

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は10ページ、答案用紙の冊子は5ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し、下の枠内には受験番号の下2桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は、下記の例にならひ、明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1

(60点)

正の整数に関する条件

(*) 10進法で表したときに、どの位にも数字9が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とすると、 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(*)を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき、 a_k を k の式で表せ。

(2) 正の整数 n に対して、

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件(*)を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件(*)を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき、すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

(下書き用紙)

2

(60 点)

 xy 平面上の楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) a, b を実数とする。直線 $\ell: y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a, b の条件を求めよ。
- (2) 実数 a, b, c に対して、直線 $\ell: y = ax + b$ と直線 $m: y = ax + c$ が、それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし、 $b > c$ とする。直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P 、大きい方を Q とする。また、直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S 、大きい方を R とする。このとき、等式

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

が成り立つための a, b, c の条件を求めよ。

- (3) 楕円 E 上の 4 点の組で、それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

(下書き用紙)

3

(60点)

以下の問いに答えよ.

- (1) 正の整数 n に対して, 二項係数に関する次の等式を示せ.

$$n {}_2C_n = (n+1) {}_2C_{n-1}$$

また, これを用いて ${}_2C_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ.

- (2) 正の整数 n に対して,

$$a_n = \frac{{}_2C_n}{n+1}$$

とおく. このとき, $n \geq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ.

- (3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ.

(下書き用紙)

4 (60点)

S を、座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。 S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - 3(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$ とするとき、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し、定数 k を求めよ。

- (2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの、 F の最大値 M を求めよ。

- (3) 点 C の座標が $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0)$ 、点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき、 $F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

(下書き用紙)

5

(60 点)

xy 平面上の円 $C: x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$) を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 円 C が $y \geq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ.
- (2) 円 C が $y \geq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) の範囲にあるとする. xy 平面において連立不等式

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, \quad y \geq x^2 - x^4, \quad x^2 + (y - a)^2 \geq a^2$$

で表される領域 D を, y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

(下書き用紙)

