2021 (R3) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：経済学部（理系）・理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）・歯学部・薬学部・工学部・農学部

試験時間 150分

$\boxed{1}$　a，b を実数とする。曲線 $y = ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a\ ,\ b\ )$ の領域を図示せよ。

＜解答＞

ｉ) $a = 0$ のとき

$y = ax^2+bx+1 = bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたない

$\Leftrightarrow$ 1 次方程式 $bx+1 = 0$ が正の実数解をもたない $\Leftrightarrow$ $0 \leqq b$　①

ii) $a \fallingdotseq 0$ のとき

$y = ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたない

$\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $ax^2+bx+1 = 0$ が正の実数解をもたない

$\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{1}{a} = 0$ が正の実数解をもたない

2 次方程式 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{1}{a} = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4a}{4a^2} = 0$ が正の実数解をもたない条件

ア) 実数解をもたない：解の判別式 $D = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4}{a}<0$　②

イ) 実数解をもっても正ではない：$D \geqq 0$ かつ $-\dfrac{b}{2a} < 0$ かつ $\dfrac{1}{a} \geqq 0$　③

②より，$\dfrac{b^2-4a}{a^2} < 0$，$\therefore\ a > \dfrac{b^2}{4}$　④

③より，$a \leqq \dfrac{b^2}{4}$ のとき，$0 < a$，$0 < b$　⑤

以上から，①，④，⑤ が求める領域で，図１の打点部である。

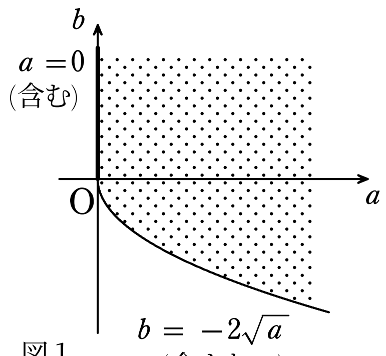

図１

<解説>

　ていねいに場合分けして考える。「曲線$y=ax^2+bx+1$がx軸の正の部分と共有点をもたない」ということは，x軸は$y=0$だから「方程式$ax^2+bx+1=0$が正の実数解をもたない」と理解する。

　ここで，$a\fallingdotseq 0$なら2次方程式だが，$a=0$なら1次方程式になるので，$a=0$，$\fallingdotseq 0$で場合わけして考察しなければならない。

　次に「2次方程式$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{1}{a}=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4a}{4a^2}=0$が正の実数解をもたない条件」を考察するわけだが，「ア）実数解をもたない」は求める条件の１つである。

　さらに「イ) 実数解をもっても正ではない」がもう１つの条件である。イ)の場合について解説しよう。

　曲線$y=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4a}{4a^2}$が$x$軸と正の部分と共有点をもたないためには，図２のように曲線（放物線）の軸$x=-\dfrac{b}{2a}<0$が必要である。加えて，y切片$\dfrac{1}{a}\geqq 0$が必要となる。

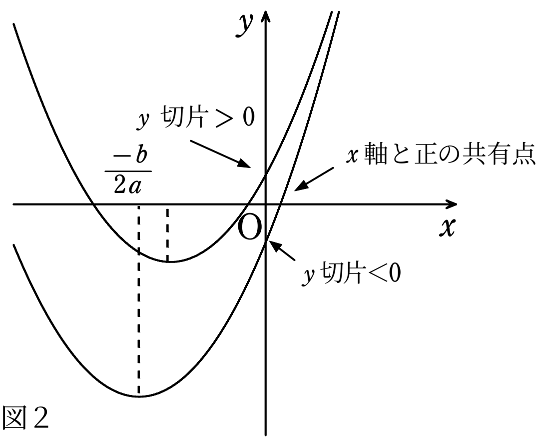

図２

$\boxed{2}$　a，bを$0<a<1$，$0<b<1$を満たす実数とする。平面上の三角形ABCを考え，辺ABを$a:1-a$に内分する点をP，辺BCを$b:1-b$に内分する点をQ，辺CAの中点をRとし，三角形ABCの面積をS，三角形PQRの面積をTとする。

(1) $\dfrac{T}{S}$をa，bで表せ。

(2) a，bが$0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p，qを3以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p}$，$b=\dfrac{1}{q}$とする。$\dfrac{T}{S}$の逆数$\dfrac{S}{T}$が整数となるようなp，qの組(p, q)をすべて求めよ。

<解答>

(1)

　　三角形ABCの面積を△ABCのように表わす。

$\triangle\mathrm{APR} = \triangle\mathrm{ABC}\times\frac{1}{2}\times a = \frac{1}{2}aS$

$\triangle\mathrm{BPQ} = \triangle\mathrm{ABC}\times b\times(1-a) = b(1-a)S$

$\triangle\mathrm{CQR} = \triangle\mathrm{ABC}\times\frac{1}{2}\times(1-b) = \frac{1}{2}(1-b)S$

$\triangle\mathrm{PQR} = T = \triangle\mathrm{ABC}-(\triangle\mathrm{APR}+\triangle\mathrm{BPQ}+\triangle\mathrm{CQR}) = S-\frac{S}{2}(1+a+b-2ab) = \frac{S}{2}(1-a-b+2ab)$

