 = \left\{\left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{14}{36} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} l^2 = \frac{169}{12^2} l^2$

$|\overrightarrow{OH}|^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 l^2 + l^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 l^2 + 2\left(-\frac{2}{3} \times -1\right)\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\left(-1 \times \frac{5}{3}\right)\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\left(\frac{5}{3} \times -\frac{2}{3}\right)\vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{19}{3^2} l^2$

したがって，$\dfrac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2} = \frac{19}{3^2} \times \frac{12^2}{169} = \frac{304}{169}$ （答）

＜解説＞

図 1 のような図を描いて考察する。

(1)，(2)

空間図形の辺の関係をベクトルの加減算によって表現する。

(3)

3 点が一直線上にある条件を考える。ここでは，2 点を結ぶ線分のベクトルが同じベクトルであることを示すと良い。

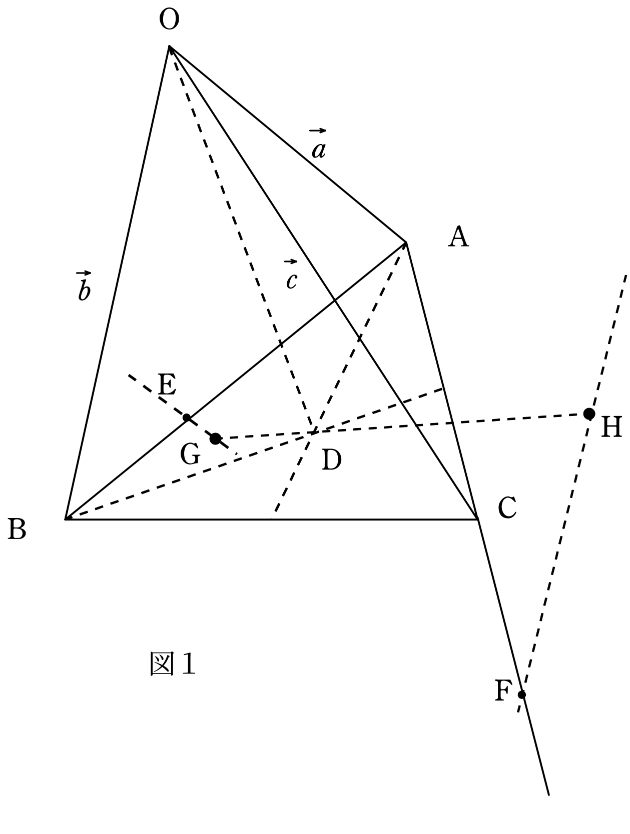


図 1

$\boxed{2}$　座標平面上の 2 点 A $(0,\ -1)$, B $(1, 2)$ を通る直線を l とする。

また，中心 $(3,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。
T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3)で求めた図形 T 上の点 $(x,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

<解答>

(1)

2 点 A $(0,\ -1)$, B $(1, 2)$を通るから，l の方程式は

$y-(-1)=\dfrac{2-(-1)}{1-0}(x-0)$，したがって $y=3x-1$　①　（答）

(2)

円 C の方程式は $(x-3)^2+(y+2)^2=3^2$　②

① を ② に代入して，整理すると，$10x^2=-1$ となって，実数解が存在しない。

したがって，l と C は共有点を持たない。

(3)

点 P の座標を$(x_P,\ y_P)$, 三角形 ABP の重心の座標を $(x_G,\ y_G)$ とする。

すると，$(x_P-3)^2+(y_P+2)^2=3^2$　③

また，$x_G=\dfrac{0+1+x_P}{3}$，$y_G=\dfrac{-1+2+y_P}{3}$，これらより，$x_P=3x_G-1$，$y_P=3y_G-1$　④

④を ③ に代入して，整理すると

$(3x_G-4)^2+(3y_G+1)^2=3^2$，$\therefore \left(x_G-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y_G+\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

したがって重心 $(x_G,\ y_G)$ の軌跡 T は中心が $\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，半径が 1 の円である。

(4)

$\sqrt{x^2+y^2}$ は軌跡 T の円上の点 $(x,\ y)$ と原点との距離である。
したがって，$\sqrt{x^2+y^2}$ が最大値，最小値となるのは，軌跡 T の円の中心 M と原点 O とを結ぶ直線が円と交わる点 D，E においてである。図 1 においてOM $=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(\dfrac{-1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

$\therefore$ 最大値は OD $=\dfrac{\sqrt{17}}{3}+1$，最小値は OE $=\dfrac{\sqrt{17}}{3}-1$　（答）

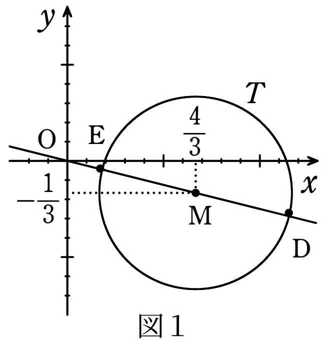


図 1

<解説>

(1)，(2)

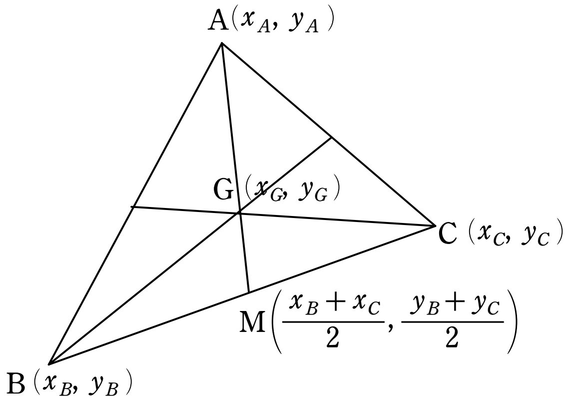
lと C の方程式を連立させたとき，実数解が存在しないことを説明すればよい。

(3)

三角形の重心の座標と３つの頂点の座標との関係を迅速に導き出したい。演習問題等で扱ったことがあれば，覚えておこう。覚えていなくても直ぐに導こう。

M を BC の中点とする。AG : GM ＝ 2 : 1 だから，

$x_G=\dfrac{x_A\times 1+x_M\times 2}{2+1}=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$，同様に $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$



(4)

図１のような図を描いて考察する。$\sqrt{x^2+y^2}$ が原点と T 上の点との距離であることに気づくこと。最大，最小になるのは，原点と円の中心とを結ぶ直線と円の交点においてであることに気づくこと。計算によって求めようとすると，煩瑣となり時間を浪費する。

$\boxed{3}$ 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A，B，C，D，E は時計回りに配置されている。
点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺に沿って時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B にある確率をそれぞれ求めよ。

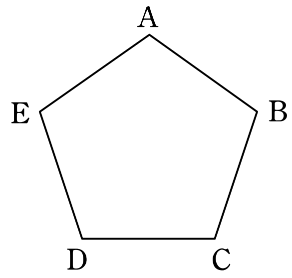
(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころをk 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4) (3)で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

<解答>

(1)



点 P が頂点 A の位置にあるためには，n が 5 の倍数，

すなわち $n=5$，10，15，20，25，30

目の場合の数は

$5=1\times5,\ 5\times1$　2 通り，$10=2\times5,\ 5\times2$　2 通り

$15=3\times5,\ 5\times3$　2 通り，$20=4\times5,\ 5\times4$　2 通り

$25=5\times5$　1 通り，$30=5\times6,\ 6\times5$　2 通り，合計　11 通り

さいころを2回投げたときの目の組み合わせは36通りだから，

点Pが頂点Aにある確率は $\dfrac{11}{36}$　（答）

点Pが頂点Bの位置にあるためには，$n \equiv 1 \pmod 5$

すなわち $n = 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ 36$

目の場合の数は

$1 = 1\times1$　1通り，$6 = 1\times6,\ 6\times1,\ 2\times3,\ 3\times2$　4通り，$16 = 4\times4$　1通り，

$36 = 6\times6$　1通り，合計7通り

したがって，点Pが頂点Bの位置にある確率は $\dfrac{7}{36}$　（答）

(2)

k 回のさいころ投げで1回でも5が出れば，n は5の倍数となるから，点Pは頂点Aにある。

1回でも5の目が出る事象は，1回も5の目が出ない事象の余事象である。

k 回投げで，1回も5の目が出ない確率は $\dfrac{(6-1)}{6}\times\dfrac{(6-1)}{6}\times\cdots\times\dfrac{(6-1)}{6} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^k$

したがって，求める確率 $a_k = 1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$　（答）

(3)

$n = m_1 m_2 \cdots m_k$ とする。m_j は j 回めの投げのさいころの出目

k 回投げで点PがBにあるとき，$n \equiv 1 \pmod 5$

k 回投げで点PがBにあるとき，$(k+1)$ 回めの投げでPがBに留まるためには $m_{k+1} = 1$ または6

したがって，点PがBにあるとき $(k+1)$ 回めの投げでPがBにある確率は $b_k\times\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}b_k$　①

点PがCにあるとき $n \equiv 2 \pmod 5$，$\therefore$ $(k+1)$ 回めの投げでPがBに移るためには $m_{k+1} = 3$

点PがDにあるとき $n \equiv 3 \pmod 5$，$\therefore$ $(k+1)$ 回めの投げでPがBに移るためには $m_{k+1} = 2$

点PがEにあるとき $n \equiv 4 \pmod 5$，$\therefore$ $(k+1)$ 回めの投げでPがBに移るためには $m_{k+1} = 4$

点PがAにあるとき $n \equiv 0 \pmod 5$，$\therefore$ $(k+1)$ 回めの投げの出目に関わらずPはAに留まる

k 回投げで点PがC，D，Eのいずれかにある確率は $(1-b_k-a_k)$

したがって，点PがC，D，Eのいずれかにあって，$(k+1)$ 回めの投げでPがBに移る確率は

$(1-b_k-a_k)\times\dfrac{1}{6}$　②

①と②の和により，$b_{k+1} = \dfrac{1}{3}b_k+\dfrac{1}{6}(1-b_k-a_k) = \dfrac{1}{6}b_k+\dfrac{1}{6}(1-a_k) = \dfrac{1}{6}b_k+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$　（答）