$\therefore \frac{T}{S} = \frac{1-a-b+2ab}{2}$　（答）

(2)

$\frac{1-a-b+2ab}{2} = \frac{2-2a-2b+4ab}{4} = \frac{(1-2a)(1-2b)+1}{4}$

$0 < a < \frac{1}{2}$，$0 < b < \frac{1}{2}$ だから，$0 < 1-2a < 1$，$0 < 1-2b < 1$，$\therefore \frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$　（答）

(3)

$0 < a = \frac{1}{p} \leqq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$，$0 < b = \frac{1}{q} \leqq \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ だから，

(2)より，$\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$，$\therefore 2 < \frac{S}{T} < 4$，したがって $\frac{S}{T}$ が整数値をとるとすれば，$\frac{S}{T} = 3$

$\frac{S}{T} = \frac{2}{1-a-b+2ab} = \frac{2pq}{pq-(p+q)+2} = 3$

$pq = 3(p+q-2)$，$\therefore \frac{p}{3} = \frac{q-2}{q-3}$　①

$q-2$ と $q-3$ とは互いに素だから，① が整数値となるためには $q-3 = 1$，$\therefore q = 4$，$\therefore p = 6$

p と q は逆の値でも良いから，$\frac{S}{T}$ が整数となるような p，q の組 $(p, q) = (4, 6), (6, 4)$　（答）

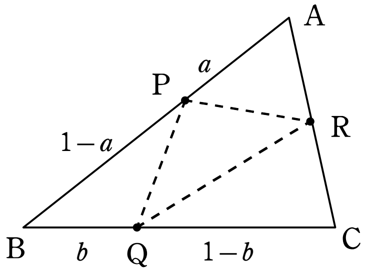

図１

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて，考察する。与えられた条件から△APR，△BPQ，△CQR を△ABC によって表すことは容易だろう。

(2)

記載のような表式が閃かない場合はどうするか。

$\frac{T}{S} = f(a, b) = \frac{1-a-b+2ab}{2} = \left(b-\frac{1}{2}\right)a + \frac{1-b}{2}$ は，$b-\frac{1}{2} < 0$ だから，a の単調減少関数

したがって，$f\left(\dfrac{1}{2}, b\right) = \dfrac{1}{4} < \left(b - \dfrac{1}{2}\right)a + \dfrac{1-b}{2} < f(0, b) = \dfrac{1-b}{2} < f(0,0) = \dfrac{1}{2}$

(3)

設問 (2) を活用する。①から，$q-3 = 1$ に気づくことがポイントである。

$\dfrac{S}{T}$ の表式は p と q を交換しても不変だから，$(p,\ q) = (j,\ k)$ が解 ならば $(k,\ j)$ も解である。

$\boxed{3}$　正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ について，以下の問いに答よ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ。

(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

<解答>

(1)

正八角形の頂点は同一円周上の点であり，頂点を結んでできる直角三角形の斜辺は直径である。1つの直径（斜辺）には 6 個の頂点が対応するから，6 個の直角三角形が存在する。2 個の頂点を結ぶ直径は 4 本存在する。

したがって，求める個数は $6 \times 4 = 24$ 個（答）。

(2)

ⅰ) 隣合う 2 個の頂点を結ぶ線を1辺とする三角形

例えばA_1A_2 を1辺とする条件を満たす三角形の他の頂点はA_4，A_7 の 2 個

隣り合う 2 個の頂点を結ぶ線は 8 本あるから

求める三角形の個数は $8 \times 2 = 16$ 個

ⅱ) 1 個飛ばして次の頂点と結ぶ線を 1 辺とする三角形

例えばA_1A_3 を1 辺とする条件を満たす三角形は ⅰ) に含まれるもの以外存在しない。

ⅲ) 2 個飛ばして次の頂点と結ぶ線を 1 辺とする三角形

例えばA_1A_4 を1 辺とする条件を満たす三角形は ⅰ) に含まれるもの以外存在しない。

以上の結果，求める個数は 16 個（答）

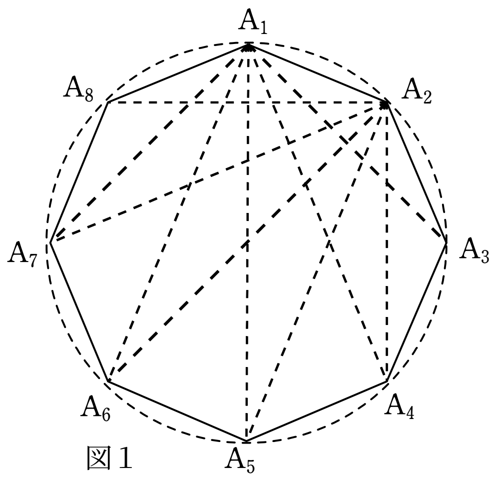

図１

(3)

四角形の 1 辺が直径となる場合と，対角線が直径となる場合がある。

ⅰ) 四角形の 1 辺が直径となる場合

例えば，A_1A_5 を辺とする四角形：

A_2，A_3，A_4 から 2 点を選ぶ四角形の個数 ${}_3C_2 = 3$

A_6，A_7，A_8 から 2 点を選ぶ四角形の個数 ${}_3C_2 = 3$

合計 6 個

直径は 4 本あるから，このような四角形は $4\times6=24$ 個

ⅱ) 四角形の対角線が直径となる場合

例えば，A_1A_5 を対角線とする四角形：

A_2，A_3，A_4 から 1点，A_6，A_7，A_8 から 1点を選ぶ四角形の個数 $3\times3=9$

このうち

ア）A_1A_5 のみを対角線とする四角形は 6 個

イ）他の直径も対角線となる四角形は 3 個

直径となる直線は 4 本だから，

ア）の場合による四角形は $4\times6=24$ 個

イ）の場合による四角形は $4\times3\div2=6$ 個

以上により，求める四角形の個数は $24+24+6=54$ 個　（答）

＜解説＞

難解な問題ではないが，解答方針の案出（着眼，着想）と丁寧な分析を必要とする。
まずは，正八角形の頂点は同一円周上の点であることから，図１のような八角形と外接円を描いて考察しよう。

(1)

3 個の頂点を結んでできる三角形の頂角が 90° ということは2 つの頂点を結ぶ弧に立つ円周角が 90° ということ。すると，２つの頂点を結ぶ弦は直径である。

(2)

1 辺が隣り合う頂点を結ぶ線，隣の隣の頂点を結ぶ線，のように考え，条件を満たす三角形の個数を考える。例えば，図１からわかるようにA_1A_2 を１辺とする条件を満たす三角形は他の頂点が

A_3：二等辺三角形（条件を満たさない）

A_4：直角三角形でも二等辺三角形でもない（条件を満たす）

A_5：直角三角形（条件を満たさない）

A_6：直角三角形（条件を満たさない）

A_7：直角三角形でも二等辺三角形でもない（条件を満たす）

A_8：二 等辺三角形（条件を満たさない）

したがって，A_4 とA_7 の場合に条件を満たす三角形となる。

(3)

四角形の 3 個の頂点を結んでできる三角形が直角三角形となるということは，その四角形は直径を構成する頂点 2 個を含む四角形である。そこで，その直径が辺となる場合と対角線となる場合とに分けて考察すると良いと気づきたい。

$\boxed{4}$　座標平面において，次の条件 (∗) を満たす直線 l を考える。

(∗) l の傾きは 1 で，曲線 $y=x^3-2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さなものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a\,,\,a^3-2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 l が条件 (∗) を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 l が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

直線 l を $y = x+b$ ①　とする。曲線 $y = x^3-2x$ ②

①，② の交点の x 座標は，① と② を連立させた $x^3-2x = x+b$ より，$x^3-3x-b = 0$ ③ の解。

点 R が $(a\ ,\ a^3-2a)$ だから，$a^3-3a-b = 0$，$\therefore\ b = a^3-3a$

したがって，③ は $x^3-3x-(a^3-3a) = (x-a)(x^2+ax+a^2-3) = 0$ ④

交点 P と Q の x 座標 x_P，x_Q は 2 次方程式 $f(x) = x^2+ax+a^2-3 = 0$ ⑤　の実数解で，

$x_P < x_Q < a$ ⑥

⑤ の解の判別式 $D = a^2-4(a^2-3) = -3(a+2)(a-2) > 0$，したがって $-2<a<2$ ⑦

⑤ の実数解が ⑥ を満たすためには，$f(x) = \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{1}{4}a^2-1\right) = 0$ だから，

$f(a) = 3a^2-3 > 0$，$\therefore\ a > 1$ または $a < -1$ ⑧，加えて $-\dfrac{a}{2} < a$，$\therefore\ a > 0$ ⑨

⑦，⑧，⑨から，$1 < a < 2$ ⑩

2 次方程式 ⑤ の解と係数の関係より，PQ の中点 S の x 座標 $x_S = \dfrac{x_P+x_Q}{2} = -\dfrac{a}{2}$ ⑪

S の y 座標 $y_S = x_S+b = -\dfrac{a}{2}+a^3-3a = a^3-\dfrac{7}{2}a$ ⑫

したがって，点 S の座標は $\left(-\dfrac{a}{2},\ a^3-\dfrac{7}{2}a\right)$，$1 < a < 2$　（答）

(2)

⑪ から $a = -2x_S$，これを ⑫ に代入して，

$y_S = (-2x_S)^3-\dfrac{7}{2}(-2x_S) = -8{x_S}^3+7x_S$，また　$1 < -2x_S < 2$，$\therefore\ -1 < x_S < -\dfrac{1}{2}$

以上により，点 S の軌跡は $y = -8x^3+7x$，ただし $-1 < x < -\dfrac{1}{2}$ の部分　（答）

(3)

$b = a^3-3a$，$b' = \dfrac{db}{da} = 3a^2-3 = 3(a+1)(a-1)$，すると $1 < a < 2$ において $b' > 0$