(4)

$$b_k = \frac{1}{6}b_{k-1}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$f_k = 6^k b_k = 6^{k-1}b_{k-1}+6^{k-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} = f_{k-1} + 5^{k-1}$，$\therefore f_k - f_{k-1} = 5^{k-1}$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}(f_{k+1-j}-f_{k-j}) = f_k - f_1 = \sum_{j=1}^{k-1}5^{k-j} = \frac{5}{4}(5^{k-1}-1)$，$f_1 = 6b_1 = 6\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\right) = 2$，

$\therefore f_k=\dfrac{5^k+3}{4}$　（答）

したがって，$b_k=\dfrac{f_k}{6^k}=\dfrac{5^k+3}{4\cdot 6^k}$　（答）

＜解説＞

(1)

さいころ投げによって，頂点 A にあった点 P が頂点 A にあるための条件を先ず考える。n が 5 の倍数であれば，点 P が頂点 A，B，C，D，E と何度か回って，A に戻ることが容易にわかる。2 回投げでは，n が最大値 $6\times6=36$ 以下の 5 の倍数となる場合の数を求めれば良い。

頂点 A にあった点 P が頂点 B に移るためには，n が（5の倍数＋1）となっていればよい。A に戻ってから，1 点移動すれば B にいたる。n が（5の倍数＋1）ということは整数演算で n を 5 で除した場合，剰余が 1 ということだから，$n\equiv1\pmod 5$である。

(2)

k 回のさいころ投げで，n が 5 の倍数である確率を求める。

(3)

$(k+1)$ 回めの投げで，$n\equiv1\pmod 5$ となる条件を考察する。k 回めの投げまでの $n\pmod 5$ によって，$(k+1)$ 回めの投げまでの $n\pmod 5$ は異なるから，点 P が A，B，C，D，E の位置にある場合について，点 P が B に来るための出目の条件を考察する。

(4)

$f_k=6^kb_k=6^{k-1}b_{k-1}+6^{k-1}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}=f_{k-1}+5^{k-1}$ の表式に気づくことがポイントである。

$b_k=\dfrac{1}{6}b_{k-1}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$からだけでは，$b_k$ の一般表式を導くことは容易ではない。半ば以上，解法のヒントが与えられた問題ということになる。

$\boxed{4}$　実数 a と b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}x\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx$　の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}x^2\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}x^2\sin x\,dx$　の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx=4+\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin x\,dx=\frac{4}{3}(4+\pi)$$

を満たすとき，a と b の値を求めよ。

(4) (3) で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

部分積分法によって，$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$

したがって，$\int_0^{2\pi} x\cos x\ dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{2\pi} = 1-1 = 0$　（答）

部分積分法によって，$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x$

したがって，$\int_0^{2\pi} x\sin x\ dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{2\pi} = -2\pi$　（答）

(2)

部分積分法によって，$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$

(1)の結果を活用して，$\int_0^{2\pi} x^2\cos x\ dx = \Big[x^2\sin x\Big]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\ dx = 4\pi$　（答）

部分積分法によって，$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x - 2\int x(-\cos x)dx = x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

(1)の結果を活用して，$\int_0^{2\pi} x^2\sin x\ dx = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x\cos x\ dx = -4\pi^2$　（答）

(3)

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\ dx = \int_0^{2\pi}\left(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right)\cos x\ dx$$

$\int_0^{2\pi} ax^2\cos x\ dx = 4a\pi$，$\int_0^{2\pi} bx\cos x\ dx = 0$，

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$2\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\cos x\,dx = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{x}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x + 2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

したがって，$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\ dx = 4a\pi + \pi = 4+\pi$，$\therefore\ a = \frac{1}{\pi}$　（答）

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\ dx = \int_0^{2\pi}\left(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right)\sin x\ dx$$

$\int_0^{2\pi} ax^2\sin x\ dx = -4a\pi^2$，$\int_0^{2\pi} bx\sin x\ dx = -2b\pi$

$$\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2x\ dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$2\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\sin x\,dx = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x - 2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}+2+\frac{2}{3}+2 = \frac{16}{3}$$

したがって，$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\ dx = -4a\pi^2 - 2b\pi + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}(4+\pi)$，$\therefore\ b = -\frac{8}{3}$　（答）

(4)

$$f(x)=ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}=\frac{x^2}{\pi}-\frac{8}{3}x+\cos x+2\cos\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\pi+2t^2-1+2t=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\pi+2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

$$=A_1+A_2,\ \text{ただし}\ t=\cos\frac{x}{2}$$

$A_1=\dfrac{1}{\pi}\left(x-\dfrac{4\pi}{3}\right)^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\pi$ とすると，A_1は $x=\dfrac{4}{3}\pi$のとき最小値$-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\pi$

$A_2=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$ とすると，A_2は$t=\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}$のとき，

すなわち $x=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{3}{2}$

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき，最小値 $-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\pi-\dfrac{3}{2}$　（答）

<解説>

三角関数を含む多項式の積分の問題。部分積分法を用いて，原始関数を求める。

(1)，(2)

部分積分法を活用する。部分積分法は教科書に記載のように，

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ から，両辺を積分して，

$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$，

したがって，$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$，のように理解すると，覚えやすい。

(3)

(1)，(2) の結果を活用して，ていねいに計算をする。特段に難しいところはないだろう。

(4)

2 次式と三角関数の和からなる多項式の最小値問題。一見して導関数から極値を求めるなどの方法は使えそうにない。2 次式の最小値を与える x の値をよく見ると，三角関数の和の最小値を与えそうだと気づく。実際に確かめると，そのようになっている。そのように問題が作られていたということで，幸いであった。

$\boxed{5}$　複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\ \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\ \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0,$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|z_2-z_1|$ を θ_1を用いて表せ。

(2) $|z_3-z_1|$，$|z_4-z_1|$を θ_1，θ_2，θ_3 を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。

＜解答＞

(1)

z_j ($j=1, 2, 3, 4$) は単位円周上の点だから,

$z_j=\cos\alpha_j+i\sin\alpha_j$ とおける。ただし，$\theta_j=\alpha_{j+1}-\alpha_j$ ($j=1, 2, 3$)

$z_2-z_1=(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)+i(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$

$$\begin{aligned}|z_2-z_1|&=\sqrt{(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)^2+(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)^2}\\&=\sqrt{(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2)+(\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1)-2(\cos\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\sin\alpha_1)}\\&=\sqrt{2-2(\cos\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\sin\alpha_1)}=\sqrt{2-2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}=\sqrt{2-2\cos\theta_1}\\&=\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta_1}{2}\right)}=2\sin\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$ （答）

(2)

(1)と同様に，$|z_3-z_1|=\sqrt{2-2\cos(\alpha_3-\alpha_1)}$

$\theta_1=\alpha_2-\alpha_1$，$\theta_2=\alpha_3-\alpha_2$，$\therefore\ \alpha_3-\alpha_1=\theta_1+\theta_2$，

したがって $|z_3-z_1|=\sqrt{2-2\cos(\theta_1+\theta_2)}=2\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ （答）

同様に，$|z_4-z_1|=\sqrt{2-2\cos(\alpha_4-\alpha_1)}$

$\theta_1=\alpha_2-\alpha_1$，$\theta_2=\alpha_3-\alpha_2$，$\theta_3=\alpha_4-\alpha_3$，$\therefore\ \alpha_4-\alpha_1=\theta_1+\theta_2+\theta_3$，

したがって $|z_4-z_1|=\sqrt{2-2\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=2\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}$ （答）

(3)

$\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ について，

(1)，(2)を活用して，$|z_3-z_2|=2\sin\dfrac{\theta_2}{2}$，$|z_4-z_3|=2\sin\dfrac{\theta_3}{2}$，$|z_4-z_2|=2\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}$ だから

$$\text{左辺}=\frac{2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\cdot2\sin\frac{\theta_1}{2}+2\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot2\sin\frac{\theta_3}{2}}{2\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot2\sin\frac{\theta_2}{2}+2\sin\frac{\theta_3}{2}\cdot2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}}\quad ①$$

$$\text{右辺}=\frac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}=\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}$$

①の分子について,

$$\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\frac{\theta_1}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}+\frac{\theta_1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)-\cos\left(\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\right)\right\}$$

$$\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_2}{2}-\frac{\theta_3}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}\right)\right\}$$

したがって，①の分子は

$$\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)-\cos\left(\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(\theta_1+\theta_2)-(\theta_1+\theta_3)}{2}-\cos\frac{(\theta_1+\theta_2)+(\theta_1+\theta_3)}{2}\right\}=\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2} \quad ②$$

同様に，①の分母について，②のθ_1とθ_2を交換して考えれば良いから，

$$\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}+\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}=\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2} \quad ③$$

したがって，左辺 $=\dfrac{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}}=$ 右辺

以上によって，$\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ が示された。

<解説>

(1)

いろいろの解法がありそうだが，複素数z_jを偏角α_jによって，$z_j=\cos\alpha_j+i\sin\alpha_j$として扱うのが一番簡明だろう。$\sqrt{2-2\cos\theta_1}=\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}\right)}=2\sin\dfrac{\theta_1}{2}$ まで計算を進めること。

(2)

(1)の考え方をそのまま活用する。

(3)

三角関数の加法定理などを駆使する。

$\boxed{6}$　$a\geqq 0$とし，nを正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$$

を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$

とおく。$\lim\limits_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

$f(x)=\dfrac{x}{1+a}-\log\dfrac{1+a+x}{1+a}$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1}{1+a+x}=\dfrac{x}{(1+a)(1+a+x)}>0\quad (x>0)$

$f(0)=0$，$f(x)$ は $x>0$ において単調増加，したがって $x>0$ において $f(x)>0$

$\therefore\ \log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$

$g(x)=\log\dfrac{1+a+x}{1+a}-\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)$ とおく。

$g'(x)=\dfrac{1}{1+a+x}-\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{x}{(1+a)^2}=\dfrac{(1+a)^2-(1+a)(1+a+x)+x(1+a+x)}{(1+a+x)(1+a)^2}$

$=\dfrac{x^2}{(1+a+x)(1+a)^2}>0\quad (x>0)$

$g(0)=0$，$g(x)$ は $x>0$ において単調増加，したがって $x>0$ において $g(x)>0$

以上によって，$x>0$ において，$\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)<\log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$