したがって，b は $1 < a < 2$ において単調増加し，$a = 1$ のとき $b = -2$，$a = 2$ のとき $b = 2$

したがって，条件 $(*)$ を満たしながら動く直線 l は $y = x-2$ から $y = x+2$ まで b が単調に増加してできる直線となる。

線分 PS が動いてできる領域は図 1 に示す打点部となる（境界を含む）。

$y = x-2$ と $y = x^3-2x$ の交点 P の x 座標 $x_P = -2$

$y = x+2$ と $y = x^3-2x$ の交点 P の x 座標 $x_P = -1$

$y = x-2$ と $y = -8x^3+7x$ の交点の x 座標は $x = -\dfrac{1}{2}$

線分 PS が動いてできる領域の面積

$$=\int_{-2}^{-1}\{(x^3-2x)-(x-2)\}dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\{(-8x^3+7x)-(x-2)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+3x^2+2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\frac{11}{4}+\frac{5}{8}=\frac{27}{8}$$ （答）

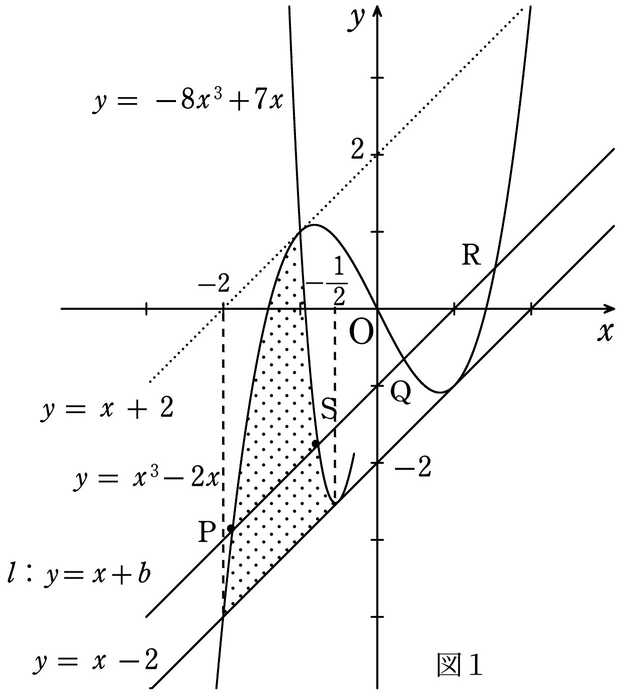

図１

＜解説＞

(1)

$x=a$ が 3 次方程式の解で，点 R の座標であることから，点 P，Q の x 座標が満たす 2 次方程式が求まる。P，Q の x 座標は a より小さくなければならない。このことから，a の値の範囲が定まる。

(2)

点 S の x 座標，y 座標の関係式によって，軌跡が表式される。

(3)

まずは条件 (*) を満たしながら動く直線 l はどのような直線かを把握する。直線 l は y 切片 b によって決まる。b の変化による直線 l と線分 PS の変化域を考察する。

$\boxed{5}$　z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 O (0)，A (z)，B (z^2)について，以下の問いに答よ。

(1) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ を満たすとき，

三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

<解答>

$z = x+yi = (x, y)$ とする。

(1)

3 点 O，A，B が同一直線上にある $\Leftrightarrow$ OA，OB が同一直線 $\Leftrightarrow k(z-0) = z^2-0$，$k$ は実数

$\Leftrightarrow z(z-k) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ または $z = k$，すなわち z は実数

3 点 O，A，B が同一直線上にある 必要十分条件は z が実数であること　（答）

(2)

i) O が二等辺三角形の頂点の場合

OA = OB だから，$|z-0| = |z^2-0|$，$\therefore |z| = |z^2| = |z|^2$，$\therefore |z| = 1$

z は 原点 O (0) を中心とする半径 1 の円周上の点

ii) A が頂点の場合

AO = AB だから，$|0-z| = |z^2-z|$，

$\therefore |z| = |z^2-z| = |z(z-1)| = |z||z-1|$，$\therefore |z-1| = 1$

したがって z は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上の点

iii) B が頂点の場合

BO = BA だから，$|0-z^2| = |z-z^2|$，$\therefore |z|^2 = |z||z-1|$，$|z| = |z-1|$

すなわち，$|z-0| = |z-1|$ だから，z は点 $(0, 0)$ と点 $(1, 0)$ から等距離の点

すなわち，z は点 $(0, 0)$ と点 $(1, 0)$ の垂直 2 等分線上の点

以上の結果をまとめて，3 点が二等辺三角形の頂点になる場合の z を図 1 に示す（○は含まない）。

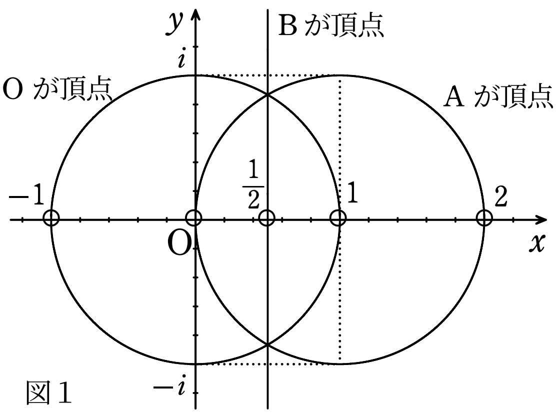

図 1

(3)