(2)

$\log I_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{k}{n^2(1+a)}\right)$，(1)の結果について $x=\dfrac{k}{n^2}$ とおけば，

$\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{k}{2n^2(1+a)}\right)<\log\left(1+\dfrac{k}{n^2(1+a)}\right)<\dfrac{k}{n^2(1+a)}$　①

$k\leqq n$ だから，$\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{n}{2n^2(1+a)}\right)<\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{k}{2n^2(1+a)}\right)$,

したがって①から，$\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{n}{2n^2(1+a)}\right)<\log\left(1+\dfrac{k}{n^2(1+a)}\right)<\dfrac{k}{n^2(1+a)}$

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{n}{2n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{k}{n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2(1+a)}$　②

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2(1+a)}=\dfrac{n(n+1)}{2n^2(1+a)}=\dfrac{n+1}{2n(1+a)}$　③

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\dfrac{n}{2n^2(1+a)}\right)=\dfrac{n+1}{2n(1+a)}-\dfrac{n+1}{4n^2(1+a)^2}$　④

②に③，④を適用すれば，$\dfrac{n+1}{2n(1+a)}-\dfrac{n+1}{4n^2(1+a)^2}<\log I_n(a)<\dfrac{n+1}{2n(1+a)}$　⑤

$\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n+1}{2n(1+a)}-\dfrac{n+1}{4n^2(1+a)^2}\right\}=\dfrac{1}{2(1+a)}-\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n(1+a)^2}=\dfrac{1}{2(1+a)}$

したがって，はさみうちの原理によって，$\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)=\dfrac{1}{2(1+a)}$

(3)

$$ {}_{3n^2+n}C_n = \frac{(3n^2+n)(3n^2+n-1)\dots(3n^2+1)}{n\,!} $$

$$ {}_{2n^2+n}C_n = \frac{(2n^2+n)(2n^2+n-1)\dots(2n^2+1)}{n\,!} $$

$$ \frac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left\{\frac{2}{3}\frac{3n^2(1+n/3n^2)}{2n^2(1+n/2n^2)}\right\}\left\{\frac{2}{3}\frac{3n^2(1+(n-1)/3n^2)}{2n^2(1+(n-1)/2n^2)}\right\}\cdots\left\{\frac{2}{3}\frac{3n^2(1+1/3n^2)}{2n^2(1+1/2n^2)}\right\} $$

$$ = \frac{(1+1/3n^2)(1+2/3n^2)\dots(1+(n-1)/3n^2)(1+n/3n^2)}{(1+1/2n^2)(1+2/2n^2)\dots(1+(n-1)/2n^2)(1+n/2n^2)} \quad ⑥ $$

⑥の分子 $=\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)\left(1+\frac{2}{3n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{3n^2}\right)\left(1+\frac{n}{3n^2}\right)=I_n(2)$

⑥の分母 $=\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)=I_n(1)$

したがって，$\dfrac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{I_n(2)}{I_n(1)}$

$$ \lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{I_n(2)}{I_n(1)} $$

(2)から，$\lim\limits_{n\to\infty}\log I_n(a) = \log\left\{\lim\limits_{n\to\infty}I_n(a)\right\} = \dfrac{1}{2(1+a)}$，すると$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(a) = e^{\frac{1}{2(1+a)}}$

したがって，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(1) = e^{\frac{1}{2(1+1)}} = e^{\frac{1}{4}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(2) = e^{\frac{1}{2(1+2)}} = e^{\frac{1}{6}}$

$$ \lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{I_n(2)}{I_n(1)} = e^{-\frac{1}{12}} \qquad \text{（答）} $$

＜解説＞

(1)

変数の特定区間における関数値の大小関係を問う。比較する関数の差の関数の導関数の振る舞いを調べることにより，関数値の正負が解れば，大小関係を把握することができる。一般的な方法である。

(2)

(1)で証明した不等式を活用する。変数 x が存在するのに対し，ここでは存在せず，代わりに整数 k が存在する。x を k によって表現すれば，(1)の不等式を活用できることに着目する。

$x=\dfrac{k}{n^2}$ とすれば，不等式の対数関数の真数と$\log I_n(a)$の中の対数関数の真数の表式が同じになることに気づく。②を導くために，ちょっとした工夫をする。

別解を紹介する。

$$ \{I_n(a)\}^2 = \left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{n-1}{n^2(1+a)}\right)\cdots $$

$$ \cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right) $$

$$= \left\{1+\frac{1+n}{n^2(1+a)}+\frac{n}{n^4(1+a)^2}\right\}\left\{1+\frac{1+n}{n^2(1+a)}+\frac{2(n-1)}{n^4(1+a)^2}\right\}\cdots$$

$$\cdots\left\{1+\frac{1+n}{n^2(1+a)}+\frac{2(n-1)}{n^4(1+a)^2}\right\}\left\{1+\frac{1+n}{n^2(1+a)}+\frac{n}{n^4(1+a)^2}\right\}$$

n が十分大きいとき,（ n^{-4} の項）は 1 より十分小さいから無視し，$n(1+a)=n'$として

$$\{I_n(a)\}^2=\left\{1+\frac{1+n}{n^2(1+a)}\right\}^n \fallingdotseq \left\{1+\frac{1}{n(1+a)}\right\}^n = \left(1+\frac{1}{n'}\right)^{\frac{n'}{1+a}} = \left\{\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right\}^{\frac{1}{1+a}}$$

$$\log\{I_n(a)^2\} = 2\log I_n(a) = \frac{1}{1+a}\log\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}$$

したがって，$\lim\limits_{n\to\infty}\log I_n(a) = \dfrac{1}{2(1+a)}\log\left\{\lim\limits_{n'\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n'}\right)^{n'}\right\} = \dfrac{1}{2(1+a)}$

ただし，$\lim\limits_{n'\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n'}\right)^{n'} = e$ であることに注意。

(3)

先ずは，${}_{3n^2+n}C_n$，${}_{2n^2+n}C_n$ を具体的に書き下ろして，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ の表式を確認する。

すると，その表式は容易には簡略化できそうにないことがわかる。分母，分子とも n 項の積であり，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$を n 項の$\dfrac{2}{3}\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3}\dfrac{2}{3}$と考えて，分母，分子の n 項に配分し，整理すると，すっきりとした表式になる。

当然ながら，(2)の結果を活用するのだろうと予測しながら，考察を進める。得られた表式

$\dfrac{(1+1/3n^2)(1+2/3n^2)\ldots(1+(n-1)/3n^2)(1+n/3n^2)}{(1+1/2n^2)(1+2/2n^2)\ldots(1+(n-1)/2n^2)(1+n/2n^2)}$ ⑥ を凝視すると，

$I_n(a) = \left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ に類似していることに気づく。

(1)，(2) の考察において，何も利用されない変数 a の存在が気になったのではないか。その気になっていたことが頭に残っていると，ここで分母における $\dfrac{1}{2n^2}$，分子における $\dfrac{1}{3n^2}$ の存在に対応していることに気づく。

この解答において，$\lim\limits_{n\to\infty}\log I_n(a) = \log\left\{\lim\limits_{n\to\infty} I_n(a)\right\}$ として良いのか，という疑問が残る。

一般的には，$\lim\limits_{x\to\infty}\log f(x) = \log\left\{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right\}$ として良いか，という問題である。

$g(x)=\log f(x)$ とすれば，$f(x)=e^{g(x)}$，左辺 $= \lim\limits_{x\to\infty}\log f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = g(\infty)$

右辺 $= \log\left\{\lim\limits_{x\to\infty} e^{g(x)}\right\} = \log e^{g(\infty)} = g(\infty) =$ 左辺

このことについて，既知のこととして，議論を展開して良い。

＜総評＞

いたずらな難問はなく，基礎から応用まで，知識，数学論理展開能力と思考力を問う良問が揃っていると思う。このレベルの問題を時間内に70%程度の正答率で解答できれば，相当の学力の持ち主で

はないか。旧帝等の難関大学を目標とする生徒には格好の学習問題だと思う。

$\boxed{1}$

空間図形をベクトル表式によって扱う問題。難易度はB。

$\boxed{2}$

図形と方程式に関する問題。難易度はB。

$\boxed{3}$

確率と整数の問題。なかなか良く考えられた問題である。(3)で数学Aで発展として扱われている合同式の概念を用いることが有効である。合同式の概念や確率漸化式の扱いが必要なことなど，やや難しいところがあるので，難易度はA－。

$\boxed{4}$

三角関数を含む多項式の積分問題。部分積分法を活用して原始関数を求める。三角関数の加法定理，倍角公式，導関数などに習熟していること。難易度はB。

$\boxed{5}$

複素数平面における単位円周上の点が表す複素数の演算と証明に関する問題。偏角によって複素数を表し，三角関数の加法定理等を駆使して扱う。やや煩瑣な計算を伴うので，難易度はB＋。

$\boxed{6}$

導関数によって，変数の特定変域における多項式の大小関係を考察する問題からスタートして，多項式数列の和の収束関数を求める問題。表式の変形，収束値の判定等において，優れた着眼，着想が必要な問題であり，難易度はA－。

＜人文，教育，経済社会，農，創生学部＞

（90分）

$\boxed{1}$ 正四面体 OABC において三角形ABC の重心をD，線分AB を2：1に内分する点を E，線分 AC を 5：2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答よ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OE}$ および $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{OA}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{OG}$ および $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

＜解答＞，＜解説＞

理系の $\boxed{1}$ から(4)を除いたものと同じなので，理系の $\boxed{1}$ を参照のこと。

$\boxed{2}$ 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A，B，C，D，E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A，B，C，D，E の位置にある

確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

＜解答＞

理系の問題 $\boxed{3}$ を少々易化した問題。

(1)

さいころ投げの 1 回目の出目を m_1，2 回目の出目を m_2 として，$n = m_1+m_2$，$2 \leqq n \leqq 12$

図 1 に (m_1, m_2) と対応する n の表を示す。(m_1, m_2) の組合せの数は $6\times6 = 36$ 通りである。

図 2 のように，$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ に応じて，点 P は C，D，E，A，B に動く。