OA $= |z|$，OB $= |z^2|$，$\angle$AOB $= \theta$

三角形 OAB の面積 $S = \dfrac{1}{2}\text{OA}\times\text{OB}\sin\theta = \dfrac{1}{2}|z|\times|z^2|\sin\theta = \dfrac{1}{2}|z|^3\sin\theta$

図 2 に示すように，$y = (\tan\theta)x$ なる直線を引いて O，A，B が二等辺三角形の頂点となる場合の z の軌跡との交点となる z をそれぞれ z_O，z_A，z_B とする。

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，明らかに $|z_B| \leqq |z_O| \leqq |z_A|$ であるから，A が頂点となる二等辺三角形の面積が最大となるので，この場合の最大値を検討する。

$|z|\sin\theta = y,\ |z^2| = x^2 + y^2 = x^2 + 1-(x-1)^2 = 2x$

$\therefore S = \dfrac{1}{2}|z|^3\sin\theta = xy = x\sqrt{1-(x-1)^2} = x\sqrt{x(2-x)}$

$S(x) = x\sqrt{x(2-x)}$ とおくと，$S'(x) = \dfrac{2x(3-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}$

$S(x)$ は図３のように変化するので，$x = \dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$y = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3}$，$z$ の偏角条件を満たす。

したがって，三角形 OAB の面積の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，そのとき $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ （答）

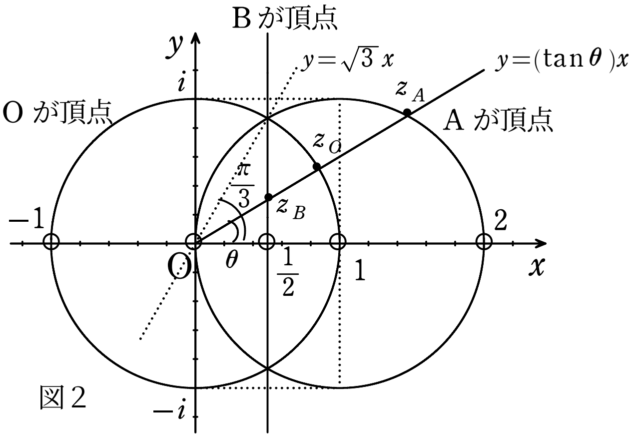

図２

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2
$S'(x)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗		↘	

図３

＜解説＞

複素数の演算による図形の取り扱いに関する問題。

⑴

3 点が同一直線上にあることを数式的に表現する。

⑵

三角形 OAB が二等辺三角形となる z の条件を，その頂点が O，A，B となる場合について求める。

⑶

三角形 OAB の辺長 OA，OB とそれらの夾角が定まっている。その面積は $|z|$ と θ によって表式化できる。⑵ で定まる z を用いて，面積を記述し最大値を求める。

A が二等辺三角形の頂点となる場合について，図４のように，OA = AB = AB’ になる点 B’ を x 軸上にとれば，三角形 OAB は二等辺三角形だから，三角形 OAB ≡ 三角形 OAB’

三角形 OAB の面積 = 三角形OAB’の面積 $= xy = x\sqrt{1-(x-1)^2} = x\sqrt{x(2-x)}$

のように簡単に求めることができる。

O が二等辺三角形の頂点の場合

$|z| = 1$ だから $S = \dfrac{1}{2}\sin\theta$，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ だから，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき三角形 OAB は正三角形となり S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

Bが頂点の場合

$|z|\sin\theta = y = x\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\theta$，$|z^2| = x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2(1+\tan^2\theta)$

したがって，$S = \frac{\tan\theta(1+\tan^2\theta)}{8}$，$S$ は$\tan\theta$の単調増加関数だから，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$において

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$のとき最大値 $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$

いずれの場合も，A が頂点の場合の最大値が大きい。

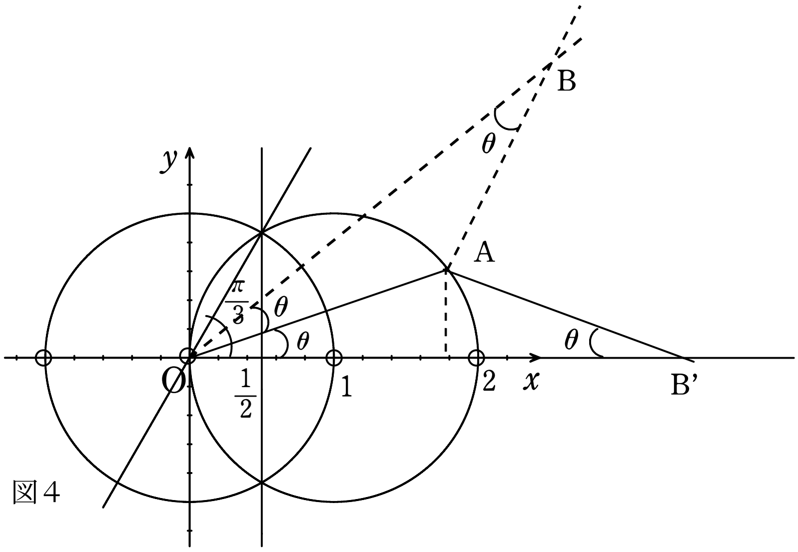

図４

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。
ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