すなわち，$n = 5p + r$ （p は整数で商，$r = 0, 1, 2, 3, 4$ で剰余）としたとき，点 P が

A にある場合　$r = 0$：$n = 5$，$10 \rightarrow 7$ 通り，$\therefore$ 確率は $\dfrac{7}{36}$　（答）

B にある場合　$r = 1$：$n = 6$，$11 \rightarrow 7$ 通り，$\therefore$ 確率は $\dfrac{7}{36}$　（答）

C にある場合　$r = 2$：$n = 2$，7，$12 \rightarrow 8$ 通り，$\therefore$ 確率は $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$　（答）

D にある場合　$r = 3$：$n = 3$，$8 \rightarrow 7$ 通り，$\therefore$ 確率は $\dfrac{7}{36}$　（答）

E にある場合　$r = 4$：$n = 4$，$9 \rightarrow 7$ 通り，$\therefore$ 確率は $\dfrac{7}{36}$　（答）

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

図 1

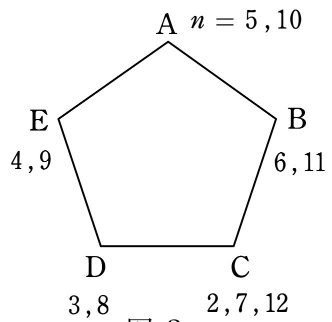


図 2

(2)

j 回投げで点 P が頂点 K (K は A，B，C，D，E のいずれか）にある確率を p_{jK} で表す。

点 P が頂点 D，E，A，B にある場合にはさいころ投げ 1 回で頂点 D に来る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$，C にある場合には出目が 1 と 6 の場合に D に来るから確率は $\dfrac{1}{6}\times2$

$p_{3D} = \dfrac{1}{6}(p_{2D} + p_{2E} + p_{2A} + p_{2B}) + \dfrac{2}{6}p_{2C}$，$p_{2D} + p_{2E} + p_{2A} + p_{2B} + p_{2C} = 1$ だから

$p_{3D} = \dfrac{1}{6}\times1 + \dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{9} = \dfrac{11}{54}$　（答）

(3)

(2)と同様の考え方により，

$$p_{5A} = \frac{1}{6}\,(\,p_{4A} + p_{4B} + p_{4C} + p_{4D}) + \frac{2}{6}p_{4E} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{4E}$$

$$p_{4E} = \frac{1}{6}\,(\,p_{3E} + p_{3A} + p_{3B} + p_{3C}) + \frac{2}{6}p_{3D} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{3D} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{11}{54} = \frac{65}{324}$$

したがって，$p_{5A} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{65}{324} = \frac{389}{1944}$　（答）

＜解説＞

4

(1)

$(m_1\,,\,m_2)$ と剰余 r を図３に示す。これにより，各 r に対する $(m_1\,,\,m_2)$ の場合の数がわかる。

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

図３

p_{jK} を用いて考察してみる。頂点 A にある点 P がさいころ 2 回投げで頂点K (K はA，B，C，D，E のいずれか）に来るとする。

$$p_{2A} = \frac{1}{6}(p_{1A} + p_{1B} + p_{1C} + p_{1D}) + \frac{2}{6}p_{1E} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{1E} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

$$p_{2B} = \frac{1}{6}(p_{1B} + p_{1C} + p_{1D} + p_{1E}) + \frac{2}{6}p_{1A} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{1A} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

$$p_{2C} = \frac{1}{6}(p_{1C} + p_{1D} + p_{1E} + p_{1A}) + \frac{2}{6}p_{1B} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{1B} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$p_{2D} = \frac{1}{6}(p_{1D} + p_{1E} + p_{1A} + p_{1B}) + \frac{2}{6}p_{1C} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{1C} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

$$p_{2E} = \frac{1}{6}(p_{1E} + p_{1A} + p_{1B} + p_{1C}) + \frac{2}{6}p_{1D} = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}p_{1D} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

(2)

p_{jK} を用いないで考察してみる。例えば,

3回投げで D に来る確率

＝(2 回投げ A → 3回投げ D の確率)＋ (2 回投げ B → 3回投げ D の確率)＋ (2 回投げ C → 3回投げ D の確率)＋ (2 回投げ D → 3回投 D の確率)＋ (2 回投げ E → 3回投げ D の確率)

$$=\frac{7}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{7}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{6}+\frac{7}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{7}{36}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{54} + \frac{4}{54} = \frac{11}{54}$$　（答）

(3)

点 P が頂点 A，B，C，D にある場合にはさいころ投げ 1 回で頂点 A に来る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，E にある場合には出目が 1 と 6 の場合に A に来るから確率は $\frac{1}{6}\times 2$

点 P が頂点 E，A，B，C にある場合にはさいころ投げ 1 回で頂点 E に来る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，D にある場合には出目が 1 と 6 の場合に E に来るから確率は $\frac{1}{6}\times 2$

$\boxed{3}$ 座標平面上の2点 A $(0\ ,\ -1)$，B $(1\ ,\ 2)$ を通る直線をlとする。

また，中心 $(3\ ,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3)で求めた図形 T 上の点 $(x\ ,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

＜解答＞

理系の問題 $\boxed{2}$ に同じなので，その解答と解説を参照のこと。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\,|x-1|-3x+3$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax+3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3) (2)で与えられた S に対して，a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき， S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$x \leqq 1$のとき，$f(x) = -x\,(x-1)-3x+3 = -x^2-2x+3$

$1 < x$ のとき，$f(x) = x\,(x-1)-3x+3 = x^2-4x+3$

$f(x)$のグラフは図１のようになる。

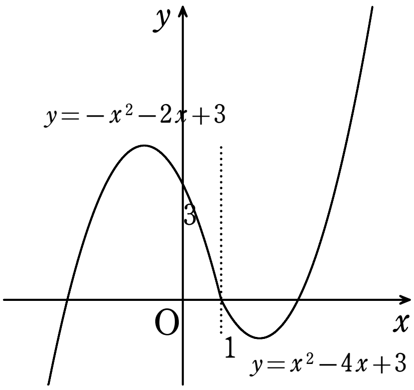


図１

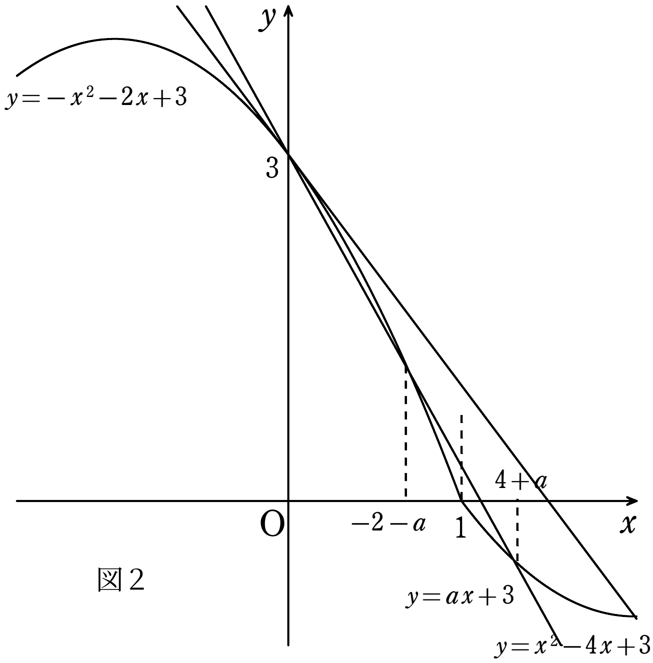


図２

(2)

$x \leqq 1$ のとき，$f(x) = -x^2-2x+3$ と $y = ax+3$ との交点の x 座標は,

$-x^2-2x+3 = ax+3$，$\therefore x=0$，$-2-a$

$x \leqq 1$ のためには $-2-a \leqq 1$，すなわち $-3 \leqq a$，したがって x 座標 $x=0$，$-2-a$ の交点が存在

$1 < x$ のとき，$f(x) = x^2-4x+3$ と $y = ax+3$ との交点の x 座標は,

$x^2-4x+3 = ax+3$，$\therefore x=0$，$4+a$

$1 < x$ のためには $1 < 4+a$，すなわち $-3 \leqq a$，したがって x 座標　$x=4+a$ の交点が存在

$y = f(x)$ と $y = ax+3$ の関係は図２のようになる。

したがって，$S = \int_0^{-2-a}\{(-x^2-2x+3)-(ax+3)\}dx+\int_{-2-a}^{1}\{(ax+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$

$$+\int_1^{4+a}\{(ax+3)-(x^2-4x+3)\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2+a)x^2\right]_0^{-2-a}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2+a)x^2\right]_{-2-a}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(4+a)x^2\right]_1^{4+a}$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+4a+\frac{23}{3}$$ （答）

(3)

$$S'(a)=\frac{dS(a)}{da}=-\frac{1}{2}a^2+4=-\frac{1}{2}(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$$

したがって，$S(a)$ は図３のように変化する。最大値は $S(a=-3)$ か $S(a=-2)$ のいずれか。

$S(-3)=\frac{9}{2}-12+\frac{23}{3}=\frac{1}{6}$，$S(-2)=\frac{4}{3}-8+\frac{23}{3}=1$

$S(-2\sqrt{2})=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}-8\sqrt{2}+\dfrac{23}{3}=\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}$，以上によって，

S の最大値は $a=2$ のとき $S=1$　（答），最小値は $a=-2\sqrt{2}$ のとき $S=\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}$（答）

a	-3		$-2\sqrt{2}$		-2
$S'(a)$	1/6	$-$		$+$	1
$S(a)$		↘		↗	

図３

＜解説＞

(1)

まずは x の変域に応じて場合分けして，絶対値記号を外す。

(2)

図２のようなグラフを描いて，計算対象となる S の領域を確認する。かなり小さな領域が対象になるので，注意する。2 次関数と1 次関数に挟まれた領域を交点から交点まで積分する面積積分が必要になる。

＜総評＞

$\boxed{1}$ は理系の問題から設問(4)を除いたもので難易度はＢ。$\boxed{2}$ は理系の問題を少々変えたものだが，文系の問題としては少々手強い。難易度はＡ－。$\boxed{3}$ は理系と同じ問題で，文系としてはＢ＋。
$\boxed{4}$ は標準レベルの問題だが，計算がやや煩瑣である。難易度はＢ。

231204