<解答>

(1)

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx \quad ①$$

$f_k(a) = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!}e^x\,dx$ とおく。ただしk は自然数

$f_1(a) = 1 + a + \int_0^a (a-x)e^x dx = 1 + a + \Big[(a-x)e^x + e^x\Big]_0^a = e^a$

したがって，$k = 1$ において ① は成り立つ。

$k = n$ において，$e^a = f_n(a) = 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n\,!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx$ が成り立つとする。

$f_{n+1}(a) = 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n\,!} + \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\, dx$

部分積分法により，$\int \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x = \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x - \int \dfrac{(-1)(a-x)^n}{n\,!} e^x$

$\therefore \int_0^a \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\, dx = \left[\dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\right]_0^a + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x = -\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x$ ②

したがって，$f_{n+1}(a) = 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n\,!} + \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x$

$$= 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n\,!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n\,!} e^x = e^a$$

$k = n$ において ① が成り立つとすれば，$k = n+1$ においても ① は成り立つ。

以上のように ① は $k = 1$ において成り立ち，$k = n$ において成り立つとすれば $k = n+1$ においても成り立つので，数学的帰納法により，

$e^a = 1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n\,!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx$ が成り立つ。

(2)

②より，$\int_0^a \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\, dx = -\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x$

したがって，$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx - \int_0^a \dfrac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\, dx \leqq \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx$

$0 \leqq x \leqq a$ において，$\dfrac{(a-x)^n}{n\,!} \geqq 0$，$e^x \leqq e^a$ だから，

$\int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx \leqq \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^a\, dx = \left[\dfrac{-(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a e^a = \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

したがって，$\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \dfrac{(a-x)^n}{n\,!} e^x\, dx \leqq \dfrac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$

(3)

$f_n(1) = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n\,!} + \int_0^1 \dfrac{(1-x)^n}{n\,!} e^x\, dx = e$

$\therefore e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n\,!}\right) = \int_0^1 \dfrac{(1-x)^n}{n\,!} e^x\, dx$

(2)より，$\dfrac{1}{(n+1)!} \leqq e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n\,!}\right) \leqq \dfrac{e}{(n+1)!}$ ③

不等式$\left| e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n\,!}\right)\right| < 10^{-3}$ ④ を満たすためには

③より，$\dfrac{e}{(n+1)!} < 10^{-3}$，$\therefore (n+1)! > 10^3 e$　⑤

$6! = 720$，$7! = 5040$だから，$n = 5$ のとき ⑤ を満たさない。

$n = 6$ のとき $5040 > 3000 > 10^3 e$ となるので，④ を満たす最小の正の整数 n は 6　（答）

＜解説＞

(1)

数学的帰納法を用いると解り易い。その際，部分積分法により，②を導くことがポイントである。

(2)

②を活用する。

(3)

$f_n(1)$の場合について，(2)を活用して，考察する。

＜総評＞

例年同様に，解答方針の案出，論理の展開，計算処理などに標準以上の学力を要する問題が揃っている。非常な難問ということはない。

$\boxed{1}$

2 次関数のグラフに関する問題。x 軸の正の部分と共有点をもつということは正の実数解をもつということなど，グラフと方程式の関係を理解していること。難易度はＢ。

$\boxed{2}$

図形の問題から整数の問題へと展開する。ちょっとした着想があると良いが，難問ではない。
難易度はＢ。

$\boxed{3}$

正八角形の頂点を結んでできる三角形の場合分けに関する問題。円の性質に関する知識を基礎に，できる三角形を見落としなく数える。難易度はＢ＋。

$\boxed{4}$

3次曲線と３つの点を共有する直線に関する問題で，直線の動く範囲の面積を求める積分がやや複雑である。解答方針は立てやすいが，条件や計算に複雑なところがあり，ミスを誘導しやすいので要注意である。難易度はＡ－。

$\boxed{5}$

複素数の演算による図形の取り扱いに関する問題。複素数による図形の表現が非常に便利であることが実感できるような問題である。複素数を使った数式と図形との関係を的確に理解しておきたい。特別難しい複素数演算ではないが，解答には着想が必要である。難易度はＢ＋。

$\boxed{6}$

積分演算を含む級数表現の整式の問題。部分積分法を活用すると，論理展開の見通しがつく。解答方針の着想や思考を必要とするので難易度はＢ＋。

231227

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部(文系)・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$ 理系の $\boxed{1}$ と同じ。

$\boxed{2}$ 理系の $\boxed{3}$ と同じ。

$\boxed{3}$ 平面において，２つの点 O，A の間の距離が 1 であるとし，点 O と点 A を中心とする２つの円をそれぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点 P，Q において交わり，$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとし，C_2 の半径 r は $r < 1$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 の半径を求めよ。

(2) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ。

(3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

C_1 の半径を t とする。

三角形 OPA において，余弦定理により $1^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos\dfrac{\pi}{3} = r^2 + t^2 - rt$

$t^2 - rt + r^2 - 1 = 0$，$\therefore\ t = \dfrac{r \pm \sqrt{4-3r^2}}{2}$

$r < 1$ だから $\sqrt{4-3r^2} > 1$，したがって $r - \sqrt{4-3r^2} < 0$ だから，$t = \dfrac{r + \sqrt{4-3r^2}}{2}$ （答）

(2)

(1)の結果より，$t = \dfrac{r + \sqrt{4-3r^2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

三角形 OPA において正弦定理により，$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{t}{\sin\angle PAO} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sin\angle PAO}$

$\sin\angle PAO = 1$，$\therefore\ \angle\mathrm{PAO} = \dfrac{\pi}{2}$ （答）

(3)

円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積 $= S = S_1 + S_2$ とする。

S_1 は円 C_1の弦 PQ と弧 PQ が囲む面積，S_2 は円 C_2 の弦 PQ と弧 PQ が囲む面積

$\angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{3}$だから，図 2 を参照して，$S_1 = \dfrac{1}{6}\times\pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\times\left(1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

図２を参照して，PQ は円 C_2 の直径だから，$S_2 = \dfrac{1}{2}\times\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi}{6}$

$S = \dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{18} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（答）

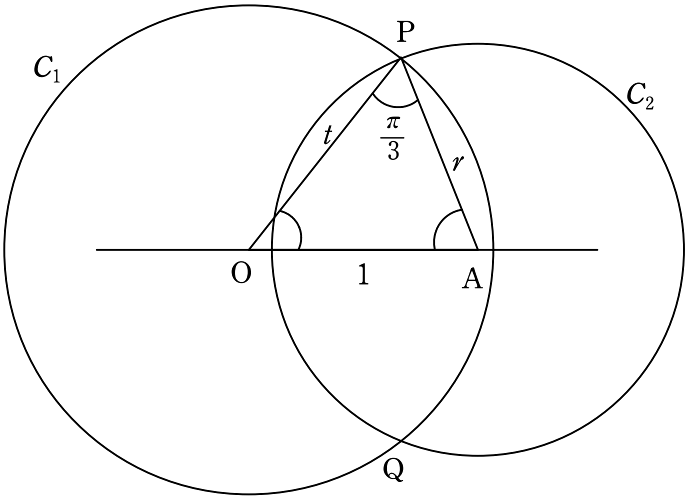

図１

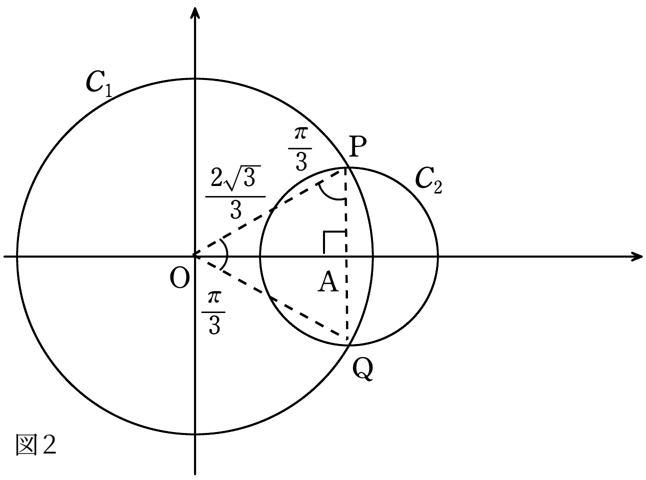

図２

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて考える。∠OPA，OA，PA が与えられているので，t = OP を求めるためには余弦定理を利用すれば良い，と気づきたい。

(2)

ここでは正弦定理を使う方が速いだろう。もちろん，余弦定理でも良い。

(3)

図２のような図を描いて考える。

S_1 = （扇形OPQの面積）－（正三角形OPQの面積）

$\boxed{4}$　以下の問いに答よ。

(1) 3 次関数 $y=x^3+x^2$ のグラフと2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフの共通接線（どちらのグラフにも接する直線）は 2 本ある。それらの方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。

<解答>

(1)

$y=x^3+x^2$　①

① の接線の接点を $(p\,,\,p^3+p^2)$ とする。

① の導関数は $y'=3x^2+2x$　②

②より，① の接線の式は $y=(3p^2+2p)(x-p)+(p^3+p^2)=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2$　③

$y=x^2+4x+16$　④

③ が ④ の接線である $\Leftrightarrow$ ③ と ④ を連立させた 2 次方程式が重解をもつ

すなわち $x^2+4x+16=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2$　⑤ が重解をもつ。

⑤ を変形して，$x^2+(4-3p^2-2p)x+16+2p^3+p^2=0$　⑥

⑥ の解の判別式

$D=(4-3p^2-2p)^2-4(2p^3+p^2+16)=9p^4+12p^3-20p^2-16p+16-8p^3-4p^2-64$

$=9p^4+4p^3-24p^2-16p-48=(p-2)(9p^3+22p^2+20p+24)=(p-2)(p+2)(9p^2+4p+12)=0$

したがって，$p=\pm2$

$p=-2$ のとき，接線 ③ は $y=8x+12$　⑦

$p=2$ のとき，接線 ③ は $y=16x-20$　⑧

以上によって，①，④ の共通接線の方程式は $y=8x+12$，$y=16x-20$　（答）

(2)

⑦と④の接点は $(2\,,\,28)$

⑧と④の接点は $(6\,,\,76)$

⑦と⑧の交点は $(4\,,\,44)$

2 本の共通接線と2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフで囲まれた部分の面積

$$=\int_2^4\{(x^2+4x+16)-(8x+12)\}dx+\int_4^6\{(x^2+4x+16)-(16x-20)\}dx$$

$$=\int_2^4(x-2)^2dx+\int_4^6(x-6)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4+\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_4^6=\frac{16}{3}$$　（答）

<解説>

(1)

共通の接線をどのようにして求めるか，方針を考案したい。2 次関数のグラフの接線といえば，接線の 1 次関数と 2 次関数を連立させてできる 2 次方程式が重解をもつ，という条件から接線の関数を求めるという方法を読者は十分ご存知だろう。

しかし，3 次関数の接線と 3 次関数とを連立させた場合，どのような関係が導かれるか，やや不透

明であろう。恐らく重解と実数解 1 個ということになるだろう。しかし，2 次方程式の重解のように判別式という便利なものを知らない。

そこで与えられた 3 次関数の接線の方程式を求め，これを 2 次関数と連立させてできる 2 次方程式が重解をもつという条件を利用しようと気づきたい。p の 4 次方程式となる $D=0$ の解を求めることがやや困難である。ここでは$p=\pm1$，±2，．．． などとして$D=0$ を確認することが速い。

(2)

(1)で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数のグラフとの接点を求める。また共通接線の交点も求める。図 1 のような図を大雑把に描いて，積分領域の様相を把握し，非積分関数，積分範囲などを的確に把握する。

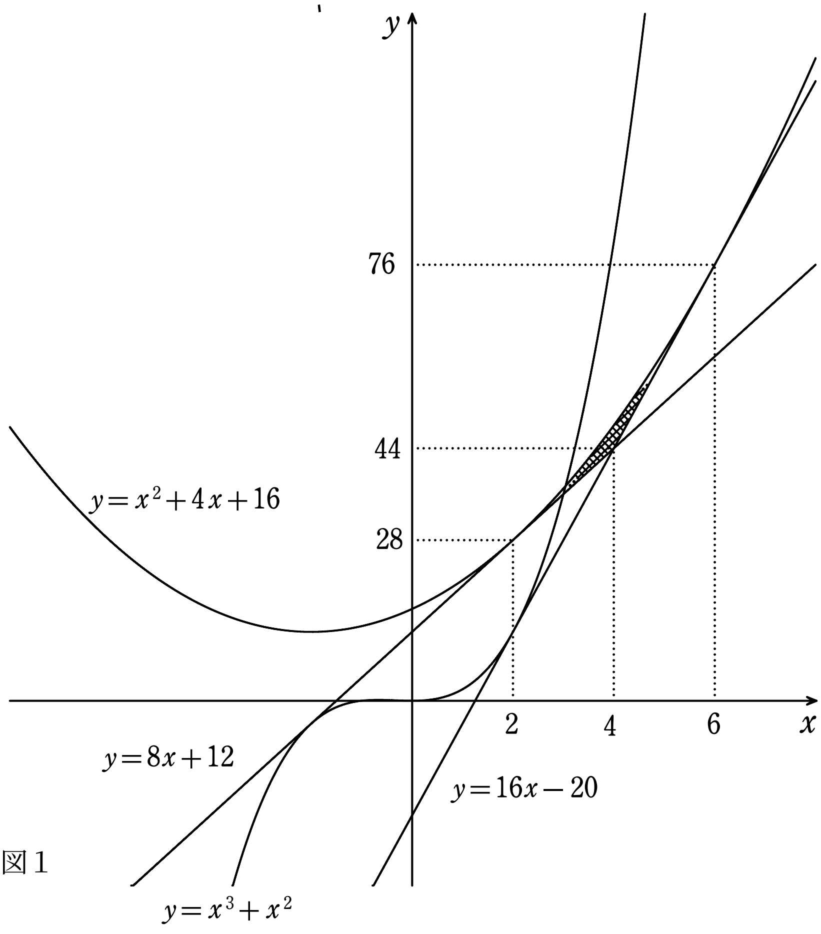

図 1

<総評>

$\boxed{1}$

理系の $\boxed{1}$ と同じ。文系の問題としては標準的な難易度でＢ。

$\boxed{2}$

理系の $\boxed{3}$ と同じ。文系の問題としてはやや難しく難易度でＢ＋。

$\boxed{3}$

数学 1 の範囲の問題。文系の問題としては標準的な問題。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$

2 次関数，3 次関数の接線とそれらが囲む面積の問題。文系の問題としてはやや難しく難易度Ｂ＋。

240109